1

"LA CIENCIA Y EL ARTE DE LA DINAMICA ESTRUCTURAL"

Pensemos en un vehículo de transportación que se desplaza sobre sus rieles, en una plataforma de perforación localizada en algún océano, en un edificio moviéndose debido al efecto de un sismo; ¿tienen algo en común estos ejemplos? Podemos contestar a esta pregunta diciendo que todos ellos son estructuras que estan sujetas a "CARGAS DINAMICAS".

La importancia de la seguridad, comportamiento y confiabilidad de estructuras como las anteriores crea la necesidad de análisis y pruebas extensas para determinar su respuesta bajo cargas dinámicas.

1.1 DINAMICA ESTRUCTURAL.

Aunque la mayoría de las estructuras en Ingeniería Civil pueden ser diseñadas apropiadamente considerando que las cargas fueran estáticas, existen algunas excepciones importantes, y

es imperativo que el diseñador sea capaz de distinguir entre cargas estáticas y dinámicas.

El interés en el diseño estructural para cargas dinámicas ha ido incrementándose con el tiempo. Esto es en parte debido a los avances tecnológicos, los cuales han hecho posible diseños más exactos. Es también debido al hecho de que estan intentándose estructuras cada vez más atrevidas (más altas, más ligeras, etc.), y éstas son más susceptibles a efectos dinámicos ya que generalmente son más flexibles. Ejemplos de situaciones en las cuales la carga dinámica debe considerarse, incluyen:

(1) Estructuras sujetas a fuerzas alternantes causadas por maquinaria oscilante.
(2) Estructuras que soportan cargas móviles tales como puentes.
(3) Estructuras sujetas a fuerzas aplicadas súbitamente tales como ráfagas de viento.
(4) Casos donde los apoyos de la estructura se mueven, como un edificio durante un sismo.

Los principios básicos del análisis estructural son válidos también para el caso de carga dinámica. Se cumplen las mismas relaciones entre deflexión y esfuerzo que en condiciones estáticas.

El análisis dinámico consiste primeramente en la determinación de la variación en el tiempo de las deflexiones, de las cuales los esfuerzos pueden ser calculados directamente, tomando en cuenta las propiedades de la estructura tales como su masa y rigidez.

1.2 PROBLEMA ESTATICO Y PROBLEMA DINAMICO.

Un problema estructural dinámico difiere del problema estático correspondiente en dos importantes aspectos. El primero es la variación en el tiempo de la magnitud, dirección o punto de aplicación de la carga o excitación. De mayor importancia, sin embargo, es el papel que juega la aceleración en un problema de dinámica estructural.

La Fig. 1.1a muestra una viga en cantiliver bajo carga

FIG. 1.1 CANTILIVER BAJO (a) CARGA ESTATICA, (b) CARGA DINAMICA

estática. La deflexión y los esfuerzos internos dependen directamente de la carga P. Por el contrario, la Fig. 1.1b muestra una viga en cantiliver similar, sujeta a una carga variante P(t). La aceleración de la viga da lugar a una fuerza de inercia distribuída. Si esta fuerza inercial contribuye significativamente a las deflexiones y esfuerzos internos en la estructura, entonces es necesario un análisis dinámico.

1.3 CARGA DINAMICA.

Hasta este punto podemos afirmar que Dinámica significa variación en el tiempo. Definamos entonces CARGA DINAMICA como aquella carga cuya magnitud, dirección o punto de aplicación varía con el tiempo y así las deflexiones y esfuerzos resultantes de esta variación constituyen la RESPUESTA DINAMICA.

De hecho, no hay cargas estructurales (con la posible excepción de carga muerta) que sean realmente estáticas, ya que ellas deben ser aplicadas a la estructura de alguna manera, y ésto envuelve una variación en el tiempo de la fuerza. Es obvio, sin embargo, que si la magnitud de la fuerza varía en forma lo suficientemente lenta, no tendrá efectos dinámicos y pordrá ser tratada como si fuera estática. El término "SUFICIENTEMENTE LENTA" no está definido, y aparentemente la cuestión de si una carga es o no dinámica es un tanto cuanto relativo. El período natural de la estructura es el parámetro significativo, y si la carga varía lentamente en relación a su período puede ser considerada estática.

