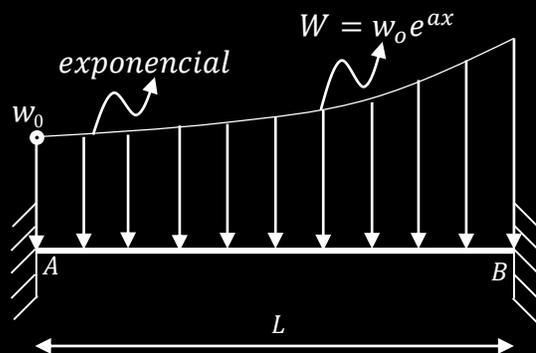
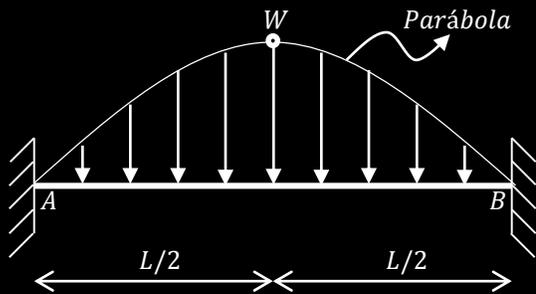


# Fuerzas de fijación y momentos de empotramiento en vigas

Edición revisada

**43 y más**



**Ortiz David**

**Palomino Alex Henry**

**Miranda Albert Richard**

**Aguaguña Mario**

**Martínez Hugo**

## **REVISIÓN TÉCNICA DE BOLIVIA**

**Luis Cabrera Fernández**

Universidad Técnica de Oruro

## **MENSAJE DE LOS AUTORES**

El libro se ha realizado en homenaje a los 43 estudiantes mexicanos desaparecidos de forma injusta por el gobierno, en Ayotzinapa, en el estado de Guerrero, del país México, de ahí que la portada tenga un 43; en seguida del número citado aparece un y más, porque son muchos más los caídos, los oprimidos, los marginados por el sistema. Una portada de negro en alusión a un luto, un luto que el pueblo mexicano vive hoy en día por tantos asesinatos injustos e impunes. Los nombres de nosotros los autores aparecen teñidos de rojo, en efecto, por la sangre derramada de un pueblo que exige justicia y dignidad. Va por aquellos que están luchando por un mundo mejor. Dejamos en claro que toda clase de autoritarismo es reprobatoria.

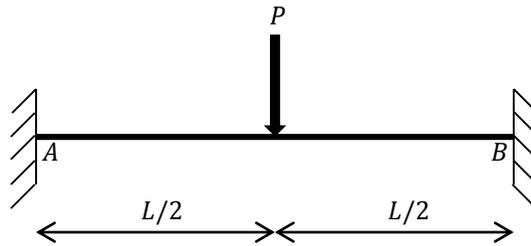
En todos los rincones del planeta, de distintas formas, pero todos unidos, conscientes y organizados seguiremos resistiendo.

Le decimos no al terrorismo de Estado en México, ni en ningún país.

América Latina es sólo una, y aún el mundo entero lo es.

**ESTE ES EL PRERELEASE DEL LIBRO, PRÓXIMAMENTE COLOCAREMOS PARA SU LIBRE DESCARGA EL LIBRO COMPLETO.**

# 1 VIGA CON CARGA PUNTUAL APLICADA AL CENTRO DEL CLARO



Estructura real (ER)

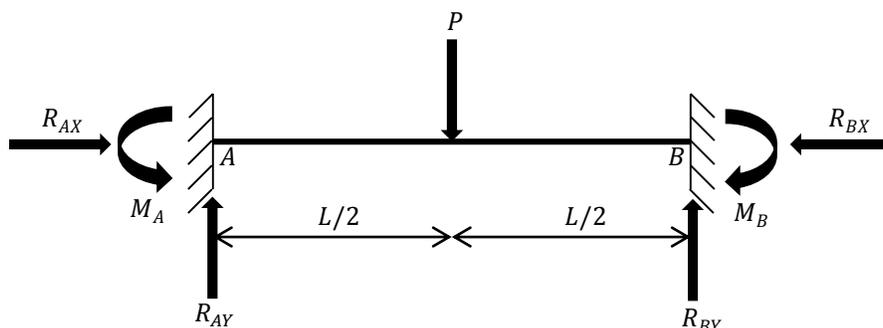
(a)

Figura 1

## SOLUCIÓN

### Verificación del grado de indeterminación

En primer lugar debe determinarse el grado de indeterminación de la estructura real (ER), figura 1-a, para saber cuántas restricciones hiperestáticas eliminar; ese mismo número nos indicará la cantidad de ecuaciones simultáneas a plantear más adelante para la resolución del problema. Con base en el diagrama de cargas, figura 1-b, hay  $r = 6$  incógnitas de reacción, las cuales son  $R_{AX}$ ,  $R_{AY}$ ,  $M_A$ ,  $R_{BX}$ ,  $R_{BY}$  y  $M_B$  (cabe mencionar que cuando se identifican las reacciones en los soportes, el sentido de cada una de ellas debe ser supuesto arbitrariamente al desconocerse la magnitud correspondiente), así mismo, no se tiene alguna condición impuesta por la construcción (articulación o rótula, conector cortante, etc.), es decir,  $c = 0$ . Por otra parte, existen  $n = 3$  ecuaciones de equilibrio en el plano, que son  $\sum M = 0$ ,  $\sum F_X = 0$ ,  $\sum F_Y = 0$ .



(b)

A partir de la ecuación  $\rightarrow \sum F_X = 0$ , dado que la viga no está sometida a cargas horizontales, se obtiene directamente que  $R_{AX}$  y  $R_{BX}$  son nulas. Por consiguiente, ahora únicamente se tienen  $r = 4$  fuerzas reactivas y  $n = 2$  ecuaciones de la Estática. En consecuencia, la viga es estáticamente

indeterminada o hiperestática de segundo grado ya que  $r > (n + c)$ , puesto que  $4 > (2 + 0)$  con una diferencia de  $4 - 2 = 2$ .

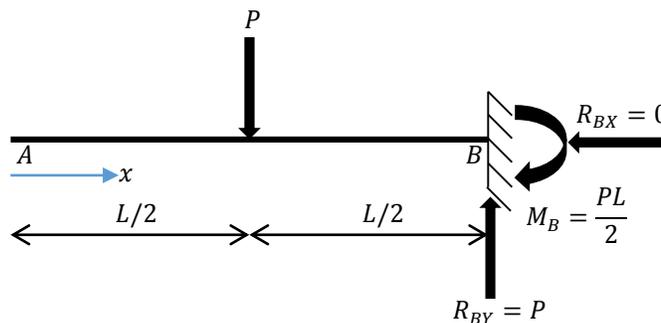
### Elección de las reacciones redundantes o fuerzas correctivas

Como la viga es estáticamente indeterminada en grado dos, hay dos redundantes, lo cual significa que existe tal cantidad de fuerzas en exceso de las fuerzas primarias o son sobrantes o superabundantes de las necesarias para mantener el equilibrio estático. Las redundantes deben seleccionarse de tal modo que al suprimirlas de la viga, esta sea isostática y estable. Por lo tanto, para el tipo de vigas doblemente empotradas se cuenta con dos alternativas: 1) eliminar los momentos reactivos o 2) retirar un momento y una reacción vertical con un punto de aplicación coincidente.

Basándose en la opción 2, se opta porque  $R_{AY}$  y  $M_A$  sean las redundantes, pero tome en cuenta que de la misma opción, las fuerzas correctivas pueden ser  $R_{BY}$  y  $M_B$ , o bien, de la opción 1, se pudo haber considerado como fuerzas sobrantes a  $M_A$  y  $M_B$ . Cuando ya se tiene un buen dominio del método de secciones, es más fácil visualizar la alternativa mayormente conveniente para hacer menos tedioso el análisis.

### Planteamiento de la estructura primaria

Con lo anterior, es posible idealizar una nueva estructura denominada estructura primaria o isostática fundamental ( $EP$ ); como se dejó entrever previamente, se trata de convertir la viga hiperestática en una isostática y estable desapareciendo precisamente las redundantes seleccionadas. Siendo así, la capacidad de la viga para resistir  $R_{AY}$  y  $M_A$  se elimina si se quita el empotramiento en  $A$ . Esta estructura liberada forzosamente debe soportar las carga reales, figura 1-c.



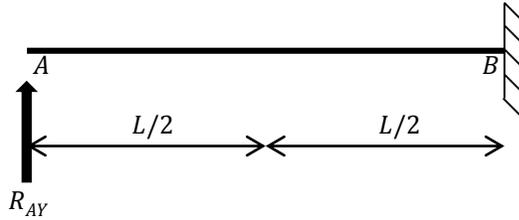
Estructura primaria ( $EP$ )  $\Rightarrow M$

(c)

### Principio de superposición

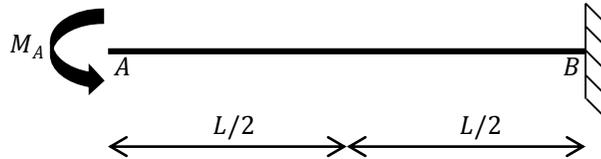
Aquí se esquematiza claramente que la estructura estáticamente indeterminada puede ser igual a la suma de una serie de estructuras estáticamente determinadas compuesta por la estructura primaria y otro número de estructuras igual a la cantidad de redundantes ( $ERd_i$ ). Por lo tanto, la estructura real es igual a la adición de la estructura liberada sometida a: A) las cargas reales, figura 1-c, y B) la acción individual de cada una de las reacciones redundantes (con un sentido propuesto de forma indistinta), figuras 1-d y 1-e. Para este ejercicio se tiene

$$ER = EP + ERd_1 + ERd_2$$



Estructura liberada con fuerza redundante  $R_{AY}$  aplicada ( $ERd_1$ )

(d)



Estructura liberada con momento redundante  $M_A$  aplicado ( $ERd_2$ )

(e)

Contrariamente a la viga de la figura 1-a, las vigas representadas en las figuras 1-c, 1-d y 1-e experimentan de forma respectiva un desplazamiento vertical o deflexión en  $A$  ( $\delta_{VA}$ ) y una pendiente o rotación en  $A$  ( $\theta_A$ ) dado que no hay soporte alguno en ese nodo que los impida.

