CAPITULO 1

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRIA

CAPITULO 1

1.1 ELEMENTOS DE GEOMETRIA

1.1.1 SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

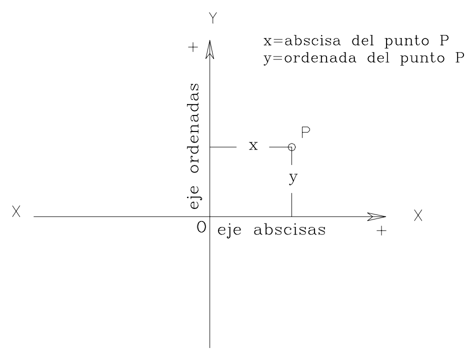


Figura 1-1. Sistema de Coordenadas Rectangulares.

Dos líneas rectas que se corten en ángulo recto constituyen un sistema de ejes de coordenadas rectangulares, conocido también como sistema de Coordenadas Cartesianas; nombre que se le da en honor al matemático francés Descartes, iniciador de la geometría analítica.

En la intersección de las rectas se tiene el origen O de coordenadas. Al eje x-x se le denomina eje de las abscisas y al eje y-y eje de las ordenadas.

En la figura 1-1, el punto "P" queda perfectamente definido por la distancia medida sobre cada uno de los ejes desde el origen hasta la proyección del punto "P"; así pues, la distancia "x", medida desde el eje de las ordenadas hasta el punto "P", se llama abscisa del punto, y la distancia "y", medida desde el eje de las abscisas hasta el punto "P", se denomina ordenada del punto.

En Topografía, el eje de las ordenadas se asume como eje Norte-Sur,y el de las abscisas como eje Este-Oeste; de esta manera, a la ordenada del punto "P" se le denomina NORTE del punto y a la Abscisa, ESTE del punto.

Por las definiciones dadas, las coordenadas de un punto se anotan de la siguiente manera:

$$P(Np;Ep)$$

en donde:

Np = Coordenada norte del punto P.
Ep = Coordenada este del punto P.

La figura 1-2.a representa los cuadrantes utilizados en trigonometría y geometría analítica. Nótese que, en este caso, el sentido positivo de rotaciones es el antihorario, y que el origen de rotaciones coincide con el eje X-X.

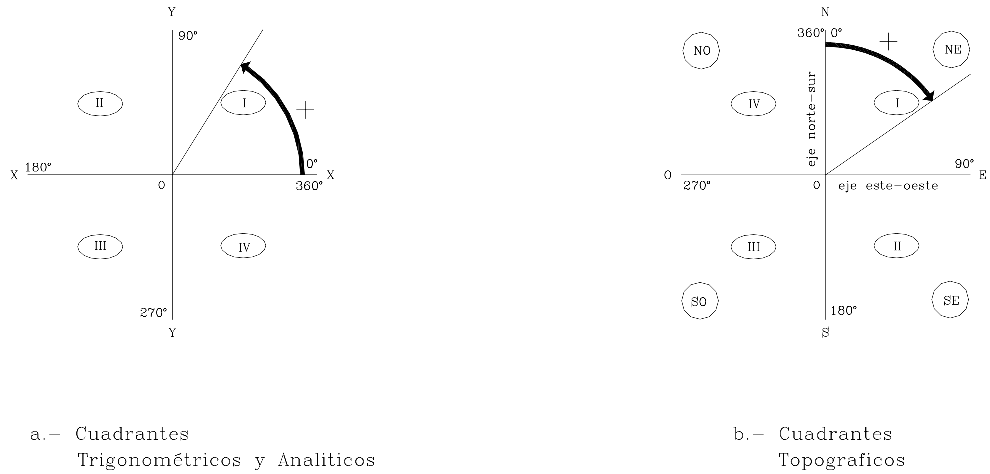


Figura 1-2 Cuadrantes

La figura 1-2.b representa los cuadrantes utilizados en topografía. En este caso, el sentido positivo de rotaciones es el horario, y el origen de rotaciones coincide con la dirección norte.

Los cuadrantes topográficos se denominan de la siguiente manera:

CUADRANTE	NOMBRE		SIGNOS
I	Norte – Este	NE	+ +
II	Sur - Este	SE	- +
III	Sur - Oeste	SO	- -
IV	Norte – Oeste	NO	+ -

1.1.2 SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

La posición de un punto "P_2" con respecto a un punto "P_1", también queda definida mediante el ángulo φ entre el eje de referencia y la alineación de P_1P_2, y la distancia D, según se observa en la figura 1-3.

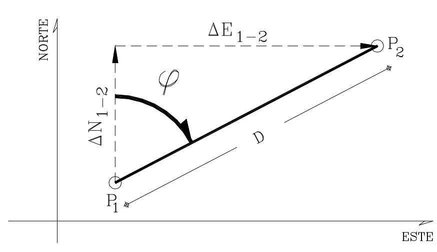


Figura 1.3 Sistema de coordenadas polares

El ángulo φ y la distancia D, constituyen las COORDENADAS POLARES del punto P_2.

En forma análoga a la expresada para el sistema de coordenadas rectangulares, las coordenadas de un punto se indican de la siguiente manera:

$$P(\varphi_p;D_p)$$

La dirección de una alineación cualquiera se puede definir por el ángulo horizontal, (medido en sentido horario), que dicha alineación forma con una alineación de referencia. Si la alineación de referencia es el eje norte, el ángulo horizontal se denomina ACIMUT (φ).

En la figura 1-4 se indican los Acimutes correspondientes a alineaciones ubicadas en diferentes cuadrantes.

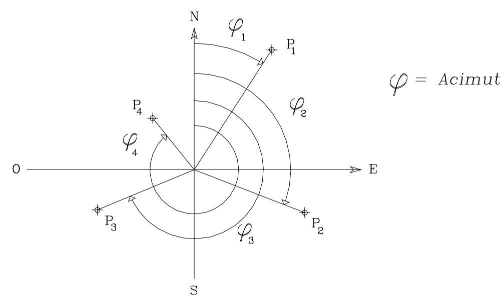


Figura 1.4 Acimutes en diferentes cuadrantes

El ángulo agudo que la dirección Norte-Sur forma con la alineación dada se denomina RUMBO (α).

En la figura 1-5 se indican los rumbos de alineaciones en los cuatro cuadrantes.

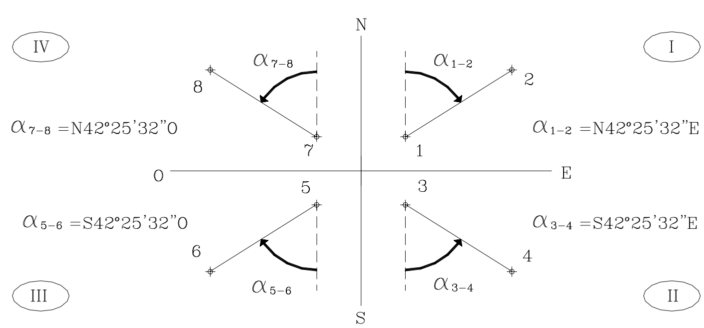


Figura 1.5 Rumbos en los diferentes cuadrantes

1.1.3 RELACIONES GEOMETRICAS ENTRE AMBOS SISTEMAS

De acuerdo a la figura 1-3, las relaciones geométricas existentes entre los puntos $P_1(N_1;E_1)$ y $P_2(N_2;E_2)$ quedan expresadas mediante las siguientes ecuaciones:

$$D_{1-2} = \sqrt{(E_2 - E_1)^2 + (N_2 - N_1)^2} \quad (1.1)$$

$$\tan \alpha_{1-2} = \frac{E_2 - E_1}{N_2 - N_1} \tag{1.2}$$

$$\Delta N_{1-2} = D_{1-2} * \cos\varphi \tag{1.3}$$

$$\Delta E_{1-2} = D_{1-2} * sen\varphi \tag{1.4}$$

En donde:

φ = Acimut de la alineación P_1P_2
α = Rumbo de la alineación P_1P_2
Ni,Ei = Coordenadas Rectangulares del Pi.
$\Delta N, \Delta E$ = Distancia en proyección sobre los ejes Norte y Este desde el punto P_i hasta el punto P_{i+1}.
D_{P1P2} = Distancia horizontal entre ambos puntos.

Nota: En las ecuaciones 1.2,1.3 y 1.4 se puede utilizar igualmente el rumbo α, en sustitución del acimut φ.

Ejemplo 1.1

Dadas las coordenadas de los puntos 1 y 2 representados en la figura E1.1, calcular la distancia D_{1-2}, el rumbo α_{1-2} y el acimut φ_{1-2} de la alineación 1 - 2.

PUNTO	COORDENADAS	
	NORTE	ESTE
1	192,241	137,419
2	105,565	50,327

Calcular: φ_{1-2}, α_{1-2} y D_{1-2}

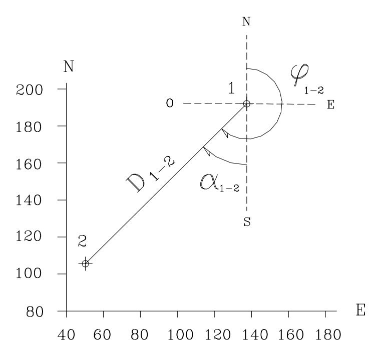


Figura E-1.1

Solución

Mediante la aplicación de las ecuaciones 1.1 y 1.2, se tiene:

E_2-E_1= 50,327-137,419 = -87,092 m.
N_2-N_1=105,565-192,241= -86,676 m.

Nótese que por ser las proyecciones norte y este negativas, el rumbo de la alineación 1-2 pertenece al III cuadrante y por lo tanto es rumbo S-O.

$\tan\alpha_{1-2}$= -87,092/-86,676 = 1,004779

$\alpha_{1\text{-}2}$= arctg(1,004779)
$\alpha_{1\text{-}2}$= S 45º08'14" O
El acimut φ según la figura E1-1 es:
$\varphi_{1\text{-}2}$ = 180º+$\alpha_{1\text{-}2}$=180º+45º08'14"
$\varphi_{1\text{-}2}$=225º08'14"

$$D_{1-2} = \sqrt{87,092^2 + 86,672^2} = 122,873m$$

$D_{1\text{-}2}$=122,873 m

Nota: Salvo que se indique lo contrario, los valores angulares se especificaran en º ' " (grados, minutos, segundos enteros) y las distancias hasta el mm, ya que éstas son, generalmente, las precisiones de los instrumentos topográficos.

Ejemplo 1.2

Dadas las coordenadas del punto 1 (208,325;175,422), el acimut $\varphi_{1\text{-}2}$ de la alineación 1-2 y la distancia $D_{1\text{-}2}$, calcular las coordenadas del punto 2.
$\varphi_{1\text{-}2}$=124º20'15" *$D_{1\text{-}2}$=138,432 m*
Solución

Mediante la aplicación de las ecuaciones 1.3 y 1.4, se tiene:

$\Delta E_{1\text{-}2}$=138,432*sen(124º20'15")= -78,085 m
$\Delta N_{1\text{-}2}$=138,432*cos(124º20'15")= 114,307 m

Como $\Delta E_{1\text{-}2}$ y $\Delta N_{1\text{-}2}$ son las distancias en proyección desde 1 hasta 2, las coordenadas de 2 serán:

$E_2 = E_1 \pm \Delta E_{1\text{-}2}$ ➔ E2= 208,325 - 78,085=130,240 m
$N_2 = N_1 \pm \Delta N_{1\text{-}2}$ ➔ N_2= 175,422 +114,307=289,729 m
Coordenadas de 2 (289,729;130,240)

1.1.4 LA RECTA

Una recta que pase por los puntos $P_1(N_1;E_1)$ y $P_2(N_2;E_2)$, como la mostrada en la figura 1-6, se representa matemáticamente mediante las ecuaciones 1.5 a 1.7.

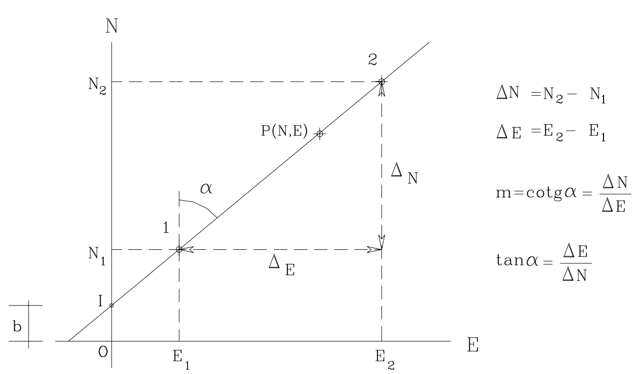


Figura 1-6 Representación gráfica de una recta

$$N_2 - N_1 / E_2 - E_1 = \cot g\alpha = m \qquad (1.5)$$

y para un punto genérico P(N;E), perteneciente a la recta:

$$N - N_1 = m * (E - E_1) \qquad (1.6)$$

Las coordenadas del punto I de intersección de la recta con el eje norte son b y 0. Sustituyendo estos valores en 6 se tendrá :

$$N = m * E + b \qquad (1.7)$$

en donde:

N,E = Coordenadas de un punto genérico sobre la recta.
m = cotg del ángulo α (Define la dirección de la recta).
b = Ordenada del punto de intersección de la recta con el eje Norte. (Intersecto)

Ejemplo 1.3

Calcular la ecuación general de la recta mostrada en la figura E1-3 que pasa por los puntos P_1 y P_2, de coordenadas conocidas.

	COORDENADAS	
PTO.	NORTE	ESTE
P_1	517,135	185,342
P_2	420,316	203,428

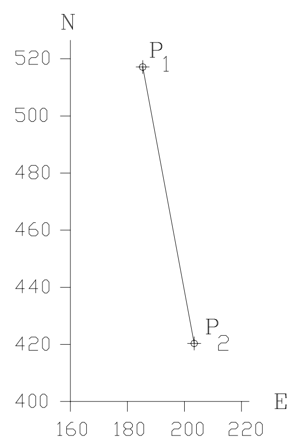


Figura E1-3

Solución

Aplicando la ecuación 1.6, se tiene:

N-517,135=(420,316-517,135/203,428-185,342) * (E-185,342)
N-517,135=(- 96,819/18,086)*(E-185,342)

N= -5,353E+1.509,318

Ejemplo 1.4: INTERSECCION DE RECTAS

Calcular las coordenadas del punto de intersección I de las dos rectas que se muestran en la figura E1-4. Se conocen las coordenadas de los puntos 1,2,3 y 4.