El PERIODO NATURAL, definido en forma simplista, es el tiempo requerido por la estructura para llevar a cabo un ciclo de vibración libre, es decir, la vibración después de que la fuerza que causa el movimiento ha sido removida o ha dejado de variar.

1.4 CLASIFICACION DE LAS CARGAS DINAMICAS.

Existen dos caminos básicamente distintos para evaluar la respuesta estructural a cargas dinámicas: determinístico y no determinístico. La elección del método a usar en un caso dado depende de cómo esté definida la carga.

Si la variación en el tiempo de la carga es completamente conocida, aún cuando ésta sea altamente oscilatoria o de carácter irregular, nos referiremos a ella como una CARGA DINAMICA --- PRESCRITA; y el análisis de la respuesta de cualquier sistema estructural específico para una carga dinámica prescrita se define como un Análisis Determinista. Por otro lado, si la variación en el tiempo no es enteramente conocida pero puede ser definida en - sentido estadístico, la carga es llamada CARGA DINAMICA ALEATORIA; de la misma forma, un análisis no Determinista corresponderá al análisis de la respuesta del sistema a cargas dinámicas aleatorias. En adelante haremos un especial énfasis en los métodos de análi-- sis deterministas y por consiguiente en cargas dinámicas prescritas

Casi cualquier tipo de sistema estructural puede estar sujeto a una forma u otra de carga dinámica durante su vida. Desde un punto de vista analítico, es conveniente dividir las cargas prescritas o determinísticas en dos categorías básicas: Periódi-- cas y No Periódicas. Algunas formas típicas de cargas prescritas y ejemplos de situaciones en las cuales dichas cargas pudieran -- presentarse se ilustran en la Fig. 1.2 .

Las Figs. 1.2a y 1.2b, representan cargas periódicas repetitivas que exhiben sucesivamente la misma variación en el tiempo durante un gran número de ciclos. La carga periódica más simple es la variación senoidal de la Fig. 1.2a, conocida como ARMONICA SIMPLE; dicha carga es característica de los efectos del des