Suponga que tales deflexiones y pendientes son iguales a una cierta cantidad. Entonces, para la viga  $EP$  se tiene que  $\delta_{VAEP} = d_1$  y  $\theta_{AEP} = d_2$ . A su vez, para la viga  $ERd_1$  tenemos que  $\delta_{VAERd_1} = R_{AY}(f_{11})$  y  $\theta_{AERd_1} = R_{AY}(f_{21})$ . De forma análoga, en la viga  $ERd_2$ ,  $\delta_{VAERd_2} = M_A(f_{12})$  y  $\theta_{AERd_2} = M_A(f_{22})$ . Posteriormente se ofrecerá una explicación de la razón por la cual se empleó la nomenclatura citada.

### Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica

Para obtener ecuaciones adicionales que coadyuven a la solución del problema hacemos uso del principio de superposición formulado en el apartado precedente y tomamos en cuenta la compatibilidad del desplazamiento vertical y la pendiente en el empotramiento  $A$ ; por lo tanto, las ecuaciones de compatibilidad para la deflexión en  $A$  y la rotación en  $A$  son, respectivamente

$$\delta_{VAER} = \delta_{VAEP} + \delta_{VAERd_1} + \delta_{VAERd_2} \quad \text{--- (1)}$$

$$\theta_{AER} = \theta_{AEP} + \theta_{AERd_1} + \theta_{AERd_2} \quad \text{--- (2)}$$

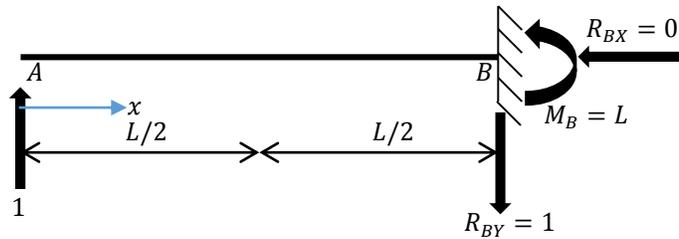
Si en la viga  $ER$  tanto el desplazamiento vertical como la rotación en  $A$  no existen debido a que la reacción vertical y el momento reactivo del soporte en  $A$  los impiden, entonces  $\delta_{VAER} = \theta_{AER} = 0$ . Efectuando las sustituciones correspondientes en las ecuaciones (1) y (2), el sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica pasa a ser el siguiente:

$$0 = d_1 + f_{11}R_{AY} + f_{12}M_A - - - (3)$$

$$0 = d_2 + f_{21}R_{AY} + f_{22}M_A - - - (4)$$

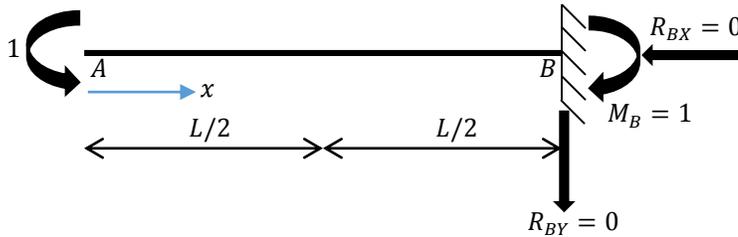
Cada desplazamiento del punto de aplicación de la acción redundante  $R_i$  o  $M_i$  en la dirección de esta, producido al actuar la carga original sobre la estructura liberada es expresado por  $d_i$ . Estos en conjunto se denominan incompatibilidades geométricas porque en la estructura real no ocurren.

Los coeficientes de flexibilidad  $f_{ij}$  anteriores conforman la matriz de flexibilidad de la estructura y pueden calcularse sencillamente si en la estructura liberada aplicamos una carga unitaria correspondiente a cada fuerza redundante ( $ECu_i$ ), figuras 1-f y 1-g.



Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en A ( $ECu_1$ )  $\Rightarrow m_1$

(f)



Estructura liberada con momento unitario aplicado en A ( $ECu_2$ )  $\Rightarrow m_2$

(g)

Entonces, directamente de la viga  $ECu_1$  tenemos que la deflexión y la rotación en A son equivalentes de forma respectiva a un determinado valor de  $\delta_{VAECu_1} = f_{11}$  y  $\theta_{AECu_1} = f_{21}$ . Así mismo, para la viga  $ECu_2$ ,  $\delta_{VAECu_2} = f_{12}$  y  $\theta_{AECu_2} = f_{22}$ .

### Cálculo de las incompatibilidades geométricas y de los coeficientes de flexibilidad

En resumen, para poder resolver el sistema simultáneo de ecuaciones (3) y (4), el cual nos permite calcular las redundantes, en las vigas visualizadas en las figuras 1-c, 1-f y 1-g es necesario conocer

cuánto valen el desplazamiento vertical en  $A$  dado que  $R_{AY}$  (fuerza reactiva vertical en el empotramiento del punto  $A$ ) fue suprimida y la pendiente en  $A$  debido a que  $M_A$  (momento reactivo en el empotramiento del punto  $A$ ) fue eliminado.

Los desplazamientos requeridos pueden obtenerse con cualquiera de los métodos apropiados del análisis estructural; en la presente obra se empleará el **método del principio del trabajo virtual** (es lo más recomendable) y se considerarán únicamente las deformaciones debidas a la flexión. En términos generales, este principio indica que debe incorporarse una carga ficticia unitaria sobre la viga descargada en el punto y en la dirección donde se requiere conocer el desplazamiento. Si debe determinarse la pendiente, se coloca un momento de par virtual unitario en el punto.

Para asociar a los momentos internos (se obtendrán a partir del **método de secciones**) con las estructuras, le hemos denominado  $M$  a la viga primaria,  $m_1$  a la viga liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en  $A$  y  $m_2$  a la viga liberada con momento unitario aplicado en  $A$ . Es importante recordar que las coordenadas  $x$  a emplear y las direcciones positivas de los momentos internos entre las tres estructuras recién mencionadas deben ser iguales. En las figuras 1-c, 1-f y 1-g se puede observar que usaremos únicamente la coordenada  $x$  para determinar la energía de deformación, cuyo origen se asocia en  $A$ , es positiva hacia la derecha y es válida para  $0 \leq x \leq L$ , pero el lector puede usar otra(s) coordenada(s) distinta(s) que sea(n) correcta(s) para cubrir la longitud de la viga. Con base en el principio del trabajo virtual, se tiene

$$d_1 = \delta_{VAEP} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI} dx \quad \text{--- (I)}$$

$$d_2 = \theta_{AEP} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI} dx \quad \text{--- (II)}$$

$$f_{11} = \delta_{VAECu_1} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1m_1}{EI} dx \quad \text{--- (III)}$$

$$f_{21} = \theta_{AECu_1} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1m_2}{EI} dx \quad \text{--- (IV)}$$

$$f_{12} = \delta_{VAECu_2} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2m_1}{EI} dx \quad \text{--- (V)}$$

$$f_{22} = \theta_{AECu_2} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2m_2}{EI} dx \quad \text{--- (VI)}$$

Note que para determinar  $d_1$  se requiere de la combinación apropiada de los momentos internos  $M$  y  $m_1$ ; algo análogo ocurre con las expresiones restantes. En todas las vigas de este libro,  $EI$  es constante.

A continuación se calculan las reacciones y los momentos internos en las vigas isostáticas de las figuras 1-c, 1-f y 1-g.

Considere que la función del momento flector será discontinua en los puntos donde el tipo o la magnitud de la carga distribuida cambia, o bien donde se apliquen fuerzas concentradas. La carga distribuida, así como la fuerza concentrada, o una de sus componentes, actúan perpendicularmente al eje longitudinal de la viga. Además de lo anterior, habrá discontinuidad en cada punto donde se aplique algún momento de par.

Viga  $EP$ , figura 1-c.

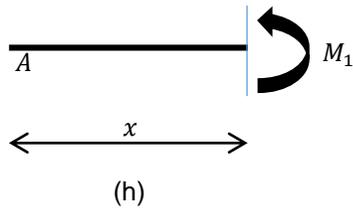
Al aplicar las ecuaciones de equilibrio en una secuencia y emplear los resultados calculados previamente, se obtiene

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{BX} = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -P + R_{BY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = P \uparrow$$

$$\curvearrowright \sum MB = 0 \Rightarrow -P \left(\frac{L}{2}\right) + M_B = 0 \Rightarrow \therefore M_B = \frac{PL}{2} \curvearrowright$$

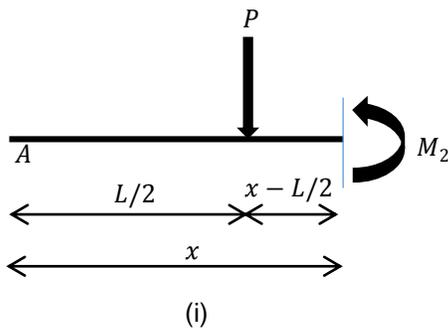
Se formulan los **momentos internos**  $M$ . Las funciones de momento serán discontinuas en el punto de aplicación de la carga  $P$ , así que se requiere de efectuar dos cortes perpendiculares al eje longitudinal de la viga para definir  $M$  a lo largo de la estructura, figuras 1-h y 1-i.



$$0 \leq x \leq L/2$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 0$$



$$L/2 \leq x \leq L$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$-M_2 - P \left(x - \frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow M_2 = -Px + \frac{PL}{2}$$

Viga  $ECu_1$ , figura 1-f.

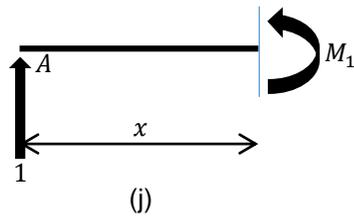
Las fuerzas reactivas en el apoyo empotrado  $B$  son resultado de

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{BX} = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = 0$$

$$\curvearrowright \sum MB = 0 \Rightarrow -1 + M_B = 0 \Rightarrow \therefore M_B = 1 \curvearrowright$$

Se deduce el **momento interno**  $m_1$ . Como no hay discontinuidad de carga, la viga se secciona ortogonalmente a su eje en una sola ocasión, figura 1-j.



$$0 \leq x \leq L$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$-M_1 + (1)(x) = 0 \Rightarrow M_1 = x$$

Viga  $ECu_2$ , figura 1-g.