PTO.	COORDENADAS	
	NORTE	ESTE
1	50,000	300,000
2	450,000	200,000
3	150,000	170,000
4	400,000	225,000

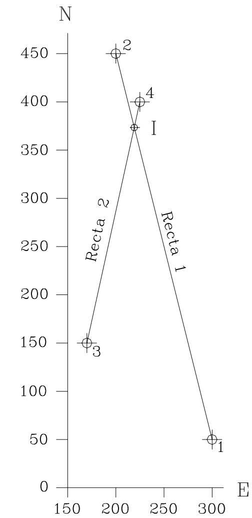


Figura E1-4

Solución

Las coordenadas del punto de intersección de dos rectas se obtienen resolviendo el sistema constituido por las dos rectas.

Sustituyendo valores de las coordenadas en la ecuación 1.6, se tiene:

N-300 = (200-300/450-50)*(E-50)
N=-0,25E+312,5 $\Longrightarrow$ [A] (Ec. recta 1)

N-170 = (225-170/400-150)*(E-150)
N= 0,22E+137,0 $\Longrightarrow$ [B] (Ec. recta 2)

Restando: [A]-[B]

N= -0,25E+312,5
N= 0,22E+137,0
0= -0,47E+175,5 $\Longrightarrow$ E = 373,404

Reemplazando el valor obtenido para E en [A]:

N = -0,25(373,404)+312,5 $\Longrightarrow$ N = 219,149

Coordenadas de I $\Longrightarrow$ I(219,149; 373,404)

Ejemplo 1.5: RECTAS PERPENDICULARES

Dadas las coordenadas de los puntos P_1, P_2 y P_3 representados en la figura E1-5, se pide calcular las coordenadas del punto de intersección "B" de la recta perpendicular a P_1P_2 que pasa por P_3.

Pto.	COORDENADAS	
	NORTE	ESTE
P_1	1160,000	690,000
P_2	1685,000	935,000
P_3	1310,000	1250,000

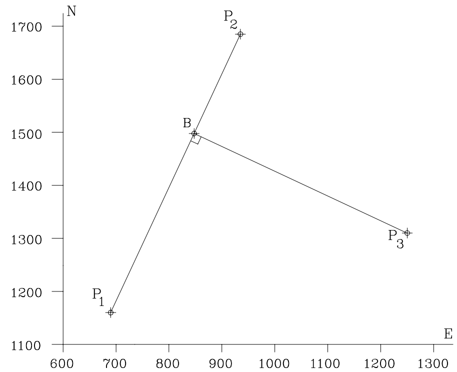


Figura E1-5

Solución

La ecuación general de una recta que pase por el punto P_3 conocido, y que sea perpendicular a la recta dada P_1P_2, está definida por la siguiente expresión:

$$N - N_3 = -\frac{1}{m} * (E - E_3) \tag{1.8}$$

Las coordenadas del punto de intersección B se obtienen igualando las expresiones obtenidas por las ecuaciones 1.6 y 1.8.

El valor de m de la recta P_1P_2 se obtiene de la ecuación 1.5.

$m = (N_2\text{-}N_1/E_2\text{-}E_1) = 525/245$
$m = 105/49$

La ecuación de P_1P_2 se obtiene de 1.6

N-1160 = (105/49)*(E-690)
N= 2,14286E-318,57143 $\Longrightarrow$ [A]

La ecuación de la recta P_3B se obtiene de 1.8,

N-1310 = - (49/105)*(E-1250)
N= -0,46667E+1.893,33333 $\Longrightarrow$ [B]

igualando [A] y [B] se tiene:

2,14286E-318,57143=-0,46667E+1.893,33333 $\Longrightarrow$ E_B= 847,629

sustituyendo E_B en [A] o en [B]: $\Longrightarrow$ N_B= 1.497,779

Ejemplo 1.6: RECTAS PARALELAS

Dadas las coordenadas de los puntos 1 y 2 representados en la figura E1-6, que definen la recta A, calcule la ecuación de la recta B que pasa por el punto 3 también conocido; siendo esta última paralela a la recta A.

Pto.	COORDENADAS	
	NORTE	ESTE
1	1280,000	265,000
2	820,000	835,000
3	775,000	532,000

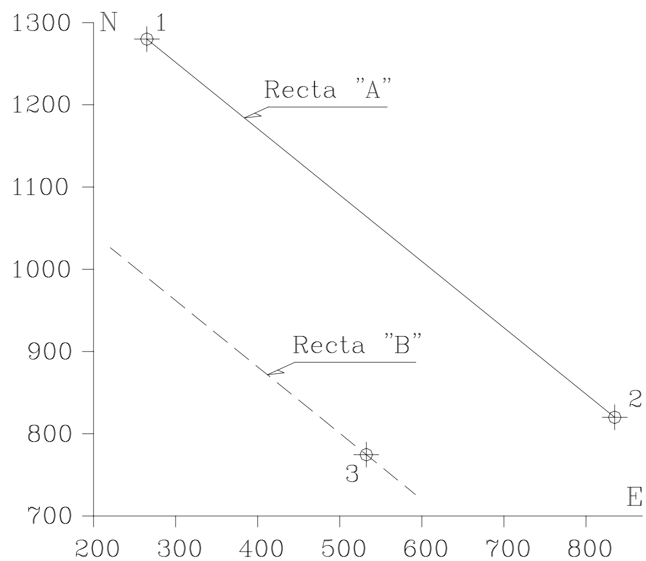


Figura E1-6

Solución

Si se analiza la ecuación general de una recta (ec. 1.6), puede observarse que el término "m" es el que define la dirección de la recta; por lo tanto, la condición indispensable y suficiente para que dos rectas sean paralelas es que tengan el mismo valor de "m".

Aplicando la ecuación 1.5, calculamos el valor de m_A correspondiente a la recta A

$$m_A = \frac{820{,}000 - 1.280{,}000}{835{,}000 - 265{,}000} = \frac{-460{,}000}{570{,}000} = -0{,}807$$

Aplicando la ecuación 1.6, conociendo que la pendiente m_B de la recta B debe ser igual a m_A y que la recta B debe pasar por el punto 3, se tiene:

$$N_B - 575{,}000 = -0{,}807(E_B - 532{,}000)$$

Ecuación de la recta B $\Longrightarrow$ $N_B = -0{,}807E_B + 1204{,}333$

1.1.5 EL CÍRCULO

La ecuación general de un círculo puede expresarse por:

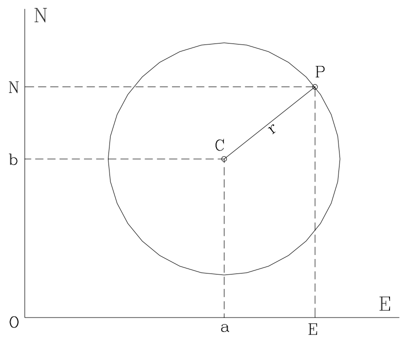


Figura 1-7 El Círculo

$$(E-a)^2+(N-b)^2=r^2 \qquad (1.9)$$

En donde,

N,E = Coordenadas rectangulares del punto P.
a,b = Coordenadas rectangulares del centro del círculo.
r = Radio del círculo.

En el caso particular en que a=0, b=0, tenemos que el centro del círculo es el origen O de coordenadas , y la ecuación 1.9 queda de la siguiente forma:

$$N^2+E^2=r^2 \qquad (1.10)$$

Ejemplo 1.7: INTERSECCION DE RECTA Y CÍRCULO.

Para los datos de la figura E1-7 , calcule las coordenadas de los puntos de intersección de la recta AB con el círculo de centro O y radio R=350,000 m.

Pto.	COORDENADAS	
	NORTE	ESTE
O	5000, 000	5000, 000
A	4373, 000	4891, 160
B	5429, 960	5498, 840

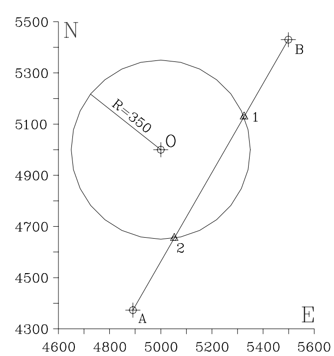


Figura E1-7

Solución

De la ecuación 1.6:

$$N-4.373{,}000=\frac{(5.429{,}960-4.373{,}000)}{(5.498{,}840-4.891{,}160)}(E-4.891{,}016)$$

$$N = 1{,}73934E - 4.134{,}37308 \quad => \quad [A]$$

de la ecuación 1.9:

$$(E - 5.000{,}000)^2 + (N - 5.000{,}000)^2 = 350{,}00^2 \; => [B]$$

sustituyendo [A] en [B],

$$(E - 5.000{,}000)^2 + \left[(1{,}73934E - 4.134{,}37308) - 5.000{,}000\right]^2 = 350{,}000^2$$

$$4{,}025E^2 - 41.775{,}497E + 108.314.271{,}600 = 0 \quad => \; [C]$$

Hallando las raíces de la ecuación [C]

$$E = \frac{41.775.497 \pm \sqrt{41.775{,}497^2 - 4 * 4{,}025 * 108.314.271{,}00}}{2 * 4{,}025}$$

E1=5.325,580 => N1=5.128,602
E2=5.052,678 => N2=4.653,934

1.1.6 CÁLCULO DE ÁREAS

El área es una medida de superficie que representa el tamaño de la misma.

En los trabajos topográficos comunes, el área se expresa en metros cuadrados (m^2), hectáreas (ha) o kilómetros cuadrados (km^2), dependiendo del tamaño de la superficie a medir. La equivalencia entre las unidades de superficie mencionadas es,

1 ha => 10.000 m^2
1 km^2 => 100 ha

El cálculo del área de una superficie se determina indirectamente, midiendo ángulos y distancias y realizando los cálculos correspondientes.

Existen distintos métodos y procedimientos para el cálculo de las áreas. En el presente capítulo estudiaremos el cálculo de áreas de figuras fundamentales, el método del cálculo de áreas de polígonos por sus coordenadas, y los métodos para superficies irregulares de los trapecios (o de Bezout), el de Simpson y el de Easa.

1.1.6.1 ÁREA DE FIGURAS ELEMENTALES

En el cálculo de áreas de superficies de poca extensión, en donde se puede realizar el levantamiento mediante el empleo de cintas métricas, la superficie se puede descomponer en figuras conocidas: como triángulos, rectángulos, u otras figuras elementales cuyas áreas se pueden calcular mediante la aplicación de fórmulas sencillas.

En la tabla T1-1 se resumen las expresiones más comunes para el cálculo de figuras elementales.

Ejemplo 1.8

En el diseño de una urbanización es necesario construir la Avenida 4 y la Calle 12. La parcela A-1, representada en la figura E1-8, originalmente colindaba por el norte con el eje de la Calle 12 y por el oeste con el eje de la Avenida 4. Las dos vías a construir son perpendiculares entre si, y se debe cumplir con los siguientes retiros:

- 8 m a partir del eje de la Avenida 4.
- 4 m a partir del eje de la Calle 12.

Se pide calcular:

a.- La nueva área de la parcela A-1, teniendo en cuenta además que su esquina noroeste debe ser redondeada con un arco de circunferencia de radio R=2.00 m.
b.- El área a expropiar de la parcela A-1 para la construcción de ambas vías.

Los demás datos se muestran en la figura E1-8.

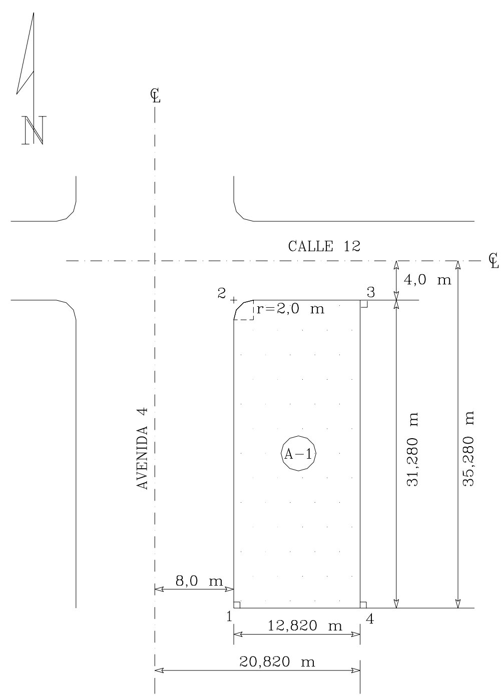


Figura E1-8

Solución.

El área original A_0 de la parcela A-1 es el área de un rectángulo

$$A_0 = 35,280*20,820 = 734,530 \text{ m}^2.$$

El área final A_f de la parcela A-1 será el área del rectángulo A_{1234} menos el área en exceso del círculo Ae.

$A_f = A_{1234} - Ae$

$A_{1234} = (20,820-8,000)*(35,280-4,000)$

$A_{1234} = 401,010 \text{ m}^2$

Ae según tabla T1-1

$$A_e = r^2\left[tan\frac{\alpha}{2} - (\frac{\pi}{360°})\alpha\right] = 0,858m^2$$

$$A_f = 401{,}010 - 0{,}858 = 400{,}152 \text{ m}^2 \qquad A_f=400{,}152 \text{ m}^2$$

El área a expropiar A_{ex} será

$$A_{ex} = A_0 - A_f$$

$$A_{ex}= 734{,}530 - 400{,}152 = 334{,}378 \text{ m}^2 \Longrightarrow A_{ex}=334{,}378 \text{ m}^2$$

1.1.6.2 ÁREA DE UN POLIGONO POR SUS COORDENADAS

La expresión general para el cálculo del área de un polígono cerrado a partir de las coordenadas de sus vértices, se puede deducir de la figura 1-8, observando que el área del polígono ABCD es:

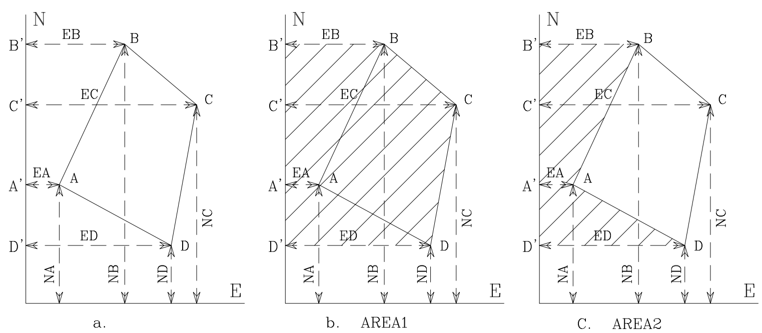


Figura 1-8 Area de un Polígono

$$Area_{ABCD}=Area\ 1-Area\ 2$$

$$Area\ 1 = Area_{B'BCC'}+Area_{C'CDD'}$$

$$Area_{B'BCC'} = \frac{1}{2}(E_B + E_C)*(N_B - N_C)$$

$$Area_{C'CDD'} = \frac{1}{2}(E_C + E_D)*(N_C - N_D)$$

$$Area_1 = \frac{1}{2}\left[(E_B + E_C)*(N_B - N_C) + (E_C + E_D)*(N_C - N_D)\right]$$

$$Area_1 = ½*[(E_B+E_C)*(N_B-N_C)+(E_C+E_D)*(N_C-N_D)] \qquad [A]$$

$$Area_2 = Area_{B'BAA'}+Area_{A'ADD'}$$

Tabla T1−1

AREA DE FIGURAS ELEMENTALES

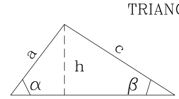
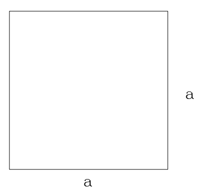
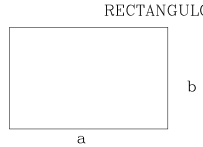
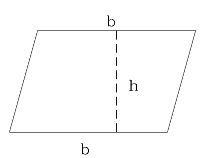
FIGURA	AREA
TRIANGULO 	A=b*h/2 A=b*a*sen /2 $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ p=Semi perímetro
CUADRADO 	A=a*a $A=a^2$
RECTANGULO 	A=a*b
PARALELOGRAMO 	A=b*h