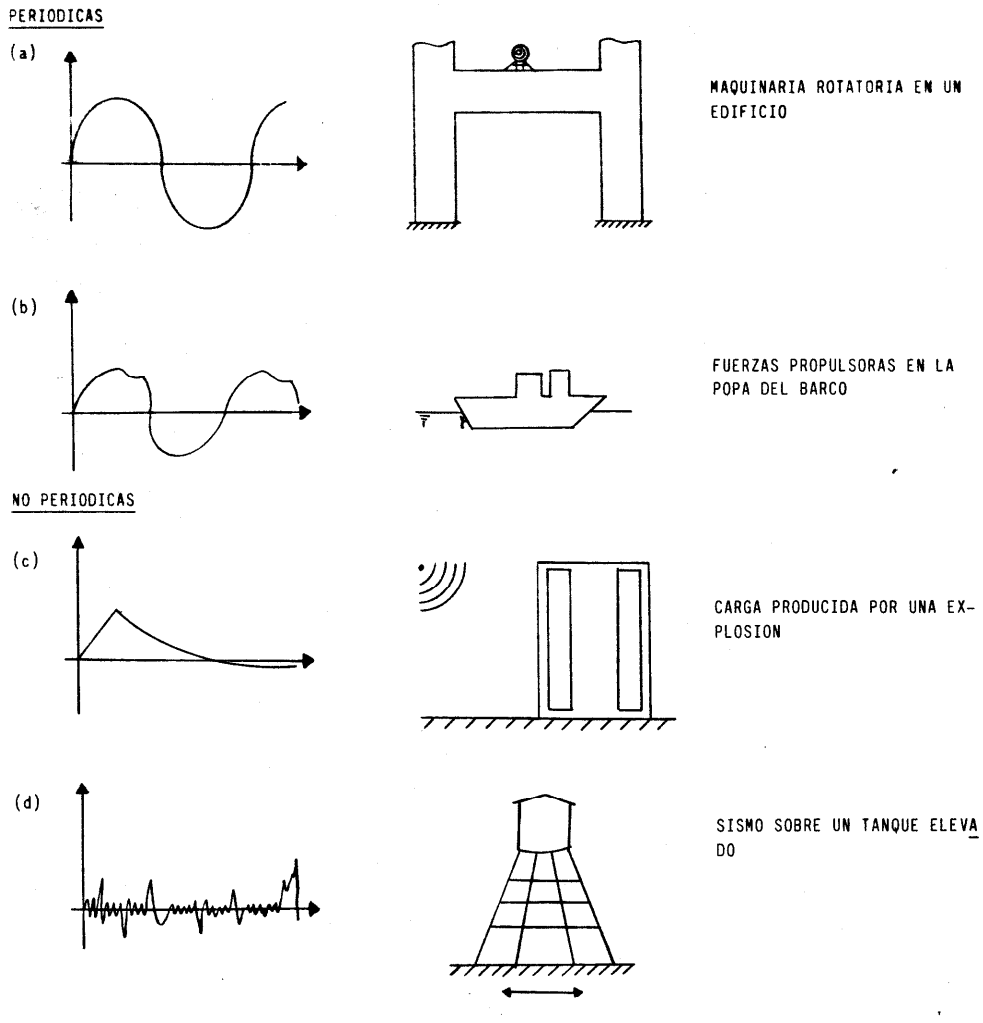


FIG. 1.2 CARACTERISTICAS Y FUENTES DE CARGAS DINAMICAS TIPICAS: (a) ARMONICA SIMPLE, (b) COMPLEJA, (c) IMPULSIVA, (d) LARGA DURACION.

balanceo en maquinaria rotatoria. Otras formas de carga periódica, como aquéllas causadas por presiones hidrodinámicas generadas por un propulsor en la popa de un barco, son más complejas. Sin

embargo, por medio de un análisis (Fourier), cualquier carga periódica puede ser representada como la suma de una serie de componentes armónicas simples; así, en pricipio, el análisis de la respuesta a cualquier carga periódica sigue un mismo procedimiento generalizado.

Las cargas no periódicas pueden ser, o cargas IMPULSIVAS de corta duración o formas de cargas generales de larga duración. Una explosión es una fuente típica de carga impulsiva; para dichas cargas de corta duración, pueden emplearse formas de análisis simplificadas. Por otra parte, una carga de larga duración tal como la que podría resultar de un sismo puede ser tratada solo por medio de procedimientos de análisis dinámico completamente generales.

1.5 ETAPAS FUNDAMENTALES DE UN PROBLEMA DE DINAMICA ESTRUCTURAL.

La Fig. 1.3 ilustra los pasos típicos que se siguen en una investigación dinámica. En este diagrama se distinguen tres etapas principales: DISEÑO, ANALISIS Y EXPERIMENTACION. Sin embargo, es frecuente que solo se necesite uno o dos de estos pasos; por ejemplo, un Ingeniero Civil puede ser solicitado para ejecutar un análisis dinámico de una presa existente y confirmar el análisis llevando a cabo pruebas de la presa. El resultado de este análisis y experimentación puede conducirnos al criterio para determinar la profundidad máxima de agua que garantice la seguridad del sistema contra fallas debidas a temblores de intensidad especificada.

Quizás el paso de más demanda en cualquier análisis dinámico sea la creación de un modelo matemático de la estructura. Este proceso esta representado por las secciones 2a y 2b de la Fig. 1.3. Para el paso 2a debemos idear un modelo idealizado del sistema estructural en estudio, un modelo esencialmente parecido al sistema real (el cual puede ya existir o sólo aparecer en planos) pero más fácil de analizar. Este MODELO ANALITICO consiste de:

(1) Un conjunto de suposiciones simplificantes para reducir el --

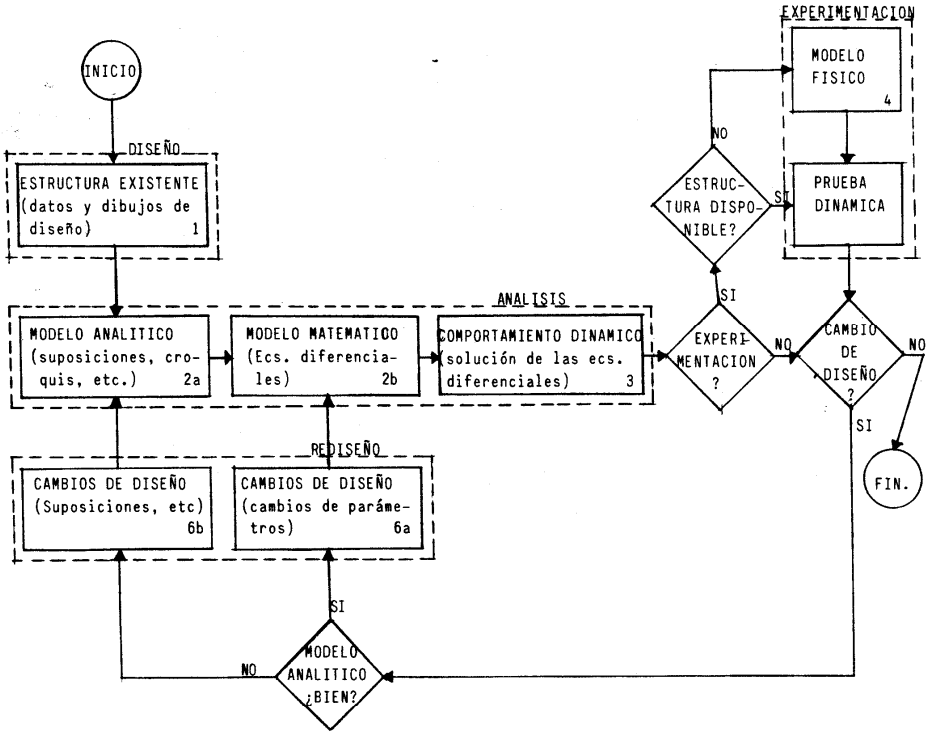


Fig. 1.3 DIAGRAMA DE PASOS EN UNA INVESTIGACION DINAMICA

sistema real al modelo analítico.

(2) Un juego de planos o dibujos que describan el modelo analítico, y

(3) Un listado de los parámetros de diseño (medidas, materiales, etc.).

A fin de crear un modelo analítico útil debemos enten--

der claramente el uso intencionado del mismo, ésto es, los tipos de comportamiento del sistema real que el modelo se supone representa fielmente. La complejidad del modelo analítico está determinada por los tipos de comportamiento que debe representar.

Una vez que ha sido creado el modelo analítico de la estructura que se estudia, pueden entonces aplicarse las leyes físicas para obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento que describan, en lenguaje matemático, el modelo analítico. El conjunto de ecuaciones diferenciales del movimiento más sus correspondientes condiciones iniciales y/o de frontera, es llamado MODELO MATEMATICO de la estructura. Para obtenerlo se usan los métodos estudiados en dinámica, como la Ley de Newton, y en la mecánica de cuerpos deformables, como relaciones fuerza-desplazamiento; y combinándolos se llega a las ecuaciones que describen el COMPORTAMIENTO DINAMICO de una estructura deformable.

Para los propósitos de este trabajo, cabe aclarar que nos circunscribiremos al análisis para un problema dinámico dentro del cual se usarán los modelos tradicionales elástico-lineales, algunos modelos elático-no lineales sencillos y elasto-plásticos, haciendo énfasis en el establecimiento del modelo matemático y del comportamiento dinámico.