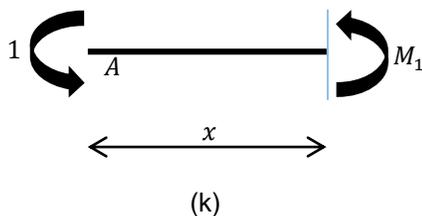
Las reacciones en el empotramiento  $B$  equivalen a

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{BX} = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 1 - R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = 1$$

$$\sum MB = 0 \Rightarrow 1(L) - M_B = 0 \Rightarrow M_B = L$$

Se infiere el momento interno  $m_2$  a partir de la figura 1-k.



$$0 \leq x \leq L$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$-M_1 - 1 = 0 \Rightarrow M_1 = -1$$

Obsérvese que la coordenada  $x$  seleccionada conlleva a que no haya necesidad de determinar las reacciones con el fin de encontrar los momentos internos.

Enseguida se presenta el cálculo de las incompatibilidades geométricas.

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} (0)(x) dx + \int_{L/2}^L \left(-Px + \frac{PL}{2}\right)(x) dx \right] = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(-Px^2 + \frac{PL}{2}x\right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ -\frac{P}{3}x^3 + \frac{PL}{4}x^2 \right]_{L/2}^L = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{P}{3} \left( L^3 - \left(\frac{L}{2}\right)^3 \right) + \frac{PL}{4} \left( L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right) \right] = \frac{1}{EI} \left( -\frac{7PL^3}{24} + \frac{3PL^3}{16} \right) = -\frac{5PL^3}{48EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} (0)(-1) dx + \int_{L/2}^L \left(-Px + \frac{PL}{2}\right)(-1) dx \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left( Px - \frac{PL}{2} \right) dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{P}{2} x^2 - \frac{PL}{2} x \right]_{L/2}^L = \frac{1}{EI} \left[ \frac{P}{2} \left( L^2 - \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right) - \frac{PL}{2} \left( L - \frac{L}{2} \right) \right]$$

$$\frac{1}{EI} \left( \frac{3PL^2}{8} - \frac{PL^2}{4} \right) = \frac{PL^2}{8EI}$$

Ahora se muestra el cálculo de los **coeficientes de flexibilidad**.

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^L = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(-1) dx = -\frac{1}{EI} \int_0^L x dx = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^L = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{12} = \frac{1}{EI} \int_0^L (-1)(x) dx = -\frac{1}{EI} \int_0^L x dx = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^L = -\frac{L^2}{2EI}$$

Obsérvese que como una consecuencia del teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos, se cumple que  $f_{12} = f_{21}$ . De forma más generalizada, se tiene que  $f_{ij} = f_{ji}$ , lo cual hace que mientras más grande sea el grado de hiperestaticidad, más se evita el cálculo de varios coeficientes de flexibilidad.

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^L (-1)(-1) dx = \frac{1}{EI} \int_0^L dx = \frac{1}{EI} [x]_0^L = \frac{L}{EI}$$

### Cálculo de las redundantes

Al sustituir los coeficientes en el sistema simultáneo de ecuaciones (3) y (4), se tiene

$$-\frac{5PL^3}{48EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0 \quad \text{--- (5)}$$

$$\frac{PL^2}{8EI} - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0 \quad \text{--- (6)}$$

Despejando  $M_A$  de las expresiones (4) y (5) respectivamente, resulta

$$M_A = \frac{\frac{5PL^3}{48EI} - \frac{L^3}{3EI} R_{AY}}{-\frac{L^2}{2EI}} \quad \text{--- (7)}$$

$$M_A = \frac{-\frac{PL^2}{8EI} + \frac{L^2}{2EI} R_{AY}}{\frac{L}{EI}} \quad \text{--- (8)}$$

Igualando (7) con (8) y simplificando da

$$\frac{\frac{5PL^3}{48EI} - \frac{L^3}{3EI} R_{AY}}{-\frac{L^2}{2EI}} = \frac{-\frac{PL^2}{8EI} + \frac{L^2}{2EI} R_{AY}}{\frac{L}{EI}} \Rightarrow R_{AY} = \frac{P}{2} \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{P}{2} \uparrow$$

Si se reemplaza el resultado previamente obtenido en (7), entonces

$$M_A = \frac{PL}{8} \Rightarrow \therefore M_A = \frac{PL}{8} \curvearrowright$$

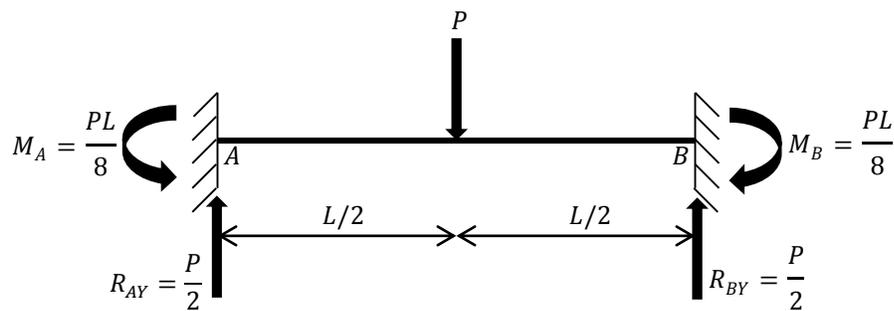
La magnitud positiva obtenida tanto para  $R_{AY}$  como  $M_A$  indicó que tales redundantes tienen el mismo sentido que el propuesto para su correspondiente carga unitaria. En caso de haber resultado negativas, simplemente el sentido es opuesto al observado en la figuras 1-d y 1-e.

### Ecuaciones de equilibrio

Como las reacciones redundantes ya han sido calculadas, los valores de las reacciones desconocidas faltantes pueden deducirse aplicando las ecuaciones de equilibrio, figura 1-l.

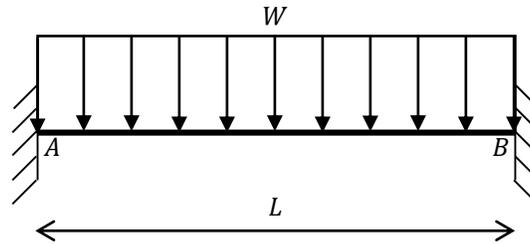
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - P + R_{BY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = \frac{P}{2} \uparrow$$

$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow -\frac{PL}{8} + P\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}(L) + M_B = 0 \Rightarrow \therefore M_B = \frac{PL}{8} \curvearrowright$$



(l)

## 2 VIGA CON CARGA DISTRIBUIDA UNIFORME



Estructura real ( $ER$ )

(a)

Figura 2

### SOLUCIÓN

#### Verificación del grado de indeterminación

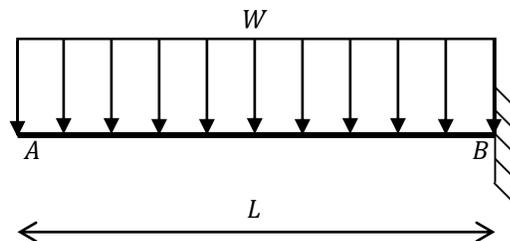
Como en toda viga doblemente empotrada que no soporta carga axial, pero soporta carga que es perpendicular a su eje longitudinal, para la viga de la figura 2-a en automático se infiere que las reacciones horizontales de los empotramientos  $A$  y  $B$  son nulas, en consecuencia, la estructura es estáticamente indeterminada en grado dos.

#### Elección de las reacciones redundantes

Si se seleccionan como fuerzas redundantes las mismas que en la viga resuelta anteriormente, es decir,  $R_{AY}$  y  $M_A$ , el problema se reducirá notablemente ya que muchos cálculos se repetirían, tales como los momentos internos  $m_1$  y  $m_2$ , y los coeficientes de flexibilidad  $f_{11}$ ,  $f_{21}$ ,  $f_{12}$  y  $f_{22}$ .

#### Planteamiento de la estructura primaria

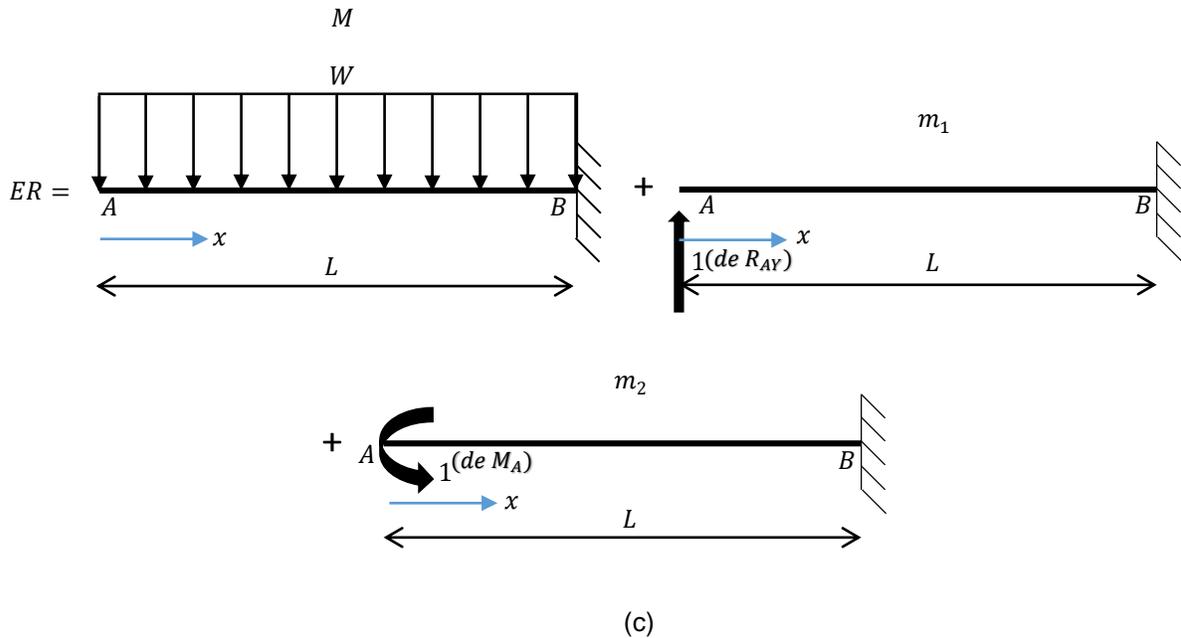
Se suprime el empotramiento  $A$  de la viga real con la finalidad de eliminar las redundantes  $R_{AY}$  y  $M_A$ . La viga liberada que soporta las cargas reales se muestra en la figura 2-b.



(b)

**Principio de superposición y sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica**

Como se vio en la viga 1, conviene que cuando la viga liberada se somete a la acción individual de cada una de las reacciones redundantes, estas últimas sean unitarias. El principio de superposición aplicado a la viga real se observa esquemáticamente en la figura 2-c.



**Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica**

El sistema resultante es como el sistema de ecuaciones (3) y (4) de la viga 1.

$$0 = d_1 + f_{11}R_{AY} + f_{12}M_A \quad \text{--- (1)}$$

$$0 = d_2 + f_{21}R_{AY} + f_{22}M_A \quad \text{--- (2)}$$

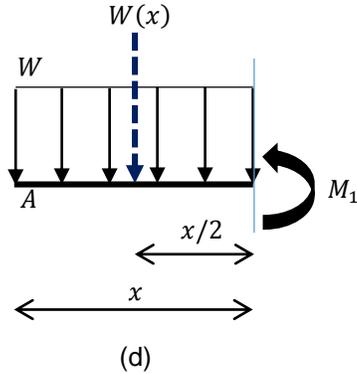
**Cálculo de las incompatibilidades geométricas y de los coeficientes de flexibilidad**

Estos coeficientes se obtienen directamente aplicando las ecuaciones I hasta VI del ejercicio precedente. Para ello, se determinan en primera instancia los momentos internos de las vigas de la figura 2-c. Como el origen de la coordenada  $x$  se eligió en  $A$ , el conocimiento de los valores de las reacciones en el empotramiento  $B$  se vuelve innecesario para este fin.

Se deduce el momento interno  $M$  con base en la viga primaria. La distribución de la carga actuante no presenta discontinuidad, así que sólo será necesario efectuar un corte perpendicular al eje de la viga para definir  $M$  a lo largo de la estructura. Por consiguiente, se secciona la viga en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $A - B$ ) a una distancia  $x$  del punto  $A$ .

En la figura 2-d se proporciona un diagrama de cuerpo libre del segmento de viga con longitud  $x$ . Para la carga distribuida se ha determinado: a) la carga concentrada equivalente, es decir, la magnitud de la fuerza resultante de la carga, que es igual al área bajo la curva de carga (en este caso, por ser carga uniforme es el área del rectángulo) y b) el centroide de dicha área a través del

cual pasa la línea de acción de la resultante, o sea, se halla el punto de aplicación de la resultante (para una carga uniforme distribuida se tiene que se ubica a la mitad de la longitud sobre la cual se extiende).



$$0 \leq x \leq L$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$-M_1 - W(x) \left( \frac{x}{2} \right) = 0 \Rightarrow M_1 = -\frac{Wx^2}{2}$$

Luego, se retoman los momentos internos  $m_1$  y  $m_2$  de las figuras 1-j y 1-k.

$$m_1 \Rightarrow M_1 = x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Rightarrow M_1 = -1 \quad 0 \leq x \leq L$$

Se calculan las incompatibilidades geométricas.

$$d_1 = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( -\frac{Wx^2}{2} \right) (x) dx = -\frac{WL^4}{8EI}$$

$$d_2 = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( -\frac{Wx^2}{2} \right) (-1) dx = \frac{WL^3}{6EI}$$

Evidentemente, los coeficientes de flexibilidad son los mismos que se tienen en la viga 1.

$$f_{11} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_1}{EI} dx = \frac{L^3}{3EI} \quad f_{21} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{22} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2 m_2}{EI} dx = \frac{L}{EI}$$

### Cálculo de las redundantes

Al reemplazar los resultados obtenidos en las ecuaciones (1) y (2), se obtiene

$$-\frac{WL^4}{8EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0 \quad \text{--- (3)}$$

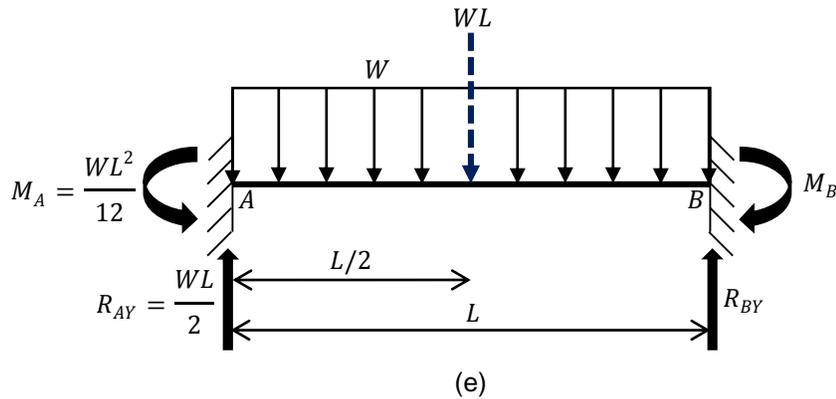
$$\frac{WL^3}{6EI} - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0 \quad \text{--- (4)}$$

Al resolver el sistema simultáneo de ecuaciones (3) y (2), se llega a

$$R_{AY} = \frac{WL}{2} \uparrow \quad M_A = \frac{WL^2}{12} \curvearrowright$$

### Ecuaciones de equilibrio

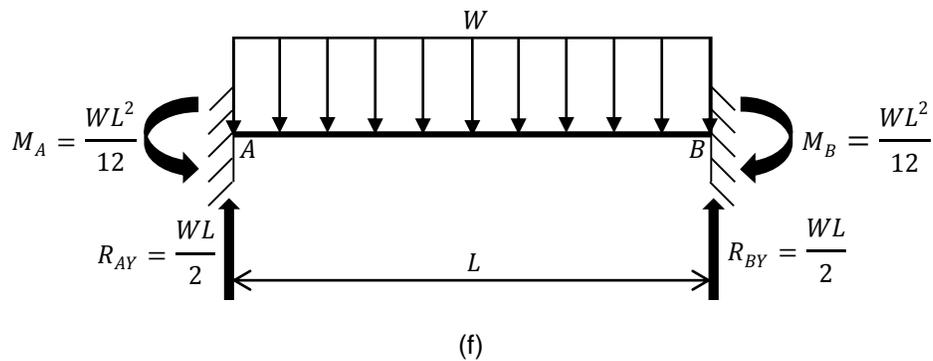
Por lo tanto, a partir del diagrama de cargas de la figura 2-e, resulta



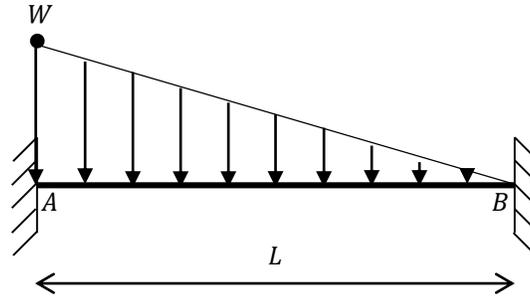
$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow \frac{WL}{2} - WL + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{WL}{2} \uparrow$$

$$+\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow -\frac{WL^2}{12} + WL \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{WL}{2}(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{12} \curvearrowright$$

Finalmente, la viga queda como la que se ve en la figura 2-f.



### 3 VIGA CON CARGA TRIANGULAR



Estructura real (ER)

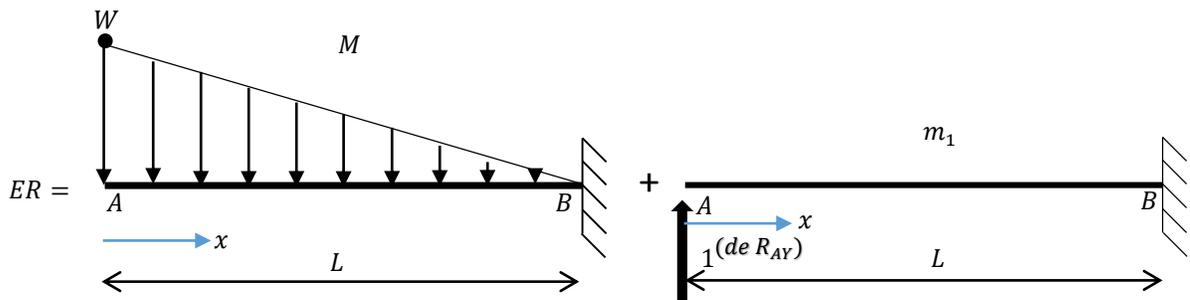
(a)

Figura 3

#### SOLUCIÓN

##### Principio de Superposición

Puesto que la carga axial es insignificante, la viga de la figura 3-a es hiperestática de grado dos. La reacción vertical y el momento reactivo, ambos del extremo A, se considerarán como redundantes. Entonces, la capacidad de la viga para soportar  $R_{AY}$  y  $M_A$  se anula si se elimina el empotramiento A. La figura 3-b muestra como la viga real es igual a la suma de una serie de vigas más simples.



(b)

**Ecuaciones de compatibilidad**

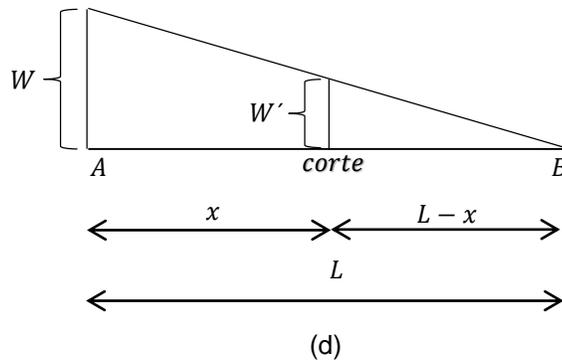
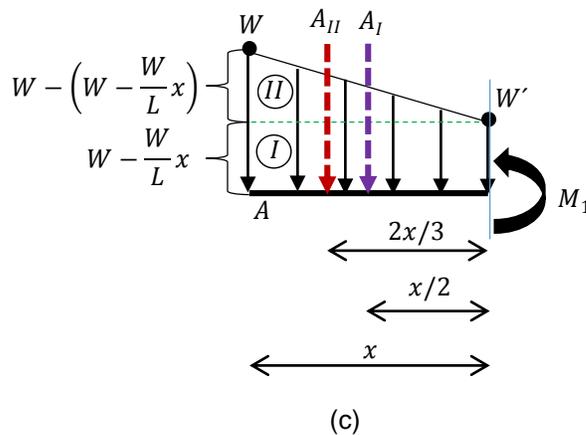
Con referencia al nodo *A* de la figura 3-b, se requiere

$$0 = d_1 + f_{11}R_{AY} + f_{12}M_A \text{ --- (1)}$$

$$0 = d_2 + f_{21}R_{AY} + f_{22}M_A \text{ --- (2)}$$

Se secciona la viga primaria para obtener el momento interno *M*. En la figura 3-c se muestra un diagrama de cargas de la sección cortada. En la figura 3-d, se proporciona un esquema para determinar por triángulos semejantes el valor en función de *x* de la intensidad *W'*.

$$0 \leq x \leq L$$



$$\frac{W}{L} = \frac{W'}{L-x} \Rightarrow W' = \frac{W(L-x)}{L} = W - \frac{W}{L}x$$

Se nota que del corte se origina una carga trapezoidal. Esta se divide en una distribución uniforme y una triangular para mayor facilidad. En la figura 3-c se indican las fuerzas resultantes *A<sub>I</sub>* y *A<sub>II</sub>* (áreas

bajo el rectángulo y el triángulo), las cuales vienen aplicadas en el centroide de sus respectivas áreas. Recuerde que para un área triangular, el centroide se ubica a las dos terceras partes de la base, y tal distancia se mide desde el punto del “pico”.