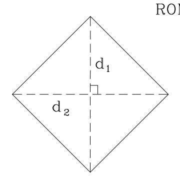
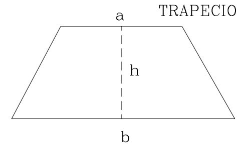
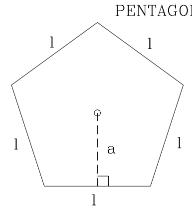
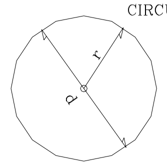
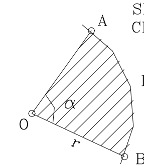
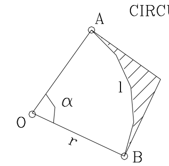
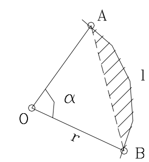
FIGURA	AREA
ROMBO 	$A=\frac{1}{2}d_1 * d_2$
TRAPECIO 	$A=\frac{1}{2}h(a+b)$
PENTAGONO 	A=a*p $p=\Sigma l$ p=Perimetro a=Apotema l=Lado Nota: Esta fórmula aplica para todos los poligonos regulares.
CIRCULO 	$A=\pi r^2$ $A=\pi \frac{d^2}{4}$ r= Radio d= Diametro

FIGURA	AREA
SECTOR DEL CIRCULO 	$A = \frac{l * r}{2}$ $A = \alpha^{a}\frac{r}{2} = \frac{\pi r^2 \alpha°}{360°}$ $A = \alpha° \frac{d}{4}$
EXCESO DEL CIRCULO 	$A= r^2[\tan\frac{\alpha}{2} - (\frac{\pi}{360°})\alpha°]$
ARCO DEL CIRCULO 	$A= r^2[(\frac{\pi}{360°})\alpha° - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha]$

$$Area_{B'BAA'} = \frac{1}{2}(E_B + E_A) * (N_B - N_A)$$

$$Area_{A'ADD'} = \frac{1}{2}(E_A + E_D) * (N_A - N_D)$$

$$Area_{\,2} = \tfrac{1}{2} * [(E_B+E_A)*(N_B-N_A)+(E_A+E_D)*(N_A-N_D)] \qquad [B]$$

restando [A]-[B]

$$Area = \tfrac{1}{2} * [(E_B+E_C)*(N_B-N_C)+(E_C+E_D)*(N_C-N_D) - (E_B+E_A)*(N_B-N_A)-(E_A+E_D)*(N_A-N_D)] \qquad [C]$$

Desarrollando [C] y agrupando términos

$$2*Area=N_A*(E_B-E_D)+N_B(E_C-E_A)+N_C(E_D-E_B)+N_D(E_A-E_C) \qquad (1.11)$$

Una regla práctica para memorizar la ecuación 1.11 es observar que en ella se cumple que *"el doble del área de un polígono cerrado es igual a la suma algebraica del producto de cada una de las coordenadas norte por la diferencia entre la coordenada este anterior y la coordenada este siguiente."*

En forma general la ecuación 1.11 se puede escribir,

$$Area = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} N_i (E_{i+1} - E_{i-1}) \qquad (1.12)$$

Donde:

Para $i = 1 \Rightarrow E_{i-1} = E_n$; *Para* $i = n \Rightarrow E_{i+1} = E_1$

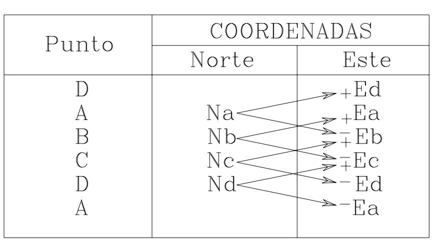
Si desarrollamos [C] y agrupamos términos en forma diferente

$$Area= \tfrac{1}{2}*[(N_AE_B-E_AN_B)+(N_BE_C-E_BN_C)+(N_CE_D-E_CN_D)+(N_DE_A-E_DN_A)] \qquad (1.13)$$

y en forma general

$$Area = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} (N_i E_{i+1} - E_i N_{i+1}) \qquad (1.14)$$

El cálculo correspondiente a la ecuación 1.12 puede organizarse en forma tabulada como se indica a continuación:



Se colocan en forma ordenada los pares de coordenadas de cada punto, luego en la posición anterior al primer punto se repite la coordenada este del último, y después del último punto, se repite la coordenada este del primero. Se unen mediante flechas cada una de las coordenadas norte con los estes anteriores y posteriores. Finalmente, la suma algebraica del producto de cada uno de los nortes por la diferencia entre los estes indicados nos dará el doble del área.

En forma análoga la ecuación 1.14

Punto	COORDENADAS	
	Norte	Este
	+	−
A	Na	Ea
B	Nb	Eb
C	Nc	Ec
D	Nd	Ed
A	Ea	Ea

Se colocan en forma ordenada los pares de coordenadas de cada uno de los puntos. Después del último punto se repiten las coordenadas del primero. Se conectan mediante líneas el norte de cada punto con el este que le sigue y en el otro sentido se conectan el este de cada punto con el norte siguiente. Luego se multiplica en cruz, tomando como positivo el producto de nortes por estes y como negativo el producto de estes por nortes. Finalmente el doble del área del polígono es la suma algebraica de los productos anteriores.

Al aplicar las expresiones anteriores, el resultado puede dar valores positivos o negativos, dependiendo del sentido en que se recorra el polígono, pero lógicamente se debe tomar siempre en valor absoluto.

Ejemplo E1-9

Calcular el área del polígono representado en la figura E1-9.

Solución

Para aplicar la ecuación 1.12 ordenamos los datos en forma tabulada:

Pto.	COORDENADAS	
	NORTE	ESTE
A	1000, 000	1000, 000
B	850, 000	1223, 000
C	986, 000	1427, 000
D	1132, 000	1454, 000
E	1187, 000	1131, 000

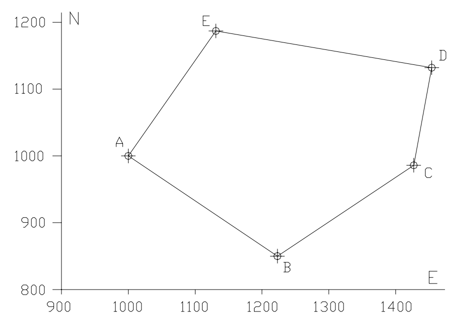


Figura E1-9

	COORDENADAS	
PUNTO	NORTE	ESTE
E		1131
A	1000	1000
B	850	1223
C	986	1427
D	1132	1454
E	1187	1131
A		1000

$$A = 1/2*[1.000(1.131-1.223)+850(1.000-1.427)+986(1.223-1.454)+$$

$$1.132(1.427-1.131)+1.187(1.454-1.000)]$$

$$A=1/2*[1.000(-92)+850(-427)+986(-231)+1.132(296)+1.187(454)]$$

$$A=1/2(-92.000-362.950-227.766+335.072+538.898)= 1/2(191.254,00)\ m^2$$

$$A=95.627\ m^2$$
$$A=9,5627\ ha.$$

Aplicando la ecuación (1.13)

	COORDENADAS	
PUNTO	NORTE	ESTE
A	1.000	1.000
B	850	1.223
C	986	1.427
D	1.132	1.454
E	1.187	1.131
A	1.000	1.000

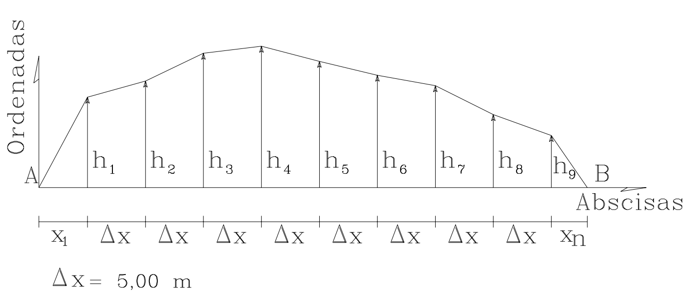
$$A=1/2*[(1.000*1.223-1.000*850)+(850*1.427-1.223*986)+$$
$$(986*1.454-1.427*1.132)+(1.132*1.131-1.454*1.187)+$$
$$(1.187*1.000-1.131*1.000)]$$

$$A=1/2*(373.000+70.702-181.720-445.606+56.000)=1/2*(-191.254)\ m^2$$

Tomando el valor absoluto

$$A=95.627\ m^2$$
$$A=9,5627\ ha.$$

1.1.6.3 ÁREA DE SUPERFICIES IRREGULARES



Δx	h_i
0,0	0,0
4,2	7,8
5,0	9,2
5,0	11,6
5,0	12,2
5,0	10,9
5,0	9,7
5,0	8,8
5,0	6,3
5,0	4,5
3,1	0,0

La figura 1-9 representa el caso común de una superficie de forma irregular. En la práctica, para el cálculo del área de dicha superficie se recurre, entre otros, al método aproximado de Los Trapecios y al Método de Simpson.

Figura 1-9

Para la aplicación de ambos métodos debemos medir primero una base, en nuestro caso AB, dividiéndola luego en intervalos iguales y finalmente medir las ordenadas y abscisas del contorno de la superficie a lo largo de la base.

MÉTODO DE LOS TRAPECIOS

El método de los trapecios, conocido también como ***Fórmula de Bezout***, asume que el contorno de la superficie esta representado por segmentos rectos que unen las ordenadas descomponiendo la figura en un número par o impar de trapecios intermedios y dos triángulos externos.

Para el cálculo del área de los trapecios

$$A_t = \Delta x\left[\frac{(h_1 + h_n)}{2} + h_2 + h_3 + h_4 \ldots\ldots + h_{n-1}\right] \tag{1.15}$$

En donde,

A_t= Area de los trapecios.
Δx= Base de los trapecios. El valor de la base es igual para todos los intervalos.
hi = Ordenada o altura de los trapecios.

El área total de la figura será el área de los trapecios más el área de los triángulos extremos.
En el caso de que los triángulos extremos tengan la misma base Δx, al sumar las áreas correspondientes, el área total de la figura será:

$$A = \Delta x \sum_{i=1}^{i=n} h_i \tag{1.16}$$

MÉTODO DE SIMPSON

Este método, ilustrado en la figura 1-10, asume que la línea que une tres ordenadas consecutivas es un polinomio de segundo grado.

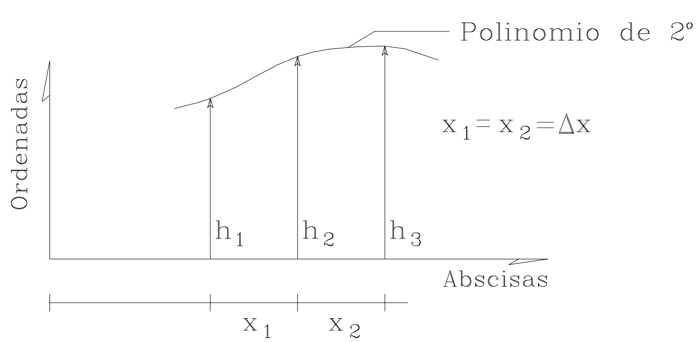


Figura 1-10 Método de Simpson

El método de Simpson generalmente se conoce como la FORMULA DEL 1/3 ***y se limita sólo al cálculo del área de una superficie dividida en un número par de intervalos iguales.***

Una generalización del método de Simpson para el caso de un número impar de intervalos o para el caso de intervalos no iguales, fue desarrollada por Easa[1] en 1.988.

La fórmula de 1/3 de Simpson se reproduce a continuación

$$A_S = \frac{\Delta x}{3}(h_1 + h_n + 2\sum h_{impares} + 4\sum h_{pares}) \tag{1.17}$$

en donde,

A_s= Area según la fórmula de Simpson.
Δx= Intervalo constante entre abscisas.
h_i = Ordenada i del polinomio.

Para el cálculo del área total se debe agregar el área de los triángulos extremos.

Ejemplo 1.10

Calcular el área de la figura 1-9 por el método de los trapecios.

Solución
Sustituyendo valores en la ecuación 1.15

$$A_t = 5*\left[\left(\frac{7,8+4,5}{2}\right)+9,2+11,6+12,2+10,9+9,7+8,8+6,3\right]$$

$At = 374,250\ m^2$.

El área de los triángulos extremos

$$A_{tr} = \frac{4,2*7,8+4,5*3,1}{2} = 23,355 m^2$$

El área total será,

A= 397,605 m^2.

[1] EASA, Said M.: (1988). *Area of Irregular Region with Uniqual Intervals*. Journal of Surveying Engineering, Vol.114. Nº2, , pp. 50-58.

Ejemplo 1.11

Calcular el área de la figura 1-9 por el método de Simpson.

Solución

Sustituyendo valores en la ecuación 1.17

$$A_s = \frac{5}{3}\left[7{,}8 + 4{,}5 + 2*(11{,}6 + 10{,}9 + 8{,}8) + 4*(9{,}2 + 12{,}2 + 9{,}7 + 6{,}3)\right]$$

As=374,167 m2.

El área de los triángulos extremos calculada en el ejemplo anterior

Atr=23,355 m2.

El área total será

A= 397,522 m2.

Nótese que existe una pequeña discrepancia en el resultado final. Esta discrepancia se debe a las diferentes consideraciones entre ambos métodos, considerándose más preciso el método de Simpson.

En la práctica, en la aplicación del método de Simpson, cuando se tiene un número impar de intervalos iguales, se determina primero el área delimitada por un número par de intervalos iguales aplicando dicho método y luego el área restante por el método de los trapecios.

En aquellos casos en que no se pueda dividir el área en intervalos iguales se recomienda utilizar la ecuación 1.18 desarrollada por Easa[1] para el caso de un número par de intervalos no iguales.

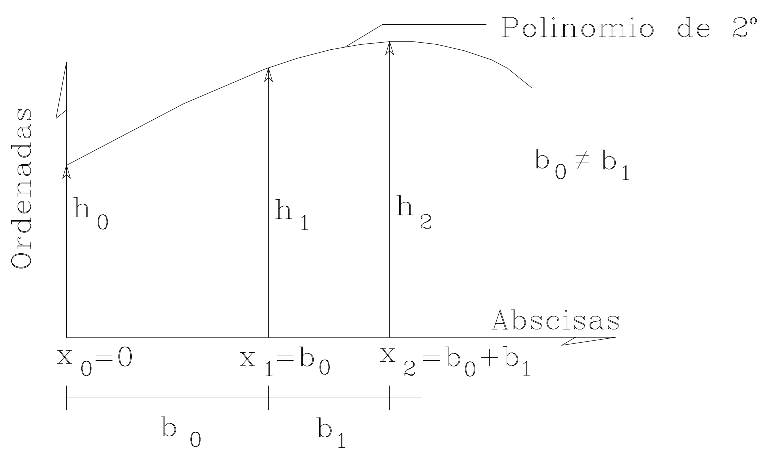


Figura 1-11. Fórmula generalizada de Simpson según Easa[1]
Número par de intervalos no iguales.

De acuerdo con las indicaciones de la figura 1-11, se tendrá :

$$A_s = \sum_{\substack{i=0 \\ i=par}}^{n-2} \frac{(b_i + b_{i+1})}{6} \left[\frac{(2b_i - b_{i+1})}{b_i} h_i + \frac{(b_i + b_{i+1})^2}{b_i b_{i+1}} h_{i+1} + \frac{(2b_{i+1} - b_i)}{b_{i+1}} h_{i+2} \right] \tag{1.18}$$

en donde:

i = Número par de intervalos.
b_i = Amplitud del intervalo i.
hi = Ordenada i.
x_i = Abscisa del punto i.

Ejemplo 1.12

Calcule el área de la figura E1-12.

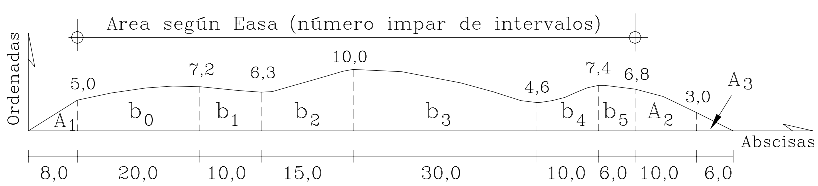


Fig.	A_1	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	A_2	A_3	
Base	8,0	20,0	10,0	15,0	30,0	10,0	6,0	10,0	6,0	
h	0,0	5,0	7,2	6,3	10,0	4,6	7,4	6,8	3,0	0,0

Figura E1-12

Solución

Para la aplicación de la fórmula generalizada de Simpson para número par de intervalos no iguales, la ecuación 1.18 se aplicará a los intervalos ($b_0 - b_5$), luego se calculará el área de los triángulos extremos (A_1 y A_3) y por último, el área del trapecio final (A_2).

El área de los trapecios internos según la ecuación 1.18,

$$A_s = \frac{(20+10)}{6}\left[\frac{(2*20-10)}{20}5 + \frac{(20+10)^2}{20*10}7,2 + \frac{(2*10-20)}{10}6,3\right] +$$
$$\frac{(15+30)}{6}\left[\frac{(2*15-30)}{15}6,3 + \frac{(15+30)^2}{15*30}10,0 + \frac{(2*30-15)}{30}4,6\right] +$$
$$\frac{(10+6)}{6}\left[\frac{(2*10-6)}{10}4,6 + \frac{(10+6)^2}{10*6}7,4 + \frac{(2*6-10)}{6}6,8\right] = 696,200m^2$$

As=696,200 m2
el área del trapecio final,

$$A_t = \frac{(6{,}8 + 3{,}0)}{2} 10 = 49{,}000 m^2$$

el área de los triángulos extremos,

$$A_{tr} = \frac{1}{2}(5 * 8 + 3 * 6) = 29{,}000 m^2$$

Finalmente el área total será

$$A_f = A_s + A_t + A_{tr} = 774{,}200 m^2 \qquad A_f = 774{,}200 m^2$$

Nótese que en el cálculo del área, el intervalo 8 se aproximó a un trapecio. Una mayor precisión se puede lograr aplicando la fórmula basada en un polinomio cuadrático desarrollada por Easa y descrita en la referencia (1).

1.1.7 VOLUMEN

Todo proyecto de ingeniería requiere la modificación del terreno original.

En el proceso de construcción de una carretera, es necesario mover grandes cantidades de tierra. En la construcción de terraplenes, por ejemplo, es necesario calcular el volumen del terraplén, y el volumen del material de corte o préstamo necesario para su construcción. En el caso de la construcción de cortes, es necesario determinar el volumen a fin de estimar el costo del acarreo del material a su destino final.

En la construcción de represas, embalses, canales, etc., se requiere el cálculo del volumen de construcción y de almacenamiento.

En la construcción de edificaciones, aparte del volumen de excavación para las fundaciones, es necesario determinar el volumen de concreto requerido para el vaciado de las estructuras, siendo estas generalmente figuras geométricas conocidas.

El volumen, definido como la medida del espacio limitado por un cuerpo, generalmente se expresa en m^3, cm^3 y mm^3, siendo el m^3 la unidad de medida empleada en proyectos de ingeniería.

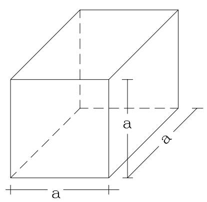
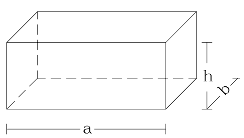
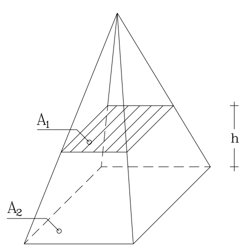
Vista la importancia del cálculo del volumen y sus diferentes aplicaciones en proyectos de ingeniería, el presente capítulo lo dedicaremos al estudio de fórmulas y procedimientos para su determinación.

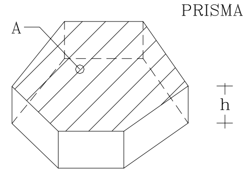
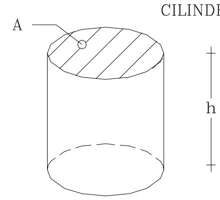
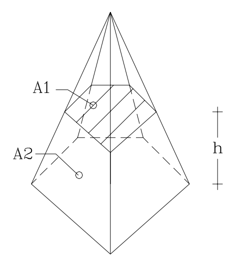
1.1.7.1 VOLUMEN DE SÓLIDOS ELEMENTALES

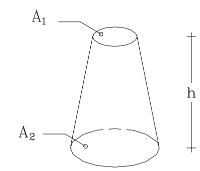
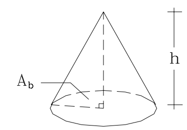
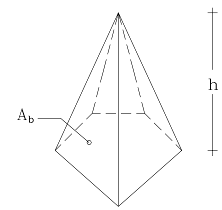
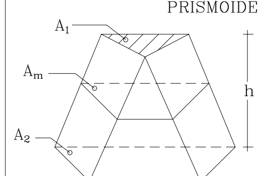
En la tabla T1-2 se resumen las expresiones más comunes empleadas en el cálculo del volumen de sólidos elementales.

Tabla T1−2

VOLUMEN DE SOLIDOS ELEMENTALES

SOLIDO	VOLUMEN
CUBO 	$V = a^3$
PARALELEPIPEDO 	$V = a * b * h$
PRISMA TRUNCADO 	$V = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 * A_2})$

SOLIDO	VOLUMEN
PRISMA 	$V = A * h$ A= Area de las caras paralelas.
CILINDRO 	$V = A * h$ A= Area de las caras paralelas.
PIRAMIDE TRUNCADA 	$V = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 * A_2})$

SOLIDO	VOLUMEN
CONO TRUNCADO 	$V = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 * A_2})$
CONO 	$V = \frac{1}{3} A_b h$ A_b= Area de la base
PIRAMIDE 	$V = \frac{1}{3} A_b h$ A_b= Area de la base
PRISMOIDE 	$V = \frac{h}{6}(A_1 + A_2 + 4A_m)$ A_1 ; A_2 =Area de las caras paralelas extremas. A_m =Area de la seccion a h/2. h =Altura del prismoide.

1.1.7.2 VOLUMEN ENTRE SECCIONES TRANSVERSALES

Generalmente, el cálculo de los volúmenes se realiza a partir de secciones transversales tomadas perpendicularmente a lo largo del eje central.

Las secciones transversales pueden ser: corte en trinchera, corte en ladera, en relleno o terraplén y a media ladera. En la figura 1-12 se representan gráficamente los diferentes tipos de secciones transversales.

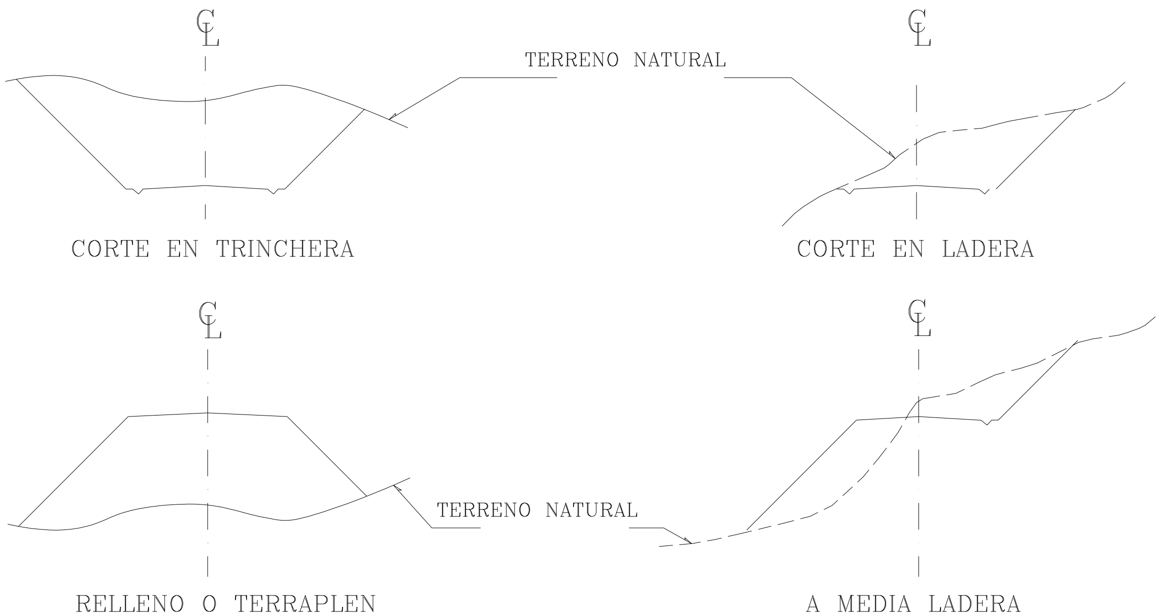


Figura 1-12. Tipos de secciones transversales

La distancia o separación entre dos secciones consecutivas depende de la topografía de la zona, recomendándose secciones a cada 40 m en terrenos llanos y a cada 20 m en terrenos de montaña. Se debe, además, trazar secciones en los puntos característicos del alineamiento, tales como los puntos donde comienzan y terminan las curvas horizontales, y en aquellos puntos donde el terreno presente quiebres significativos.

Los métodos más utilizados para el cálculo de los volúmenes correspondientes al movimiento de tierra, son el método de las áreas medias y el método del prismoide, los cuales se describen, brevemente, a continuación.

1.1.7.2.1 MÉTODO DE LAS ÁREAS MEDIAS

Diversos factores tales como las irregularidades del terreno natural, dificultad en determinar exactamente la configuración de las secciones transversales a lo largo del eje de la vía, las inevitables diferencias entre el proyecto original y las secciones terminadas, etc., justifican la utilización de la fórmula aproximada de las áreas medias.

Este método, sin duda el más empleado en nuestro medio, es el método exigido por las Normas Venezolanas[2] para la determinación de los volúmenes de corte y relleno en la construcción de carreteras.

En este método, el volumen entre dos secciones consecutivas del mismo tipo, bien sean en corte o en terraplén, (Figura 1-13), esta dado por:

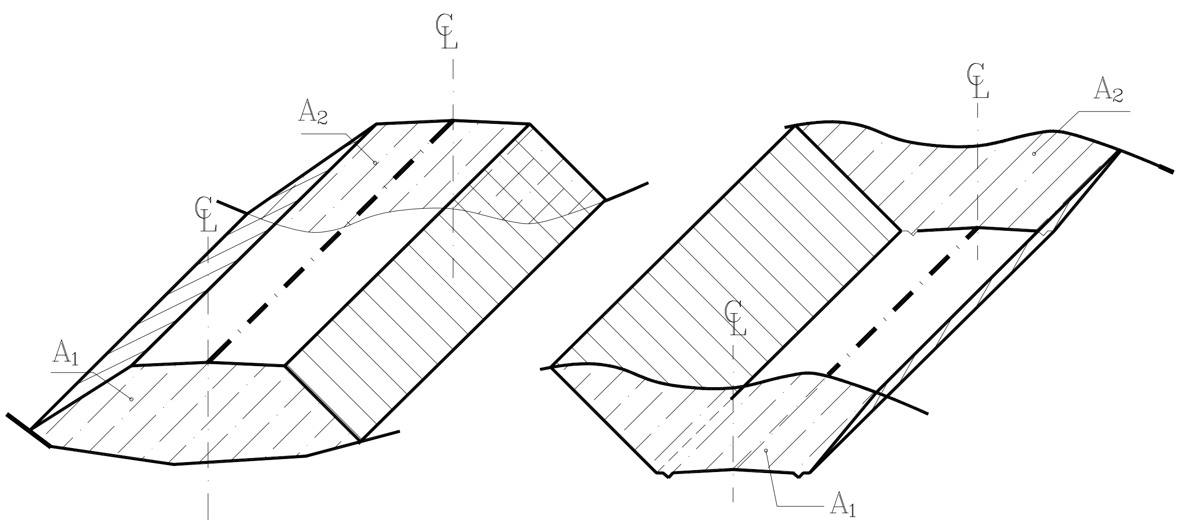


Figura 1-13. Volumen entre secciones del mismo tipo

$$V = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) * d \qquad (1.19)$$

En donde:

V = Volumen entre ambas secciones en m^3
A_1, A_2 *= Area de las secciones S1 y S2 en* m^2
d = Distancia entre secciones en m

En el caso de secciones de diferente tipo, se genera una línea de paso (Figura 1-14), a lo largo de la cual la cota del terreno coincide con la cota de la superficie de subrasante o superficie terminada del movimiento de tierra. En este caso particular, entre ambas secciones se generará un volumen de corte y un volumen de terraplén.