El equilibrio estático del cuerpo libre implica que

$$\begin{aligned} & \sum M_{corte} = 0 \\ & -M_1 - \underbrace{\left( \frac{(x) \left( W - \left( W - \frac{W}{L} x \right) \right)}{2} \right)}_{A_{II}} \left( \frac{2}{3} x \right) - \underbrace{\left( x \right) \left( W - \frac{W}{L} x \right)}_{A_I} \left( \frac{1}{2} x \right) = 0 \Rightarrow M_1 = \frac{Wx^3}{6L} - \frac{Wx^2}{2} \end{aligned}$$

Por otra parte, de los ejercicios previos, se sabe que

$$m_1 \Rightarrow M_1 = x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Rightarrow M_1 = -1 \quad 0 \leq x \leq L$$

Se calculan los desplazamientos y giros requeridos. Para las incompatibilidades geométricas tenemos

$$d_1 = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{Wx^3}{6L} - \frac{Wx^2}{2} \right) (x) dx = -\frac{11WL^4}{120EI}$$

$$d_2 = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{Wx^3}{6L} - \frac{Wx^2}{2} \right) (-1) dx = \frac{WL^3}{8EI}$$

Los coeficientes de flexibilidad son

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

Reemplazando los valores previos en las ecuaciones (1) y (2), y resolviendo, da

$$-\frac{11WL^4}{120EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{WL^3}{8EI} - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0 \quad \text{--- (2)}$$

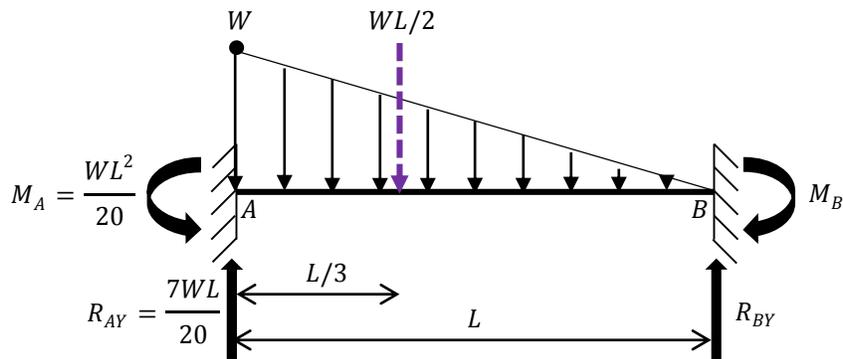
$$R_{AY} = \frac{7WL}{20} \uparrow \quad M_A = \frac{WL^2}{20} \curvearrowright$$

**Ecuaciones de equilibrio**

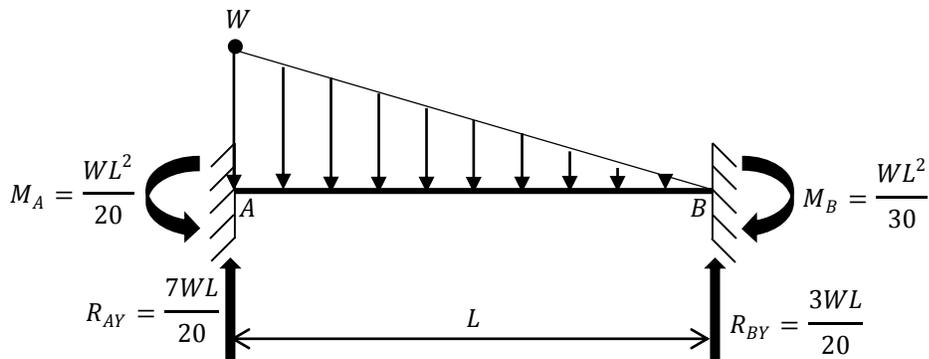
Si se aplican las ecuaciones de la estática en el diagrama de cargas de la figura 3-e, se obtiene la viga final, figura 3-f.

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow \frac{7WL}{20} - \frac{WL}{2} + R_{BY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = \frac{3WL}{20} \uparrow$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow -\frac{WL^2}{20} + \frac{WL}{2} \left(\frac{L}{3}\right) - \frac{3WL}{20}(L) + M_B = 0 \Rightarrow \therefore M_B = \frac{WL^2}{30} \curvearrowright$$

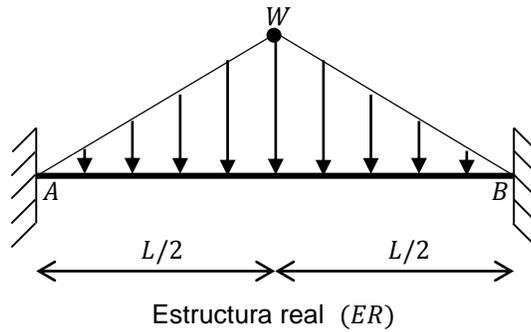


(e)



(f)

## 4 VIGA CON CARGA TRIANGULAR SIMÉTRICA



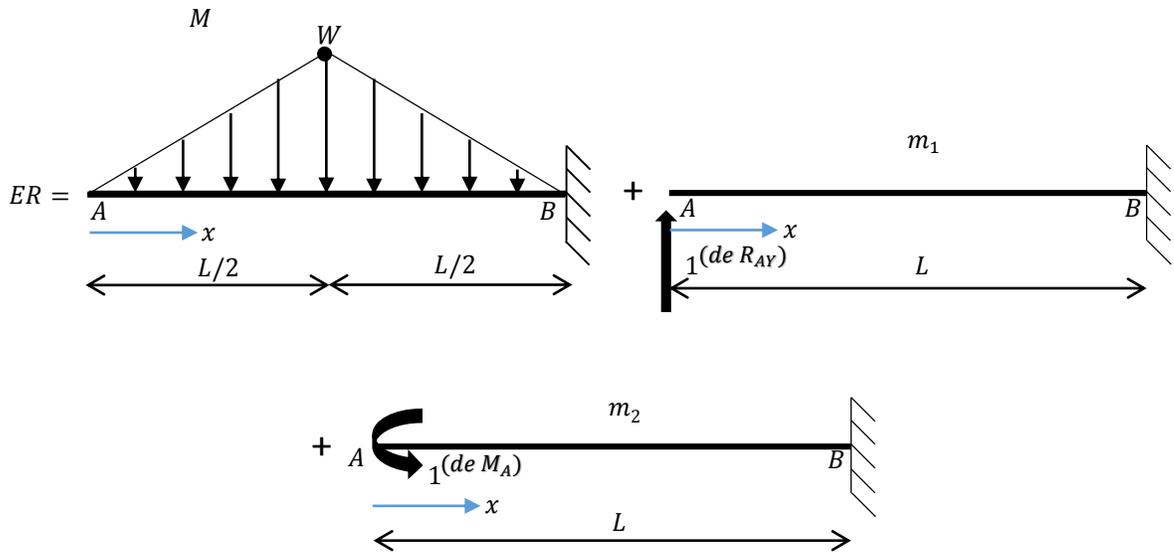
(a)

Figura 4

### SOLUCIÓN

#### Principio de Superposición

A simple vista, la viga de la figura 4-a es estáticamente indeterminada de segundo grado. Se siguen tomando como redundantes a  $R_{AY}$  y  $M_A$ . Note como para remover tales fuerzas sobrantes, se requiere de retirar el empotramiento A. En la figura 4-b se muestra el principio de superposición para esta viga.



**Ecuaciones de compatibilidad**

Con referencia al punto *A* de la figura 4-b, se requiere

$$0 = d_1 + f_{11}R_{AY} + f_{12}M_A - - - (1)$$

$$0 = d_2 + f_{21}R_{AY} + f_{22}M_A - - - (2)$$

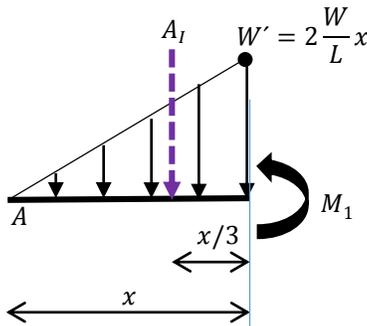
Como siempre, los momentos internos *M* se obtienen a partir de la viga liberada con cargas reales. Dado que la distribución de la carga que actúa a lo largo de esta viga presenta una discontinuidad (en la mitad del claro *A – B*), deben efectuarse dos cortes perpendiculares al eje de la viga.