[2] ***Normas Venezolanas Para La Construcción De Carreteras*. (1985).** Ministerio de Transporte y Comunicaciones, Caracas.

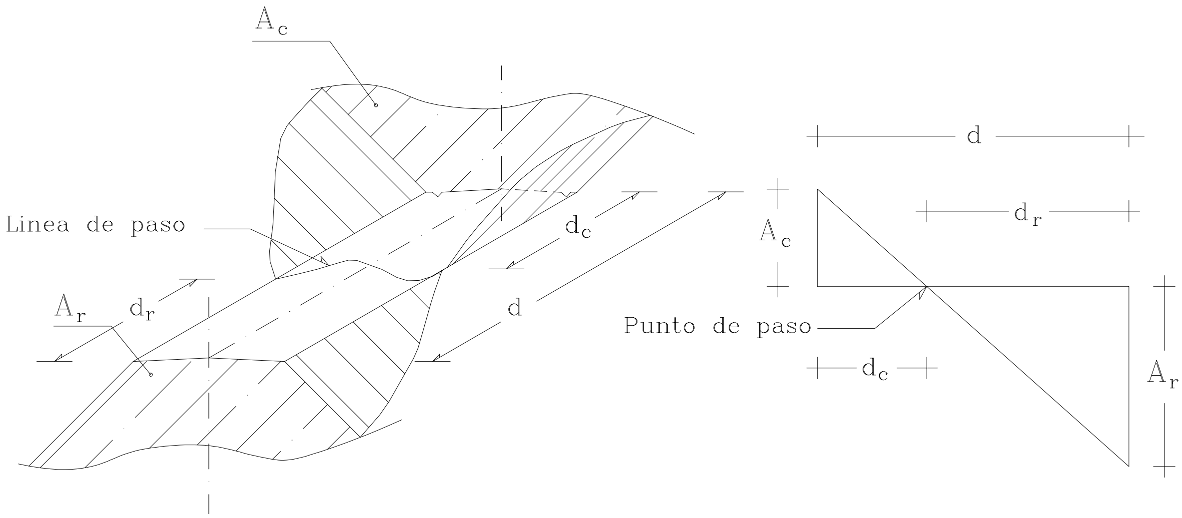


Figura 1-14. Volumen entre secciones de diferente tipo

Para fines prácticos se asume que la línea de paso es perpendicular al eje. El VOLUMEN DE CORTE entre el área de corte "Ac" y el área de la línea de paso "A_0=0" y el VOLUMEN DE TERRAPLEN entre el área de terraplén "Ar" y el área de la línea de paso "A_0=0", se calculan mediante las ecuaciones que se indican a continuación.

$$V_c = \frac{1}{2}(A_c + A_0)d_c \tag{1.20}$$

$$V_r = \frac{1}{2}(A_r + A_0)d_r \tag{1.21}$$

en donde:

Vc,Vr= Volumen de corte y de terraplén en m^3
Ac,Ar= Areas de las secciones en corte y terraplén en m^2
A_0= Area de la sección en la línea de paso, A_0=0
dc,dr= Distancias de corte y relleno en m^2

Para determinar dc y dr, representados esquemáticamente en la figura 1-14, por relación de triángulos, se tiene:

$$d_c = \frac{A_c}{A_c + A_r} * \frac{d}{2} \tag{1.22}$$

$$d_r = \frac{A_r}{A_c + A_r} * \frac{d}{2} \tag{1.23}$$

sustituyendo (1.22) y (1.23) en las ecuaciones (1.20) y (1.21), se tendrán otras expresiones para Vc y Vr :

$$V_c = \frac{A_c^2}{(A_c + A_r)} * \frac{d}{2} \qquad (1.24) \qquad\qquad V_r = \frac{A_r^2}{(A_c + A_r)} * \frac{d}{2} \qquad (1.25)$$

Ejemplo 1.13

Calcular el volumen entre las secciones transversales representadas en la figura E1-13.

Solución

Para la solución de este problema, debemos observar que la sección S3 es una sección a media ladera, por lo que su punto de paso debe ser proyectado a las secciones adyacentes. De esta manera se determina la correspondencia entre las áreas de la sección a media ladera y las áreas de las secciones adyacentes generadas por la proyección del punto de paso.

Las áreas correspondientes a cada una de las secciones transversales pueden ser calculadas por cualquiera de los métodos estudiados (figuras elementales, Por coordenadas, etc.).

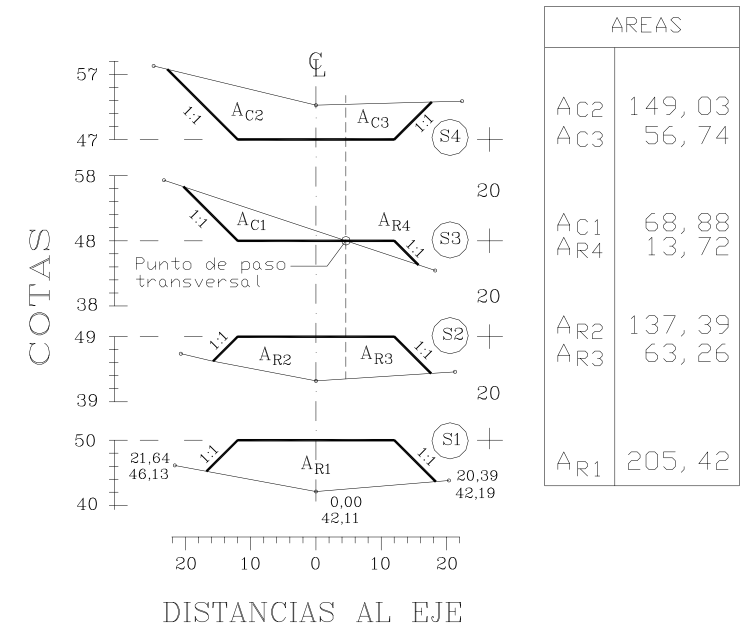


Figura E1-13

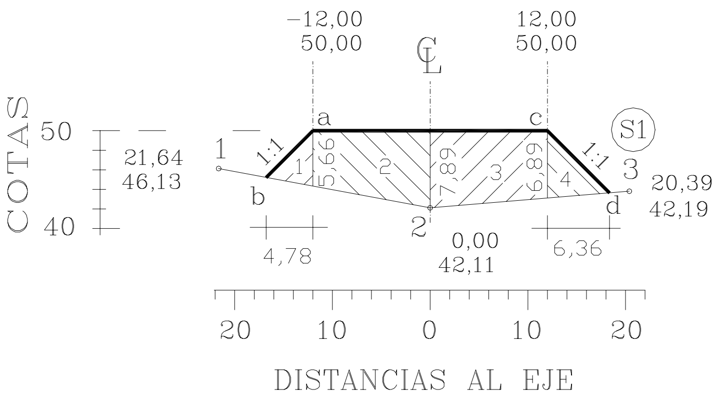
A manera ilustrativa, calcularemos el área AR_1 de la sección S1 por el método de figuras elementales y por coordenadas.

Figuras elementales

De las múltiples formas en que puede ser descompuesta A_{R1} para el cálculo del área por figuras elementales, descompondremos A_{R1} en dos triángulos y dos trapecios, tal y como se muestra en la siguiente figura.

La base y la altura de cada una de las formas puede ser determinada gráficamente midiendo directamente sobre la figura a la escala correspondiente.

Aplicando directamente las fórmulas conocidas tenemos:



$$A_1 = \frac{4,78 * 5,66}{2} = 13,53$$

$$A_2 = (5,66 + 7,89)\frac{12}{2} = 81,30$$

$$A_3 = (7,89 + 6,89)\frac{12}{2} = 88,68$$

$$A_4 = \frac{6,36 * 6,89}{2} = 21,91$$

$A_{R1} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 =$ 205,42 m^2

Por coordenadas

Para el cálculo del área de un polígono por coordenadas, es necesario determinar las coordenadas de los puntos de intersección de los taludes con el terreno (chaflanes).

Las coordenadas del punto b de la figura anterior pueden ser calculadas hallando la intersección de la recta 1-2 con la recta a-b, aplicando las ecuaciones 1.5, 1.6 y 1.7, en donde N corresponde a la cota (Z) y E corresponde a la distancia al eje (d).

Calculando la ecuación de la recta a – b tenemos,

$$Z_b - Z_1 = m_1(d_b - d_1) \;\rightarrow\; Z_b - 46,13 = m_1(d_b - 21,64)$$

$$m_1 = \frac{(Z_2 - Z_b)}{(d_2 - d_b)} \;\rightarrow\; m_1 = \frac{(42,11 - 46,13)}{(0,00 + 21,64)} \quad \therefore m_1 = -0,186$$

$Z_b + 0,186 d_b - 42,11 = 0$ [A] (ecuación de la reta 1-2)

De igual forma, calculando la ecuación de a – b tenemos;

$Z_b - 50 = m_2(d_b - 12) \;\rightarrow\; m_2 = 1$ (pendiente del talud)

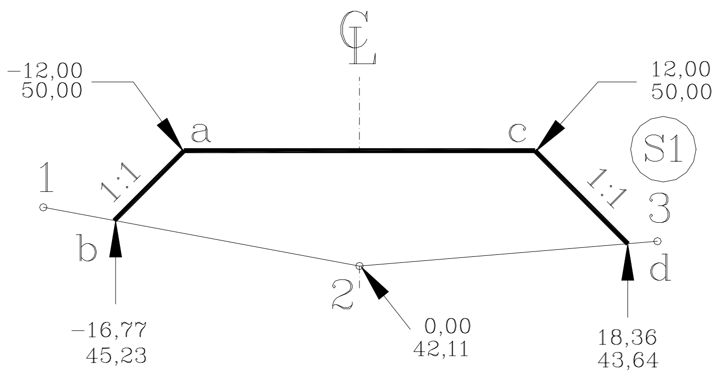
$Z_b - d_b - 62 = 0$ [B] (ecuación de la recta a- b)

Igualando [A] con [B] tenemos

$Z_b = 45,23$
$d_b = -16,77$

En forma análoga, interceptando la recta 2–3 con c–d tendremos las coordenadas del punto d.

$Z_d = 50,00$
$D_d = 12,00$



Luego, aplicando el procedimiento para el cálculo de áreas explicado en el punto 1.1.6.2. sobre la sección S1 tenemos,

PUNTO	Z	d
a	50,00	-12,00
c	50,00	12,00
d	18,36	43,64
2	0,00	42,11
b	-16,77	45,23
a	50,00	-12,00

$A = 205,42\ m^2$

Cálculo de Volúmenes

Volumen entre las secciones S1 y S2.

$$VR_{S1-S2} = \frac{1}{2}[\,AR_1 + (\,AR_2 + AR_3\,)]$$

$$VR_{S1-S2} = \frac{1}{2}[\,205,34 + (\,137,39 + 63,26\,)] * 20 = 4.059,90m^3$$

Volumen entre las secciones S2 y S3.

Siendo S3 a media ladera, se genera un *punto de paso transversal* el cual define el área correspondiente a corte y relleno en S3.

Se observa que entre S2 y S3 existe un paso de relleno a corte, por consiguiente, se genera un punto de paso en sentido longitudinal

Volumen de Relleno:

$$V_{R2-C1} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_{R2}{}^2}{A_{C1} + A_{R2}}\right) * d = \frac{1}{2}\left(\frac{137,39^2}{68,88 + 137,39}\right) * 20 = 915,11m^3$$

$$V_{R3-R4} = \left(\frac{A_{R3} + A_{R4}}{2}\right) * d = \left(\frac{63,26 + 13,72}{2}\right) * 20 = 769,80m^3$$

$VR_{S2-S3} = V_{R2-C1} + V_{R3-R4} = 1.684,91\ m^3$ (Volumen de relleno entre S2 y S3)

Volumen de Corte:

$$V_{C1-R2} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_{C1}^2}{A_{C1} + A_{R2}}\right) * d = \frac{1}{2}\left(\frac{68,88^2}{68,88 + 137,39}\right) * 20 = 230,01 m^3$$

$VC_{S2-S3} = V_{C1-R2} = 230,01\ m^3$ (Volumen de corte entre S2 y S3)

Volumen entre las secciones S3 y S4.

Volumen de Relleno:

$$V_{R4-C3} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_{R4}^2}{A_{R4} + A_{C3}}\right) * d = \frac{1}{2}\left(\frac{13,72^2}{13,72 + 56,74}\right) * 20 = 26,72 m^3$$

$VR_{S3-S4} = V_{R4-C3} = 26,72\ m^3$ (Volumen de relleno entre S3 y S4)

Volumen de Corte:

$$V_{C3-R4} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_{C3}^2}{A_{C3} + A_{R4}}\right) * d = \frac{1}{2}\left(\frac{56,74^2}{56,74 + 13,72}\right) * 20 = 456,92 m^3$$

$$V_{C1-C2} = \left(\frac{A_{C1} + A_{C2}}{2}\right) * d = \left(\frac{68,88 + 149,03}{2}\right) * 20 = 2.179,10 m^3$$

$VC_{S3-S4} = V_{C3-R4} + V_{C1-C2} = 2.636,02\ m^3$ (Volumen de corte entre S3 y S4)

VOLUMEN TOTAL DE RELLENO

$VR = VR_{S1-S2} + VR_{S2-S3} + VR_{S3-S4} = 5.171,53\ m^3$

VOLUMEN TOTAL DE CORTE

$VC = VC_{S2-S3} + VC_{S3-S4} = 2.866,03\ m^3$

Ordenando los datos en forma tabulada, se tendrá :

CÁLCULO DEL VOLUMEN

		AREA (m^2)		VOLUMEN (m^3)	
SECCION	DISTANCIA	A_R	A_C	V_R	V_C
S1		205,34	----		
	20,00			4.059,90	----
S2		137,39+63,26	----		
	20,00			1.684,91	230,01
S3		13,72	68,88		
	20,00			26,72	2.636,02
S4		----	149,03+56,74		
			∑	5.171,53	2.866,03

1.1.7.2.2 MÉTODO DEL PRISMOIDE

El método de las áreas medias tiene la ventaja de ser un método fácil de entender y de implementar, pero tiene la desventaja de que sus resultados no son exactos ya que asume que el área transversal varia linealmente con la longitud.

En algunos casos particulares se requiere el cálculo del volumen con una mayor precisión, por lo que se recurre al método del prismoide.

Un prismoide es un sólido cuyos lados extremos son paralelos y sus superficies laterales son planas o alabeadas.

Un ejemplo común de prismoide utilizado en el movimiento de tierra se muestra en la figura 1-15.

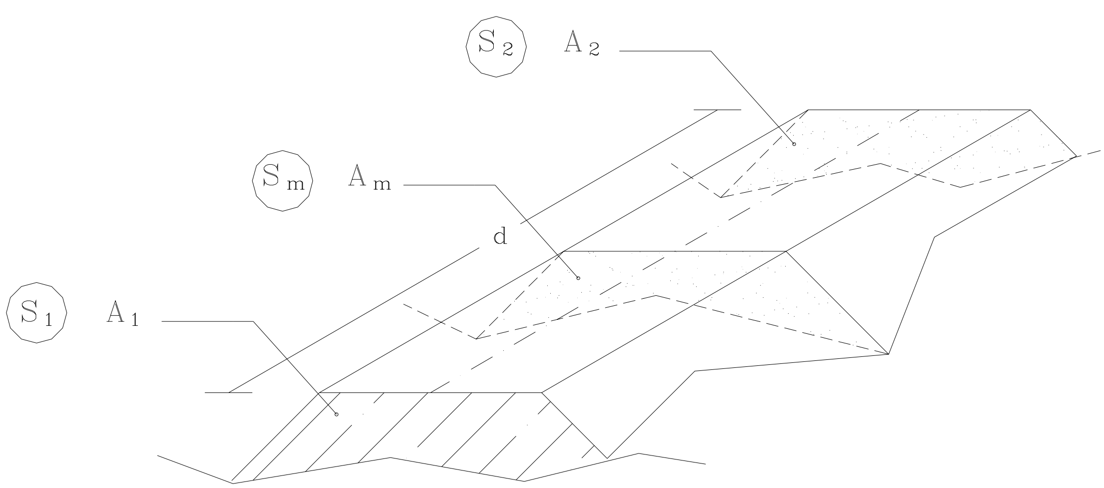


Figura 1-15. Prismoide de secciones transversales.

A continuación se reproduce la fórmula del prismoide triangular. Para una descripción detallada de la derivación de la fórmula se puede consultar Andueza[3],Carciente[4].

$$V = \frac{d}{6} * \left(A_1 + A_2 + 4 A_m \right) \tag{1.26}$$

en donde,

A_1,A_2= Area de S1 y S2 en m^2

Am= Area de la sección transversal en el punto medio entre S1 y S2 en m^2

d= Distancia entre S1 y S2 en m

Nótese que la formula 1.19 del volumen por el método de las áreas medias puede considerarse un caso particular de la 1.26.

En efecto, en la fórmula del prismoide si las generatrices son paralelas a un plano director, el AREA MEDIA (Am) es igual a la MEDIA (Ma) de las áreas extremas (A1 y A2); en fórmulas:

$Am = Ma$, siendo

$$Ma = \frac{A_1 + A_2}{2} \tag{1.27}$$

Sustituyendo (1.27) en (1.26), y desarrollando, se tendrá:

$$VMa = \frac{d}{6}\left(A_1 + A_2 + 4Am\right)$$

$$VMa = \frac{d}{6}\left(A_1 + A_2 + 4\frac{A_1 + A_2}{2}\right)$$

$$VMa = \frac{d}{6}\left(3A_1 + 3A_2\right)$$

$$VMa = \frac{d}{2}\left(A_1 + A_2\right)$$

la cual, como puede observarse es la fórmula 1.19.

La utilización de la 1.19 en lugar de la 1.26 introduce, en el cálculo del volumen, un error E, dado por:

[3] Andueza P. (1994). *El Diseño Geométrico de Carreteras.* Mérida, Venezuela. Universidad de los Andes. pp 529-534.

[4] Carciente J. (1980). *Carreteras, Estudio y Proyecto*.(2[da]Ed.). Caracas, Venezuela. Ediciones Vega pp..151-153.

$$E = VMa - V_{prismoide} = \frac{d}{12}(b_1 - b_2)(h_1 - h_2) \tag{1.28}$$

que permite calcular el volumen del prismoide a partir del volumen de las áreas medias, de donde:

$$V_{prism} = VMa - E \tag{1.29}$$

En la ecuación 1.28, b_i y h_i son los valores correspondientes a la base y altura del área Ai de las secciones extremas supuestas triangulares.

Ejemplo 1.14

La figura E1-14 representa un muro de concreto de sección variable.
Se desea calcular:

a.- Volumen de concreto por el método de las áreas medias.
b.- Volumen de concreto por el método del prismoide.

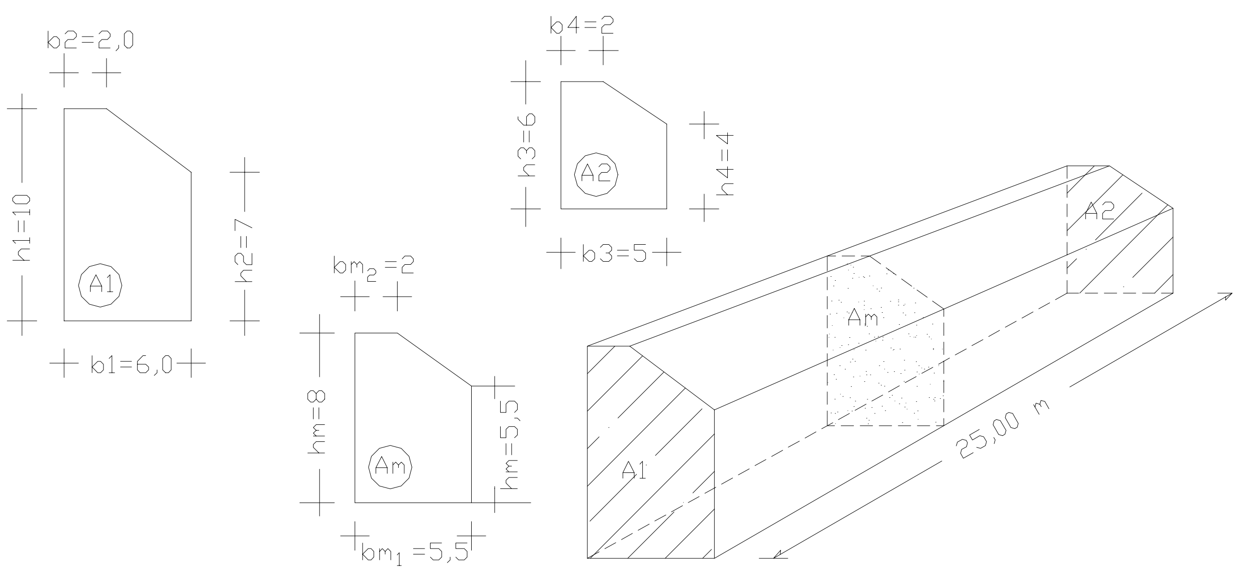


Figura E1-14

Solución

a.- Volumen por la formula de las áreas medias.
Area de las secciones extremas.
$A_1=h_1*b_1-1/2(b_1-b_2)(h_1-h_2)=10*6-1/2*(6-2)(10-7)= 54,000 \text{ m}^2$

$A_2=h_3*b_3-1/2(b_3-b_4)(h_3-h_4)= 6*5-1/2*(5-2)(6-4)= 27,000\ m^2$

Volumen

$V=1/2*(54,00+27,00)*25,00=1012,500\ m^3$ $V=1012,500\ m^3$

b.- Volumen por la fórmula del Prismoide

Para aplicar la fórmula del Prismoide se requiere calcular el área de la sección media Am. Am no es el promedio de las áreas, pero sus dimensiones serán el promedio de las dimensiones de las secciones extremas.

$h_{m1}= (10+6)/2=8,00\ m$ $b_{m1}=(6+5)/2=5,50\ m$

$h_{m2}= (\ 7+4)/2=5,50\ m$ $b_{m2}=(2+2)/2=2,00\ m$

$Am=h_{m1}b_{m1}-1/2*(b_{m1}-b_{bm2})(h_{m1}-h_{m2})$

$Am=8,00*5,50-1/2*(5,50-2,00)(8,00-5,50)=39,625\ m^2$. $Am= 39,625\ m^2$

Volumen

$V=25/6\ *(54,000+27,000+4*39,625)=997,917\ m^3$

$V = 997,917\ m^3$

Nótese que el volumen calculado por la fórmula de las áreas medias es mayor que el calculado por la fórmula del prismoide.

Esta diferencia puede o no ser significativa, dependiendo del valor del material con el que se esta trabajando.

Es importante resaltar que ambos métodos han sido desarrollados suponiendo que las secciones transversales son paralelas; sin embargo, en alineamientos de carreteras, ferrocarriles, canales e incluso en el caso de construcción de represas, vigas y obras civiles en general, los alineamientos presentan tramos curvos, y siendo que las secciones son perpendiculares al eje, éstas no son paralelas entre sí. Esta situación origina el llamado error de curvatura que, para efectos prácticos, en construcciones viales se puede despreciar, pero en algunas situaciones particulares amerita el cálculo de la corrección por curvatura descrita por diferentes autores[5,6].

[5] Andueza. Op. Cit. , pp. 534-539
[6] Carciente. Op. Cit. , pp. 154-157

1.2 ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

La trigonometría es una de las ramas de las matemáticas utilizada en topografía para relacionar lados y ángulos de un triángulo. Por consiguiente, por ser la trigonometría fundamental para el entendimiento y aplicación de la topografía, se considera necesario incluir un breve resumen de los conceptos trigonométricos fundamentales.

1.2.1. ÁNGULOS

Un ángulo es la abertura o cantidad de rotación que sobre un plano marcan dos semi rectas con un origen común llamado vértice.

Topográficamente, los ángulos se miden sobre el plano horizontal y sobre el plano vertical. Los ángulos que se miden sobre el plano horizontal se llaman ángulos horizontales y los que se miden sobre el plano vertical se llaman ángulos verticales.

En topografía, se admite que un ángulo medido sobre un plano horizontal es positivo cuando gira en sentido horario.

Los ángulos horizontales se clasifican en RUMBOS (α), ACIMUTES (φ) Y ANGULOS DE DEFLEXION (Δ), (figura 1-16).

Los conceptos de rumbo y acimut fueron definidos en la sección 1.1.2.

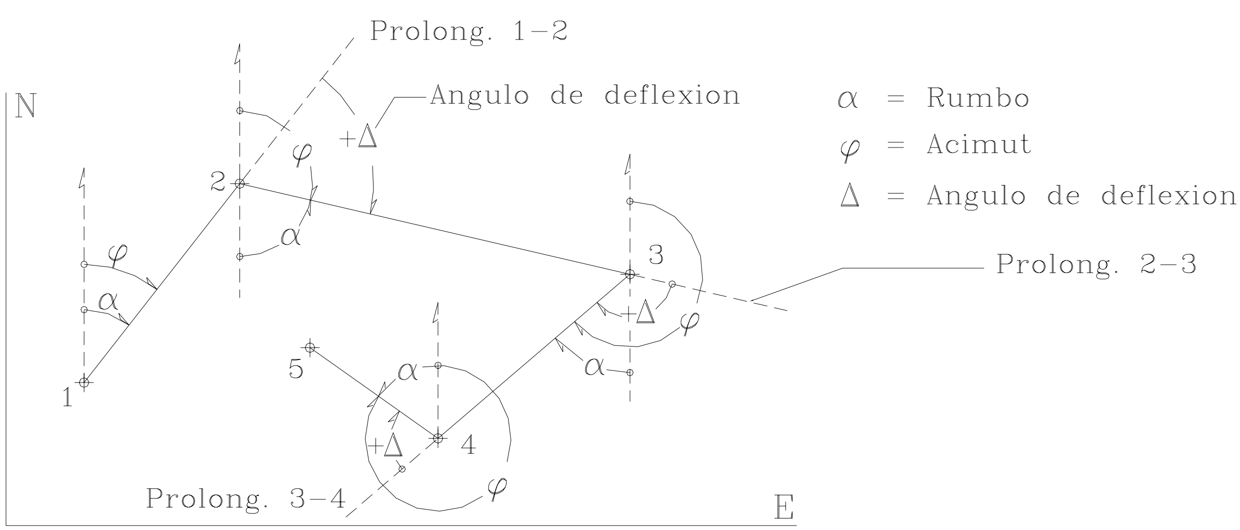


Figura 1-16. Tipos de ángulos horizontales

El ángulo de deflexión es el ángulo al vértice que una alineación dada forma con la prolongación de la alineación que le precede . Si para pasar de la prolongación de la alineación precedente a la alineación dada se gira en sentido horario, el ángulo de deflexión será positivo (figura 1-16).

Los ángulos verticales se clasifican en CENITALES (θ), NADIRALES (θ') y ANGULOS DE ALTURA (α), (Figura 1-17).

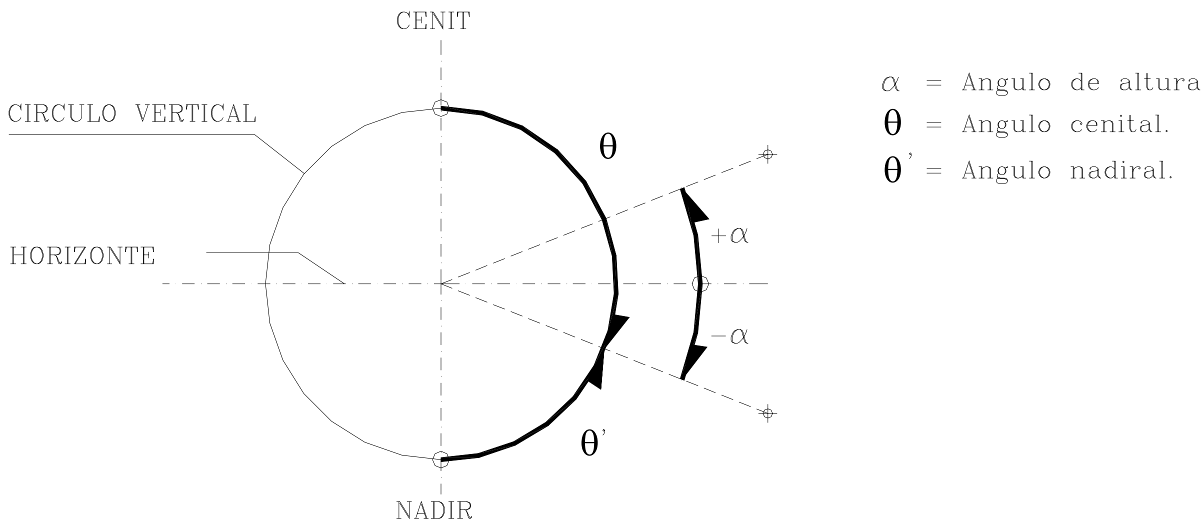


Figura 1-17. Tipos de ángulos verticales

1.2.2 SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

La medida de un ángulo se realiza comparándolo con un ángulo patrón que se toma como unidad de medida.