Corte en el primer tramo. Se secciona la viga a una distancia *x* de *A* en un punto arbitrario antes de *L/2*, es decir, antes de que la intensidad de la carga con variación lineal alcance el valor de *W*. El diagrama de cuerpo libre de la sección cortada se visualiza en la figura 4-c.

$$0 \leq x \leq L/2$$

Note que la intensidad de la carga de triángulo rectángulo se encuentra en proporción, es decir,

$$\frac{W}{\frac{L}{2}} = \frac{W'}{x} \Rightarrow W' = \frac{2W}{L}x$$



(c)

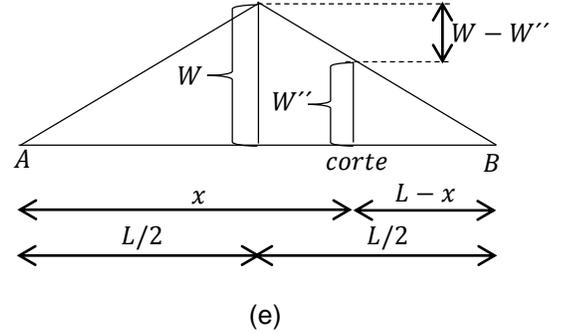
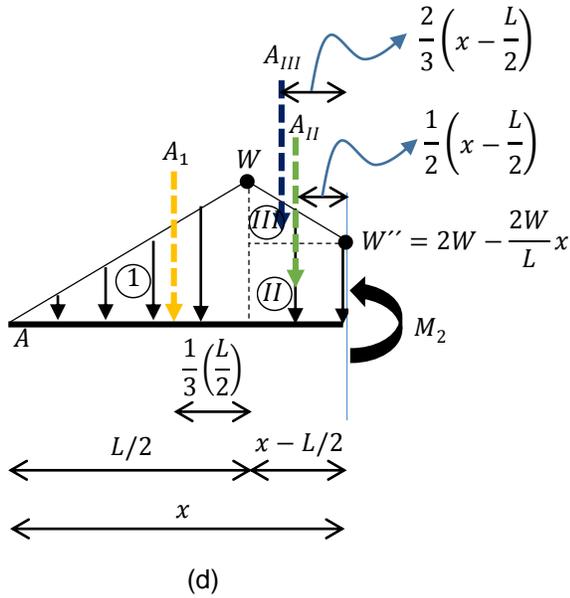
$$\begin{aligned} & \sum M_{corte} = 0 \\ & -M_1 - \underbrace{\left[ \frac{\left( \frac{2W}{L}x \right) (x)}{2} \right]}_{A_I} \left( \frac{x}{3} \right) = 0 \Rightarrow M_1 = -\frac{Wx^3}{3L} \end{aligned}$$

Corte en el tramo segundo tramo. Se secciona la viga a una distancia *x* de *A* en un punto arbitrario justo después de *L/2*. En la figura 4-d se observa el diagrama de cargas para este segmento de viga con longitud *x*.

$$L/2 \leq x \leq L$$

Con base en la figura 4-e, empleando conceptos básicos de trigonometría, se deduce el punto de intensidad *W''* de carga.

$$\frac{W}{\frac{L}{2}} = \frac{W''}{L-x} \Rightarrow W'' = \frac{W(L-x)}{\frac{L}{2}} = 2W - \frac{2W}{L}x$$



$$\begin{aligned}
 \sum M_{\text{corte}} = 0 &\Rightarrow -\left(\frac{\frac{L}{2}(W)}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right) + x - \frac{L}{2}\right) - \left(x - \frac{L}{2}\right)\left(2W - \frac{2W}{L}x\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{L}{2}\right) \\
 &- \left(\frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)\left(W - \left(2W - \frac{2W}{L}x\right)\right)}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{L}{2}\right) - M_2 = 0 \Rightarrow M_2 = \frac{W}{3L}x^3 - Wx^2 + \frac{WL}{2}x - \frac{WL^2}{12}
 \end{aligned}$$

Luego, los momentos internos de las vigas liberadas que soportan una unidad de las reacciones redundantes son, respectivamente

$$m_1 \Rightarrow M_1 = x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Rightarrow M_1 = -1 \quad 0 \leq x \leq L$$

Entonces,

$$d_1 = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} \left(-\frac{Wx^3}{3L}\right)(x) dx + \int_{L/2}^L \left(\frac{W}{3L}x^3 - Wx^2 + \frac{WL}{2}x - \frac{WL^2}{12}\right)(x) dx \right] = -\frac{11WL^4}{192EI}$$

$$d_2 = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} \left(-\frac{Wx^3}{3L}\right)(-1) dx + \int_{L/2}^L \left(\frac{W}{3L}x^3 - Wx^2 + \frac{WL}{2}x - \frac{WL^2}{12}\right)(-1) dx \right] = \frac{7WL^3}{96EI}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad f_{21} = f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

En consecuencia, el sistema de ecuaciones de flexibilidades es

$$-\frac{11WL^4}{192EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} - \frac{L^2}{2EI}M_A = 0 \quad \text{--- (3)}$$

$$\frac{7WL^3}{96EI} - \frac{L^2}{2EI}R_{AY} + \frac{L}{EI}M_A = 0 \quad \text{--- (4)}$$

Por lo tanto,

$$R_{AY} = \frac{WL}{4} \uparrow \quad M_A = \frac{5WL^2}{96} \curvearrowright$$

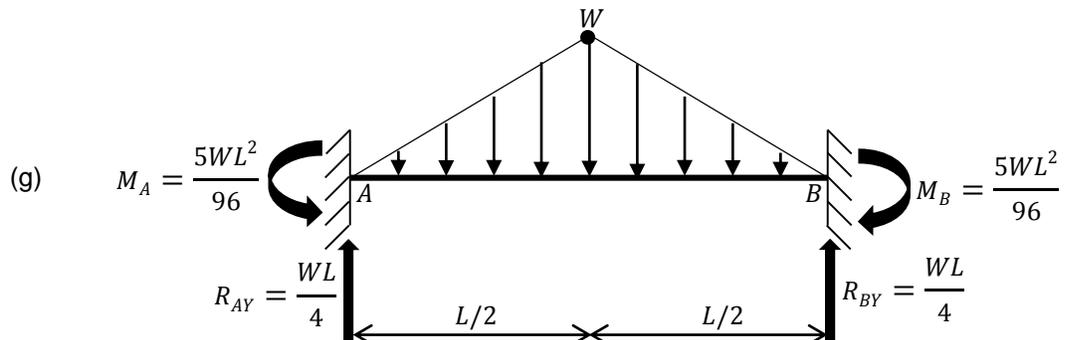
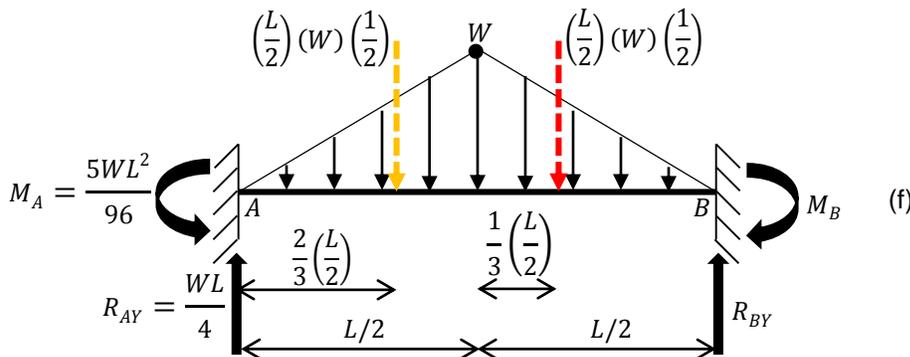
### Ecuaciones de equilibrio

Finalmente, a partir de la figura 4-f, se tienen las siguientes reacciones en el empotramiento B, figura 4-g.

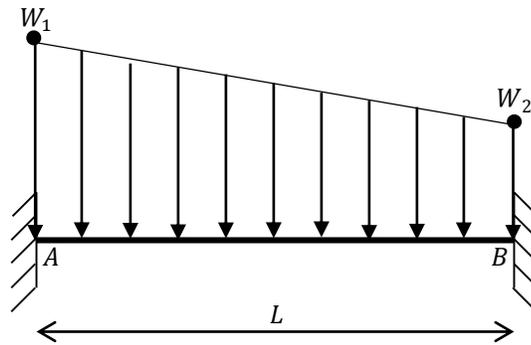
$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow \frac{WL}{4} - \left(\frac{L}{2}\right)(W)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{L}{2}\right)(W)\left(\frac{1}{2}\right) + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{WL}{4} \uparrow$$

$$\curvearrowright + \sum M_A = 0$$

$$-\frac{5WL^2}{96} + \left(\frac{L}{2}\right)(W)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right) + \left(\frac{L}{2}\right)(W)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\right) - \frac{WL}{4}(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{5WL^2}{96} \curvearrowright$$



## 5 VIGA CON CARGA TRAPEZOIDAL



Estructura real (ER)

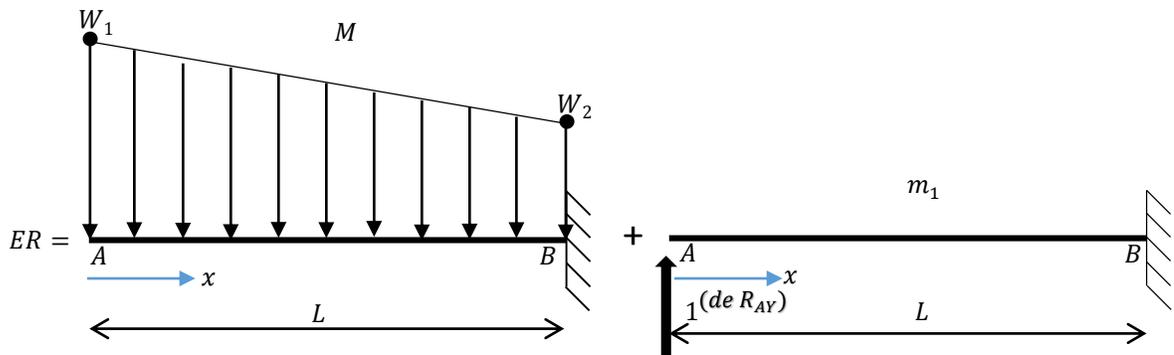
(a)

Figura 5

### SOLUCIÓN

#### Principio de Superposición

Por inspección, la viga de la figura 5-a es hiperestática de grado dos. Se considera que  $R_{AY}$  y  $M_A$  son las fuerzas reactivas redundantes, de tal modo que se podrán determinar directamente con el método de flexibilidades. La remoción de las fuerzas superabundantes implica eliminar el empotramiento  $A$ . En la figura 5-b se observa la aplicación del principio de superposición.