Comúnmente, los sistemas de medidas de ángulos empleados son el sistema sexagesimal, sexadecimal, centesimal y analítico.

1.2.2.1 SISTEMA SEXAGESIMAL

Este sistema divide la circunferencia en 360 partes iguales ó grados sexagesimales (º); a su vez, cada grado esta dividido en 60 partes iguales ó minutos sexagesimales (') y cada minuto se divide en 60 partes iguales ó segundos sexagesimales (").

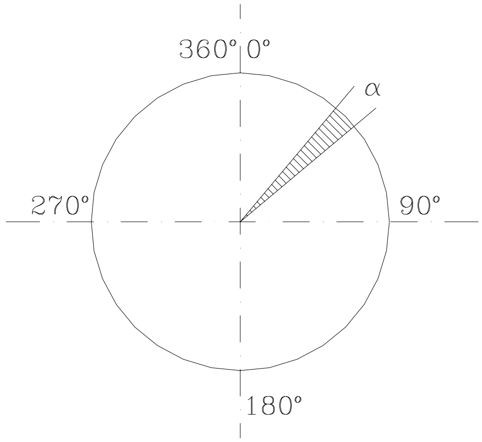


Figura 1-18. Sistema sexagesimal

1º = 60'
1' = 60"
1º = 3600"

el ángulo α°=10º20'36" se lee:

10 grados, 20 minutos, 36 segundos.

1.2.2.2. SISTEMA SEXADECIMAL

Este sistema deriva del sistema sexagesimal, siendo su única diferencia que los minutos y segundos se expresan como décimas de grados.

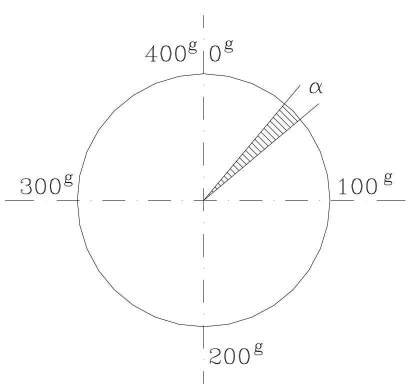
El ángulo 10°20'36", en este sistema es: 10°,34333333

Este sistema es de uso frecuente ya que la mayoría de las máquinas calculadoras requieren en sus operaciones que los ángulos sean convertidos al sistema sexadecimal.

1.2.2.3 SISTEMA CENTESIMAL

En el sistema centesimal, la circunferencia está dividida en 400 partes iguales o grados centesimales (^{g}); cada grado centesimal se divide en 100 partes o minutos centesimales (^{c}) y cada minuto en 100 partes o segundos centesimales (^{cc}).

Siendo un minuto la centésima parte del grado y un segundo la centésima parte del minuto, el ángulo α se puede escribir directamente en las dos formas que se indican:



$\alpha = 25^g,4533$

$1^g = 100^c$

$1^c = 100^{cc}$

$1^g = 10000^{cc}$

el ángulo $\alpha = 25^g 45^c 33^{cc}$ se lee:

25 grados, 45 minutos, 33 segundos.

Figura1-19. Sistema Centesimal

1.2.2.4 SISTEMA ANALÍTICO

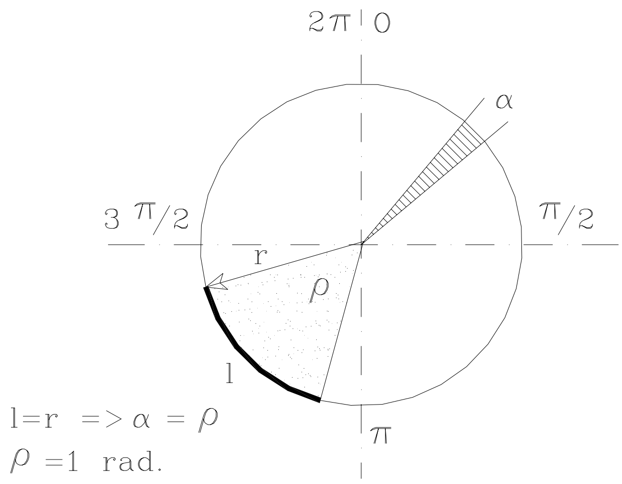


Figura 1-20. Sistema analítico

En este sistema la unidad de medida es el radian, el cual se define como el ángulo al centro que forma un arco l cuya longitud es igual al radio.

Siendo la longitud de la circunferencia $2\pi r$, por la definición dada, en una circunferencia caben $(2\pi)l$ o 2π(radianes) siendo π un número constante que vale π=3,141592654....

De la figura 1-20, cuando

l=r => ρ=1rad.

Por relación entre lados y radio

$\alpha:l=\rho:r \quad \Rightarrow \quad \alpha^a = \rho(l/r)$ (1.30)

1.2.2.5 RELACIONES ENTRE LOS DIFERENTES SISTEMAS

Las relaciones existentes entre los diferentes sistemas angulares se obtienen de las definiciones dadas anteriormente:

$$\frac{\alpha^{o}}{360}=\frac{\alpha^{g}}{400}=\frac{\alpha^{A}}{2\pi} \tag{1.31}$$

EJEMPLO 1.15

Convertir al sistema centesimal y al sistema analítico el ángulo α=32º25'56".

Solución

Para poder aplicar la ecuación 1.31, α^{o} debe estar en el sistema sexadecimal.

El proceso de conversión del ángulo α al sistema sexadecimal se realiza de la siguiente manera:

1.- Pasamos los segundos a minutos, dividiendo entre 60 y lo sumamos a los minutos enteros.

(56/60)+25'= 25',933333

2.- Pasamos los minutos a grados dividiendo entre 60 y los sumamos a los grados.

(25,933333/60)+32=32º,432222

El ángulo α en el sistema sexadecimal será:

$$\alpha=32^{o},432222$$

Para convertir α al sistema centesimal, relacionamos las dos primeras igualdades de la ecuación 1.31,

$$\frac{\alpha^{o}}{360}=\frac{\alpha^{g}}{400}\Rightarrow\alpha^{g}=\frac{400}{360}\alpha^{o}$$

y α en centesimal será,

$$\alpha^{g}=\frac{400^{g}}{360^{o}}32^{o},432222\Rightarrow\alpha^{g}=36^{g}.0358$$

Para convertir α al sistema analítico relacionamos la primera y tercera igualdades de la ecuación 1.31,

$$\frac{\alpha^{o}}{360}=\frac{\alpha^{A}}{2\pi}\Rightarrow\alpha^{A}=\frac{2\pi}{360}\alpha^{o}\Rightarrow\alpha^{A}=0{,}566049 rad$$

α^{A}=0,566049 rad

EJEMPLO 1.16

Convertir al sistema centesimal y al sexagesimal un ángulo α=0,483654 rad.

Solución

La conversión del sistema analítico al sistema sexagesimal se efectúa relacionando el primer y tercer término de la ecuación 1.31:

$$\frac{\alpha^{o}}{360}=\frac{\alpha^{A}}{2\pi}\Rightarrow\alpha^{o}=\frac{360}{2\pi}\alpha^{A}\Rightarrow\alpha^{o}=27^{o},711333$$

Nótese que α está expresado en el sistema sexadecimal. El procedimiento para convertirlo al sistema sexagesimal es como sigue:

1.- Se transforma la parte decimal del ángulo a minutos, multiplicando por 60.

0,711333*60=42',679976

2.- Se transforma la parte decimal de los minutos a segundos multiplicando por 60.

0,679976*60=40",79856 => 41"

luego α en sexagesimal será,

α=27º42'41"

Nota: En el presente texto, salvo que se indique lo contrario, las décimas de segundos se redondearan al entero mas cercano.

La conversión de α al sistema centesimal se efectúa relacionando el segundo y tercer término de la ecuación 1.29.

$$\frac{\alpha^g}{400} = \frac{\alpha^A}{2\pi} \Rightarrow \alpha^c = \frac{400}{2\pi}\alpha^A \Rightarrow \alpha^g = 30^g,711333 \Rightarrow \alpha^g = 30^g,7113$$

luego α en centesimal será,

$$\alpha^g = 30^g 71^c 13^{cc}$$

1.2.3 RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

1.2.3.1 TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En la tabla T1-3 se resumen las relaciones trigonométricas fundamentales del triángulo rectángulo (figura 1-21)

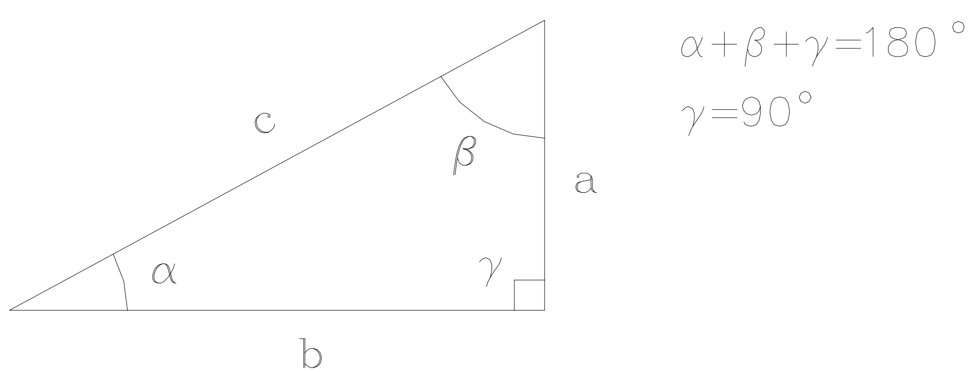


Figura 1-21. Triángulo rectángulo

Tabla T1−3
RELACIONES TRIGONOMETRICAS FUNDAMENTALES

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta \qquad \text{sen}\,\alpha = 1/\text{cosec}\,\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \text{sen}\,\beta \qquad \cos\alpha = 1/\sec\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \text{cotg}\,\beta \qquad \tan\alpha = 1/\text{cotg}\,\alpha$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \tan\beta \qquad \tan\alpha = \text{sen}\,\alpha/\cos\alpha$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \text{cosec}\,\beta \qquad \text{cosec}\,\alpha = \frac{c}{a} = \sec\beta$$

$$\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

$$\tan2\alpha = 2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$$

$$\text{sen}(\alpha/2) = \sqrt{(1-\cos\alpha)/2}$$

$$\cos(\alpha/2) = \sqrt{(1+\cos\alpha)/2}$$

$$\tan(\alpha/2) = (1-\cos\alpha)/\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha/(1+\cos\alpha) = \sqrt{(1-\cos\alpha)/(1+\cos\alpha)}$$

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta \pm \text{sen}\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = (\tan\alpha \pm \tan\beta)/(1 \mp \tan\alpha\tan\beta)$$

$$\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta = 2\text{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\text{sen}\alpha - \text{sen}\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\text{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\text{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\text{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\text{sen}(90-\alpha) = \cos\alpha \qquad \text{cotg}(90-\alpha) = \tan\alpha$$

$$\cos(90-\alpha) = \text{sen}\,\alpha \qquad \sec(90-\alpha) = \csc\alpha$$

$$\tan(90-\alpha) = \text{cotg}\,\alpha \qquad \csc(90-\alpha) = \sec\alpha$$

$$\text{sen}(180\pm\alpha) = \mp\,\text{sen}\,\alpha \qquad \text{cotg}(180\pm\alpha) = \pm\,\text{cotg}\,\alpha$$

$$\cos(180\pm\alpha) = = \cos\alpha \qquad \sec(180\pm\alpha) = = \sec\alpha$$

$$\tan(180\pm\alpha) = \pm\tan\alpha \qquad \csc(180\pm\alpha) = \mp\csc\alpha$$

1.2.3.2 TRIÁNGULO OBLICUO

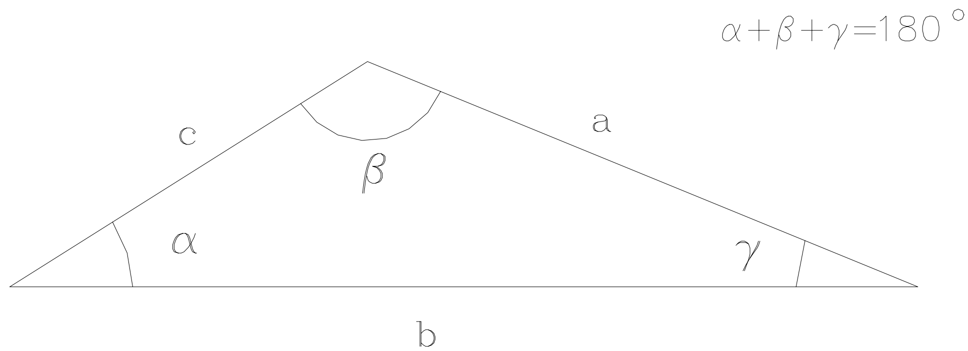


Figura 1-22. Triángulo oblicuo

LEY DEL SENO

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \tag{1.32}$$

LEY DEL COSENO

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \tag{1.33}$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta \tag{1.34}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma \tag{1.35}$$

EJEMPLO 1.17

Con los datos de la figura E1-17 calcular la altura H del edificio representado:

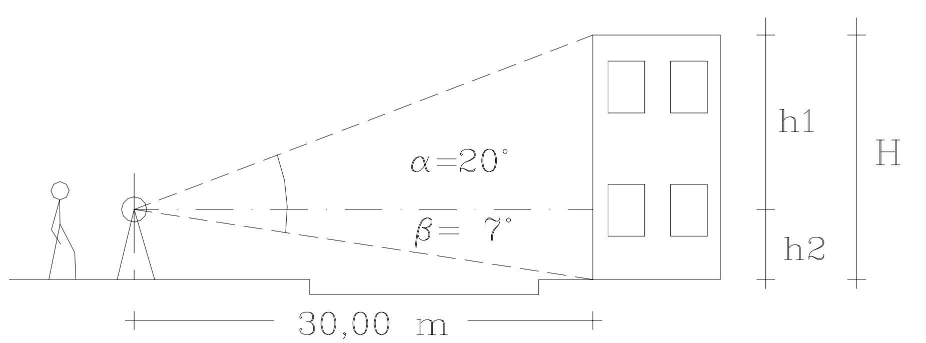


Figura E1-17

Solución

$H=h1+h2$

$\tan\alpha=h_1/30 \Rightarrow h_1=30\tan 20º \Rightarrow h_1=10{,}919$ m

$\tan\beta=h_2/30 \Rightarrow h_2=30\tan 7º \Rightarrow h2= 3{,}684$ m

la altura H del edificio, será:

$H=h_1+h_2=14{,}603$ m $\qquad$ $H=14{,}603$ m

EJEMPLO 1.18

El alineamiento AB representa el eje de un puente en construcción. El punto A ha sido materializado en el terreno por medio de una cabilla. Se sabe que el punto B debe estar ubicado exactamente a 35,00 m del punto A; pero, debido a que un obstáculo impide medir directamente esta distancia, se ha escogido un punto auxiliar C a 48,325 m de A y se ha medido el ángulo α=95º27'32".