(b)

**Ecuaciones de compatibilidad**

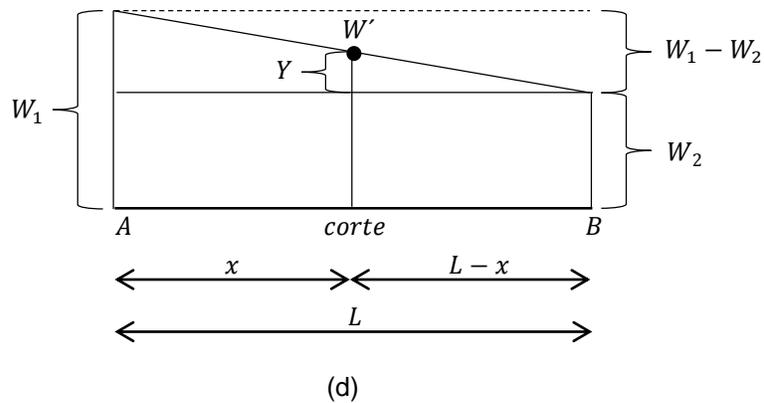
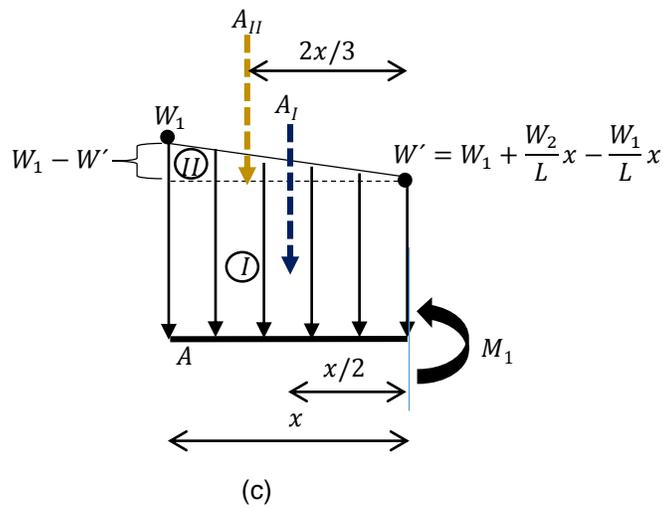
Con referencia al punto *A* de la figura 5-b, se requiere

$$0 = d_1 + f_{11}R_{AY} + f_{12}M_A \text{ --- (1)}$$

$$0 = d_2 + f_{21}R_{AY} + f_{22}M_A \text{ --- (2)}$$

Se puede notar que la viga isostática fundamental soporta una carga cuya intensidad varía linealmente desde  $W_1$  en el punto *A* hasta  $W_2$  en el punto *B*. Entonces, una sola región se distingue en esta estructura. El momento interno  $M$  se infiere de tomar momentos alrededor del punto del corte en el cuerpo libre de la figura 5-c. No obstante, previo a la aplicación de la ecuación de equilibrio citada, debe calcularse el punto de intensidad  $W'$  de carga en función de  $x$ , figura 5-d.

$$0 \leq x \leq L$$



$$\frac{W_1 - W_2}{L} = \frac{Y}{L - x}$$

$$Y = \frac{(W_1 - W_2)(L - x)}{L} = W_1 - W_2 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x$$

$$W' = W_2 + Y = W_2 + W_1 - W_2 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x = W_1 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_1 - \underbrace{\left(x \left(W_1 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x\right)\right)}_{A_I} \left(\frac{1}{2}x\right) - \underbrace{\left[\frac{(x) \left(W_1 - \left(W_1 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x\right)\right)}{2}\right]}_{A_{II}} \left(\frac{2}{3}x\right) = 0$$

$$M_1 = \frac{W_1x^3}{2L} - \frac{W_2x^3}{2L} - \frac{W_1x^2}{2} + \frac{W_2x^3}{3L} - \frac{W_1x^3}{3L} = \frac{W_1x^3}{6L} - \frac{W_2x^3}{6L} - \frac{W_1x^2}{2}$$

Los momentos internos de las otras dos vigas isostáticas son

$$m_1 \Rightarrow M_1 = x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Rightarrow M_1 = -1 \quad 0 \leq x \leq L$$

Se necesita de los siguientes desplazamientos y pendientes

$$d_1 = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{W_1x^3}{6L} - \frac{W_2x^3}{6L} - \frac{W_1x^2}{2} \right) (x) dx = -\frac{11W_1L^4}{120EI} - \frac{W_2L^4}{30EI}$$

$$d_2 = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{W_1x^3}{6L} - \frac{W_2x^3}{6L} - \frac{W_1x^2}{2} \right) (-1) dx = \frac{W_1L^3}{8EI} + \frac{W_2L^3}{24EI}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad f_{21} = f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

Al reemplazar los resultados en las ecuaciones (1) y (2), se tiene

$$-\left(\frac{11W_1L^4}{120EI} + \frac{W_2L^4}{30EI}\right) + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} - \frac{L^2}{2EI}M_A = 0 \quad \text{--- (3)}$$

$$\left(\frac{W_1L^3}{8EI} + \frac{W_2L^3}{24EI}\right) - \frac{L^2}{2EI}R_{AY} + \frac{L}{EI}M_A = 0 \quad \text{--- (4)}$$

Al resolver el sistema el sistema simultáneo de ecuaciones previo, se obtiene

$$R_{AY} = \left( \frac{7W_1L}{20} + \frac{3W_2L}{20} \right) \uparrow \quad M_A = \left( \frac{W_1L^2}{20} + \frac{W_2L^2}{30} \right) \curvearrowright$$

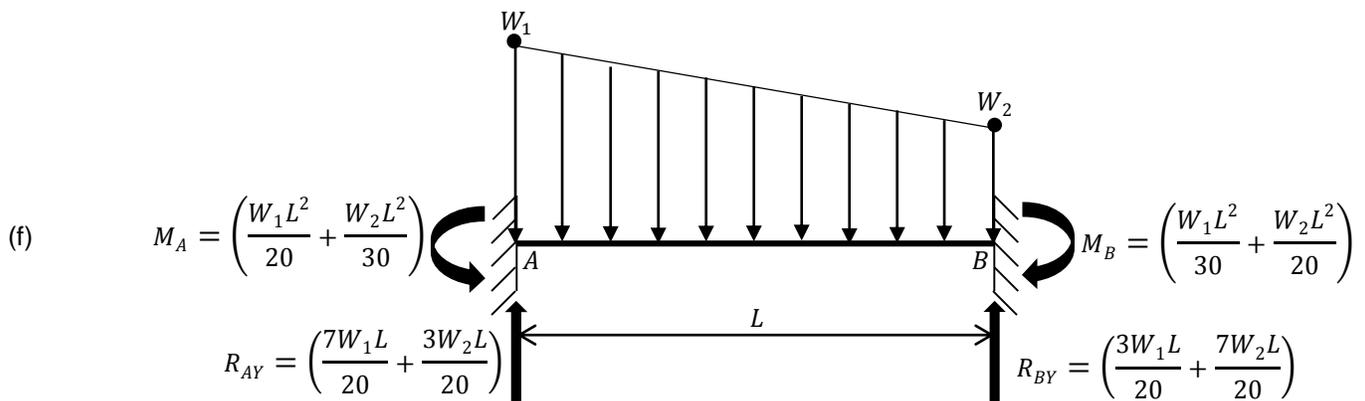
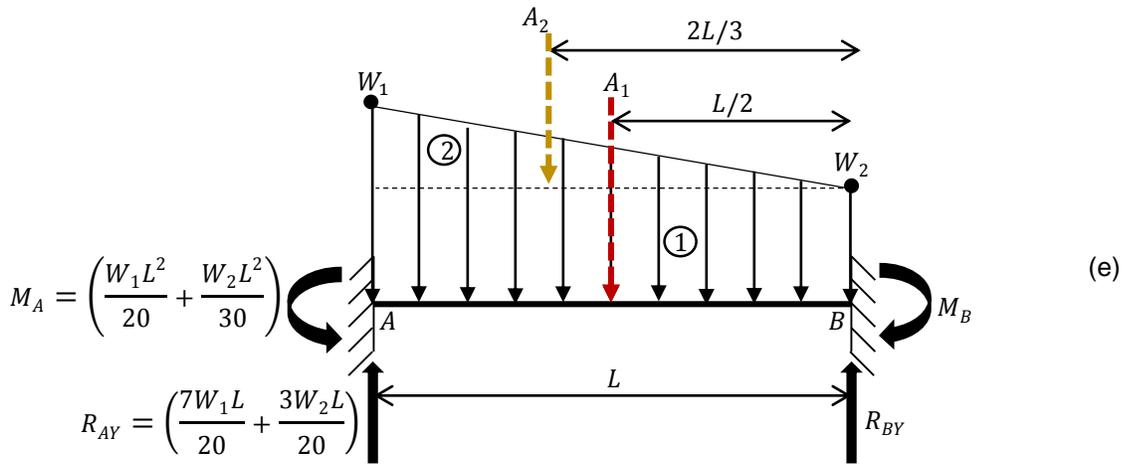
**Ecuaciones de equilibrio**

Se dibuja un diagrama de cargas colocando las redundantes calculadas, figura 5-e. Si en él se aplican las ecuaciones de la estática, se obtienen las reacciones faltantes, figura 5-f.

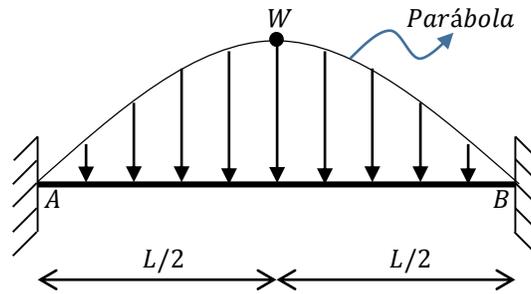
$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow \left( \frac{7W_1L}{20} + \frac{3W_2L}{20} \right) - \underbrace{(L)(W_2)}_{A_1} - \underbrace{\left[ \frac{(L)(W_1 - W_2)}{2} \right]}_{A_2} + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \left( \frac{3W_1L}{20} + \frac{7W_2L}{20} \right) \uparrow$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow - \left( \frac{W_1L^2}{20} + \frac{W_2L^2}{30} \right) + W_2(L) \left( \frac{L}{2} \right) + \left( \frac{(L)(W_1 - W_2)}{2} \right) \left( \frac{L}{3} \right) - \left( \frac{3W_1L}{20} + \frac{7W_2L}{20} \right) (L) + M_B = 0$$

$$\therefore M_B = \left( \frac{W_1L^2}{30} + \frac{W_2L^2}{20} \right) \curvearrowright$$



## 6 VIGA CON CARGA PARABÓLICA



Estructura real (ER)

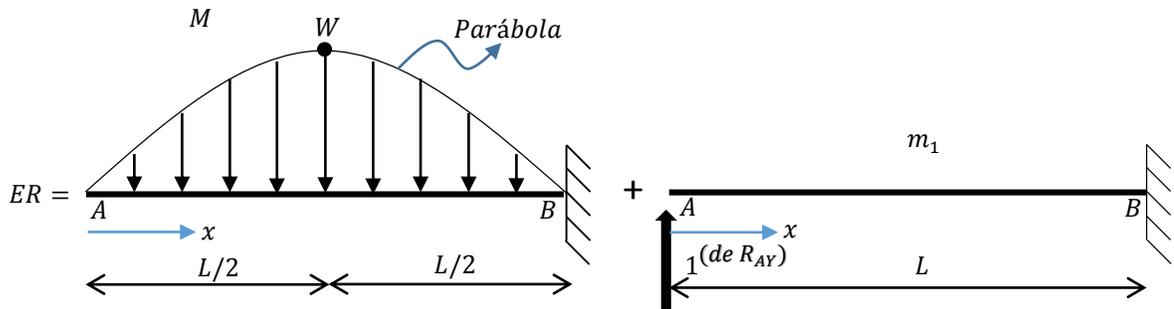
(a)

Figura 6

### SOLUCIÓN

#### Principio de Superposición

Para la viga de la figura 6-a, los tres grados de libertad en A están restringidos, no obstante, la eliminación del soporte izquierdo conllevaría a que el desplazamiento vertical y la pendiente, ambos del punto A, no se encuentren restringidos. La figura 6-b muestra como la viga real es igual a la adición de una serie de vigas más sencillas.