Calcular el ángulo γ requerido para ubicar B a partir de C.

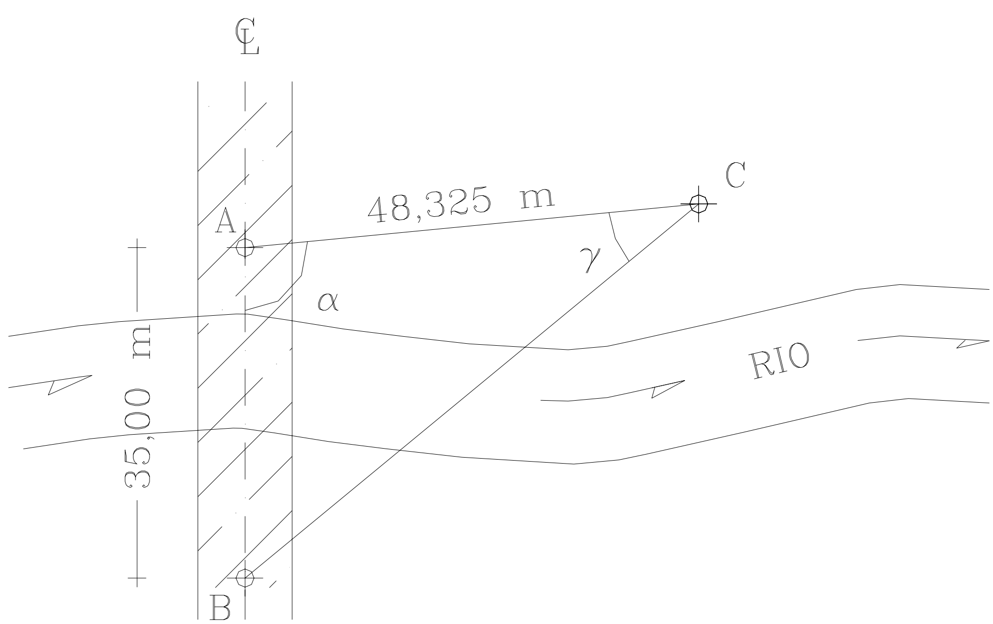


Figura E1-18

Solución

La solución del problema exige calcular primero el lado BC para luego poder calcular el ángulo γ.

Por la ley del coseno:

$$BC^2=AC^2+AB^2-2AC*AB*Cos\alpha$$

BC^2=48,3252+35,0002-2*48,325*35,000*Cos(95º27'32")

BC^2=3882,112 m^2 => BC=62,307 m

Por la ley del seno:

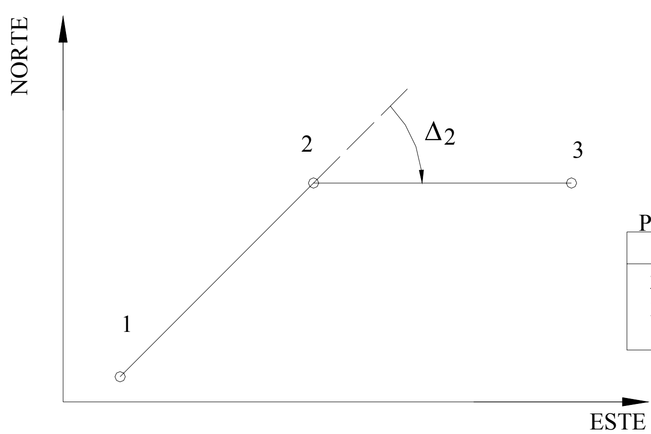
BC/senα=AB/senγ => senγ=(AB/BC)senα

senγ=(35,000/62,307)*sen(95º27'32")=0,559187

γ=arcsen(0,559187)=33º,999593 => γ=33º59'59"

Problemas Propuestos

1.1 Dadas las coordenadas de los puntos 1,2 y 3 de la figura P.1.1, calcule las distancias, rumbos y acimutes de las alineaciones 1-2 y 2-3 y el ángulo Δ_2 en el vértice 2.



Pto.	COORDENADAS NORTE	ESTE
1	1.200,00	5.300,00
2	1.800,00	5.900,00
3	1.800,00	6.700,00

Figura P.1.1

1.2. Con los datos de la figura P.1.2 calcule:

- Coordenadas de los puntos 2, 3 y 5.
- Coordenadas del punto A ubicado en la intersección de la perpendicular de la recta 2-A con la alineación 1-4.
- Coordenadas de un punto B ubicado en la intersección de la recta 2-B (paralela a 3-4) con la alineación 1-4.

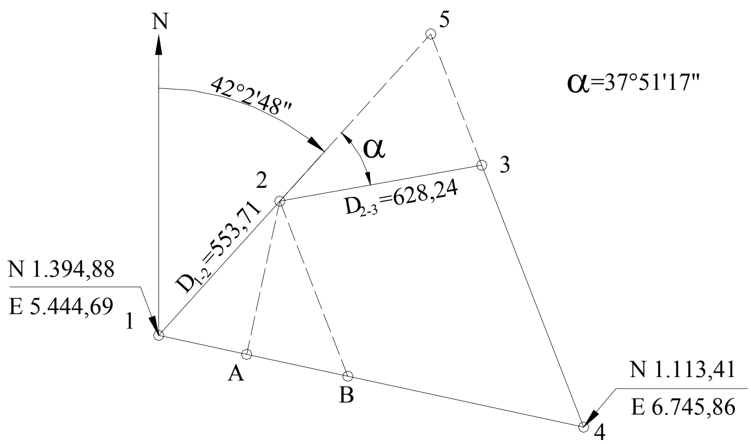


Figura P.1.2

1.3. Con los datos de la figura P.1.3 calcule las coordenadas del punto de intersección I de la curva C1 con la recta AB.

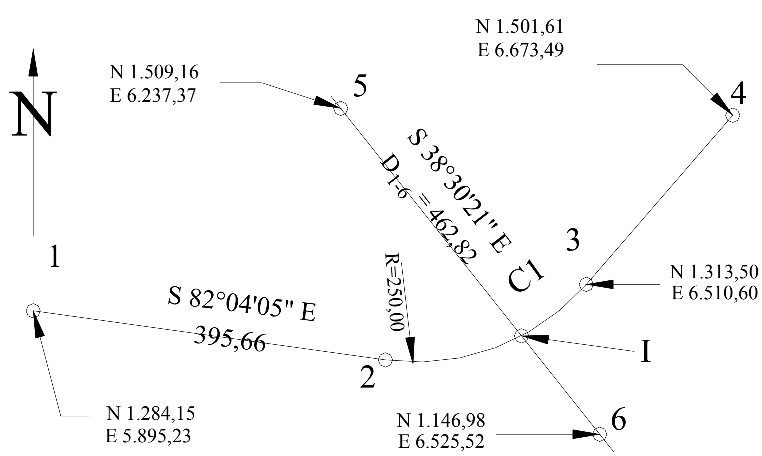
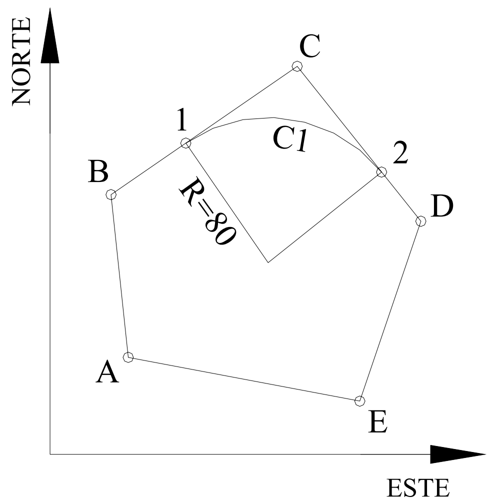


Figura P.1.3

1.4. Con los datos de la figura P.1.4 calcule, el área del polígono A,B,C,D,E por el método de Gauss y por figuras elementales.



Pto.	COORDENADAS NORTE	ESTE
A	4.650,84	2.544,84
B	4.740,46	2.535,35
C	4.811,12	2.637,97
D	4.725,81	2.706,09
E	4.626,71	2.672,46

Figura P.1.4

1.5. Calcule el área del polígono A,B,1,C1,2,D,C de la figura P.1.4.

1.6. Calcule el área de la figura P.1.6 . Utilice la fórmula de los trapecios y la fórmula del 1/3 de Simpson.

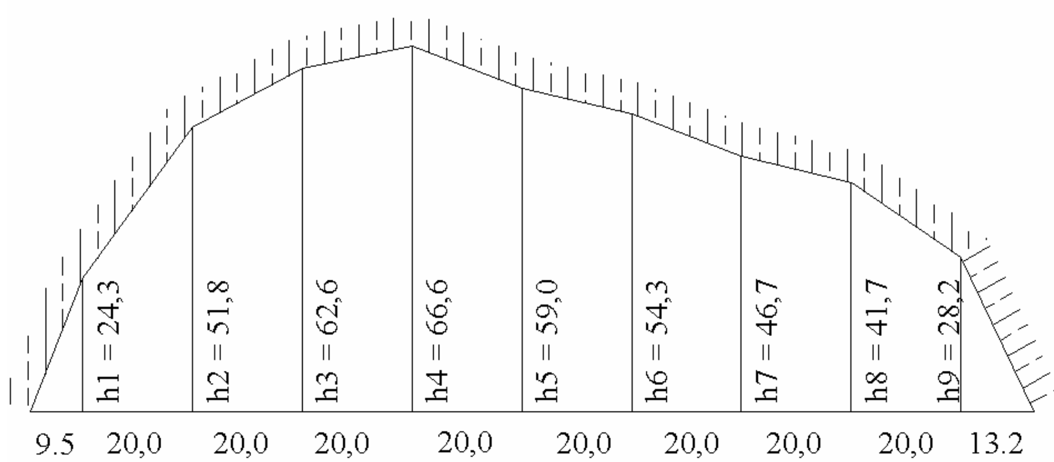


Figura P.1.6

1.7. Calcular los volúmenes entre las secciones transversales representadas en la figura P.1.7.

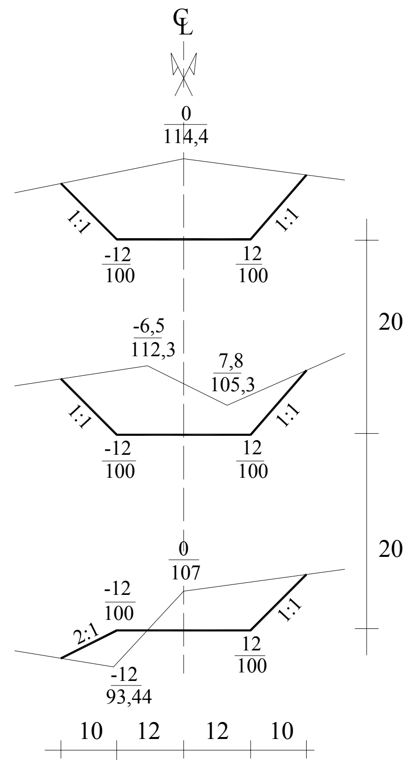


Figura P.1.7

1.8. Convertir a los sistemas indicados los ángulos dados en la siguiente tabla.

SEXAGESIMAL	SEXADECIMAL	CENTESIMAL	ANALITICO
25º32’217”			
	102º,375		
		$100^{G}\ 25^{C}\ 72^{CC}$	
			2.0508 rad

1.9. Por una obstrucción en la visual, es imposible medir directamente la distancia A-B, lo que hizo necesario ubicar un punto C y medir las distancia A-C y C-B y el ángulo en C (figura P.1.9).
Calcule la distancia B-A.

1.10. Calcule, con los datos de la figura P.1.10, la distancia A-B.

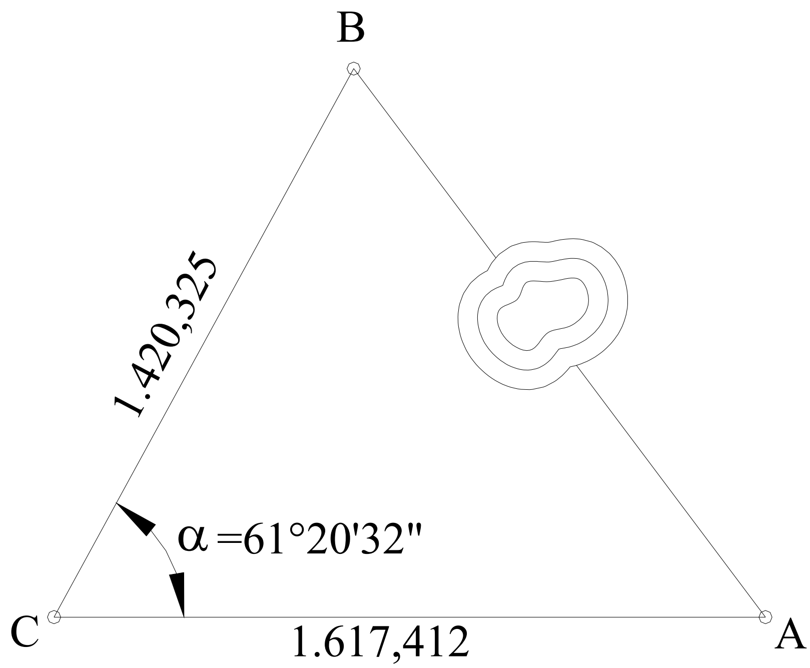


Figura p.1.9

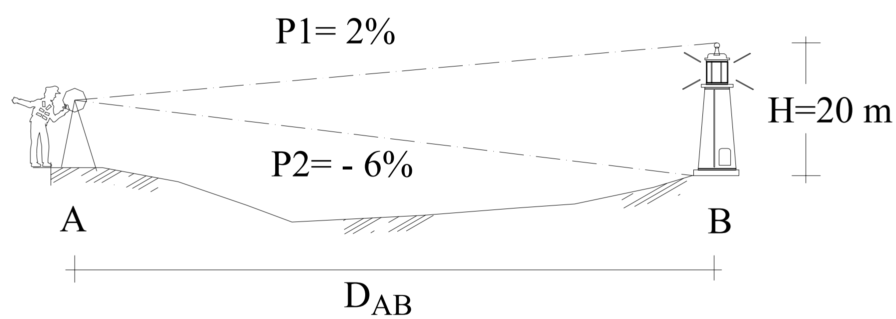


Figura P.1.10