(b)

**Ecuaciones de compatibilidad**

Si tomamos en cuenta la compatibilidad del desplazamiento vertical y la pendiente en el empotramiento A, figura 6-b, se tiene

$$0 = d_1 + f_{11}R_{AY} + f_{12}M_A \text{ --- (1)}$$

$$0 = d_2 + f_{21}R_{AY} + f_{22}M_A \text{ --- (2)}$$

Se analiza la viga primaria.

Inicialmente se efectúa un análisis de la carga cuya intensidad es descrita por una curva en forma de parábola. La ecuación que define la intensidad parabólica puede expresarse de la siguiente forma:

$$y = ax^2 + bx + c \text{ --- (I)}$$

Si se toma como origen el punto A, los tres puntos conocidos de la curva son

$$1) \text{ en } x = 0, y = 0 \quad 2) \text{ en } x = \frac{L}{2}, y = W \quad 3) \text{ en } x = L, y = 0$$

Es posible construir un sistema de ecuaciones reemplazando cada uno de los puntos anteriores de manera individual en la ecuación (I) con la finalidad de calcular las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

$$0 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow 0a + 0b + c = 0 \text{ --- (1)}$$

$$W = a\left(\frac{L}{2}\right)^2 + b\left(\frac{L}{2}\right) + c \Rightarrow \frac{L^2}{4}a + \frac{L}{2}b + c = W \text{ --- (2)}$$

$$0 = a(L)^2 + b(L) + c \Rightarrow L^2a + Lb + c = 0 \text{ --- (3)}$$

Se resuelve el sistema simultáneo de ecuaciones (1) hasta (3) con el Método de Cramer. Cada determinante de orden 3x3 se determina empleando la regla de Sarrus.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} & 1 & | & \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} \\ L^2 & L & 1 & | & L^2 & L \end{vmatrix} = \left(0 + 0 + \frac{L^3}{4}\right) - \left(0 + 0 + \frac{L^3}{2}\right) = -\frac{L^3}{4}$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ W & \frac{L}{2} & 1 & | & W & \frac{L}{2} \\ 0 & L & 1 & | & 0 & L \end{vmatrix} = (0 + 0 + WL) - (0 + 0 + 0) = WL$$

$$\Delta b = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{4} & W & 1 & | & \frac{L^2}{4} & W \\ L^2 & 0 & 1 & | & L^2 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 0) - (0 + 0 + L^2W) = -L^2W$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} & W & | & \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} \\ L^2 & L & 0 & | & L^2 & L \end{vmatrix} = (0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 0$$

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{WL}{\frac{-L^3}{4}} = -4 \frac{W}{L^2} \quad b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{-L^2 W}{\frac{-L^3}{4}} = 4 \frac{W}{L} \quad c = \frac{\Delta c}{\Delta} = \frac{0}{\frac{-L^3}{4}} = 0$$

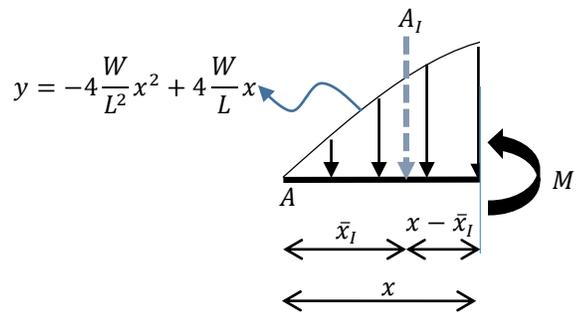
En consecuencia, al sustituir estos valores en la expresión (I), se tiene que la ecuación que define la intensidad parabólica de la carga es

$$y = -4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x$$

Como no hay discontinuidad de carga a lo largo de la estructura primaria, sólo se efectuará un corte perpendicular al eje longitudinal de la viga, entonces, no importa si tal seccionamiento se hace antes o después de que la presión alcanza el valor de  $W$ .

A continuación, en la figura 6-c se proporciona un diagrama de cargas del segmento de viga con longitud  $x$ . Antes de efectuar el equilibrio estático en el cuerpo libre para deducir la función del momento  $M$ , se determina la carga concentrada equivalente  $A_I$  de la porción izquierda de la presión parabólica y su punto de aplicación  $\bar{x}_I$ .

$$0 \leq x \leq L$$



(c)

La fuerza resultante de la carga distribuida seccionada es

$$A_I = \int dA = \int_{L_1}^{L_2} y dx = \int_0^x \left( -4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx = -4 \frac{W}{L^2} \int_0^x x^2 dx + 4 \frac{W}{L} \int_0^x x dx$$

$$= -4 \frac{W}{L^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^x + 4 \frac{W}{L} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^x = -\frac{4W}{3L^2} [x^3 - 0^3] + \frac{4W}{2L} [x^2 - 0^2] = -\frac{4W}{3L^2} x^3 + \frac{2W}{L} x^2$$

y su ubicación es

$$\bar{x}_I = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} x y dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx} = \frac{\int_0^x x \left( -4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx}{\int_0^x \left( -4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx}$$

Como el denominador ya fue resuelto, se atiende al numerador.

$$\int_0^L x \left( -4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx = -4 \frac{W}{L^2} \int_0^L x^3 dx + 4 \frac{W}{L} \int_0^L x^2 dx$$

$$= -4 \frac{W}{L^2} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^x + 4 \frac{W}{L} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^x = \frac{-4W}{4L^2} [x^4 - 0^4] + \frac{4W}{3L} [x^3 - 0^3] = -\frac{W}{L^2} x^4 + \frac{4W}{3L} x^3$$

$$\therefore \bar{x}_I = \frac{-\frac{W}{L^2} x^4 + \frac{4W}{3L} x^3}{-\frac{4W}{3L^2} x^3 + \frac{2W}{L} x^2} \text{ a la derecha de A}$$

Tomando momentos alrededor del punto del corte, se obtiene

$$\curvearrowright \sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$-M_1 - \left( -\frac{4W}{3L^2} x^3 + \frac{2W}{L} x^2 \right) \left( x - \frac{-\frac{W}{L^2} x^4 + \frac{4W}{3L} x^3}{-\frac{4W}{3L^2} x^3 + \frac{2W}{L} x^2} \right) = 0 \Rightarrow M_1 = \frac{W}{3L^2} x^4 - \frac{2W}{3L} x^3$$

Además,

$$m_1 \Rightarrow M_1 = x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Rightarrow M_1 = -1 \quad 0 \leq x \leq L$$

Por consiguiente,

$$d_1 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{W}{3L^2} x^4 - \frac{2W}{3L} x^3 \right) (x) dx = -\frac{7WL^4}{90EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{W}{3L^2} x^4 - \frac{2W}{3L} x^3 \right) (-1) dx = \frac{WL^3}{10EI}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad f_{21} = f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

De tal modo que el sistema simultáneo de ecuaciones (1) y (2) se convierte en

$$-\frac{7WL^4}{90EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0 \quad \text{--- (3)}$$

$$\frac{WL^3}{10EI} - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0 \quad \text{--- (4)}$$

Entonces, las fuerzas correctivas son

$$R_{AY} = \frac{WL}{3} \uparrow \quad M_A = \frac{WL^2}{15} \curvearrowright$$

### Ecuaciones de equilibrio

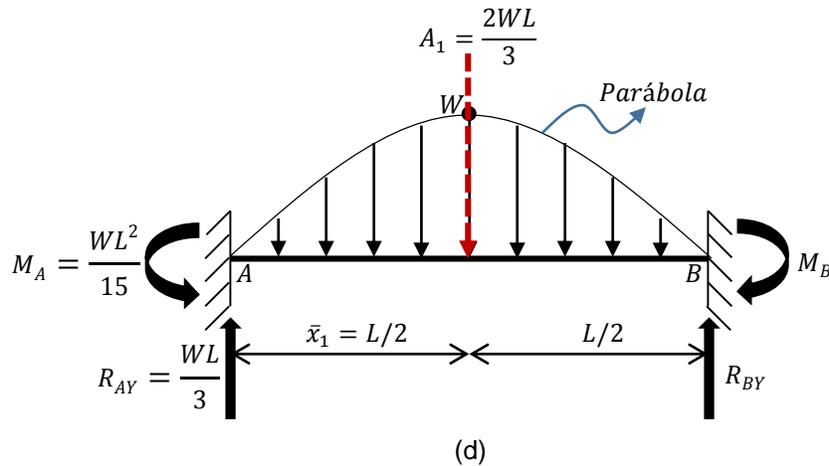
Estas se aplican al diagrama de cargas de la figura 6-d. La carga concentrada equivalente de la carga distribuida con intensidad parabólica es

La carga concentrada equivalente de la carga distribuida con intensidad parabólica es

$$A_1 = \int_0^L \left( -4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx = \frac{2}{3} WL$$

y su línea de acción se ubica en

$$\bar{x}_1 = \frac{\int_0^L x \left( -4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx}{\int_0^L \left( -4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx} = \frac{\frac{WL^2}{3}}{\frac{2}{3} WL} = \frac{1}{2} L$$



Así que,

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow \frac{WL}{3} - \frac{2}{3} WL + R_{BY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = \frac{WL}{3} \uparrow$$

$$+\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow -\frac{WL^2}{15} + \frac{2}{3} WL \left( \frac{L}{2} \right) - \frac{WL}{3} (L) + M_B = 0 \Rightarrow \therefore M_B = \frac{WL^2}{15} \curvearrowright$$

En la figura 6-e se muestran las reacciones en los empotramientos A y B de la viga hiperestática.