2

"MODELOS MATEMATICOS DE LOS SISTEMAS"

No siempre es posible obtener soluciones matemáticas - rigurosas para problemas de Ingeniería. Debido a ello, en el caso de problemas complejos propios de materiales no elásticos cargados y en condiciones límites, la Ingeniería introduce suposiciones e idealizaciones con el fin de que el problema sea matemáticamente manejable y obtener soluciones satisfactorias desde el punto de vista de seguridad y economía. El enlace entre el sistema físico real y las soluciones está dado por el MODELO MATEMATICO.

2.1 GRADOS DE LIBERTAD.

Al número de coordenadas independientes necesarias para especificar la configuración o posición de un sistema para -- cualquier tiempo a que se haga referencia, se le denomina NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD, siendo cada coordenada independiente un - GRADO DE LIBERTAD.

Este número de Grados de Libertad puede reducirse se-- leccionando el Modelo Matemático adecuado. Algunos ejemplos de estructuras las cuales pueden representarse para un Análisis Dinámico como estructuras de un solo grado de libertad, se mues--- tran en la Fig. 2.1 .

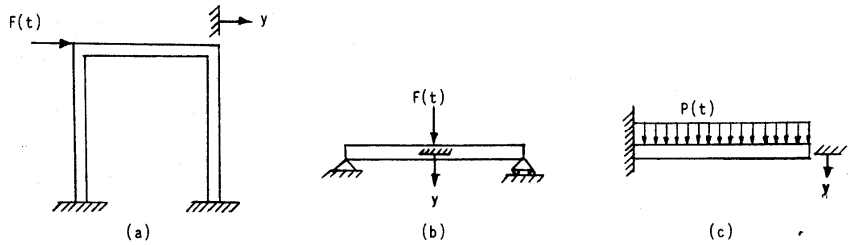


FIG. 2.1 . ESTRUCTURAS DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD.

Estas estructuras son de un solo grado de libertad porque basta con conocer la coordenada independiente Y para especificar la posición del sistema para cualquier tiempo t .

La Fig. 2.2 muestra, por el contrario, estructuras con varios grados de libertad.

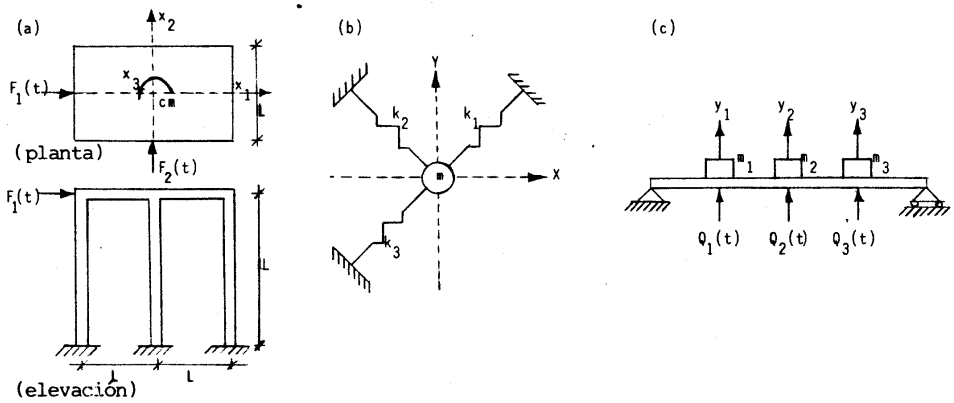


FIG. 2.2 ESTRUCTURAS CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.

La estructura de la Fig. 2.2a es de tres grados de libertad debido a que se necesitan conocer X_1, X_2 y X_3 para definir la posición de la misma para cualquier tiempo. La posición de la estructura mostrada en la Fig. 2.2b quedará definida para cualquier tiempo, conociendo las coordenadas X e Y; entonces decimos que tiene dos grados de libertad. De la misma forma podemos decir que la estructura de la Fig. 2.2c es de tres grados de libertad.

Ahora bien, si la estructura de la Fig. 2.2a fuera de varios pisos, el número de grados de libertad se obtendrá multiplicando el número de pisos por tres; es decir, tres grados de libertad por cada uno de los niveles.

2.2 LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON.

Para definir el movimiento de un cuerpo o estructura, es decir, predecir el desplazamiento o velocidad de la masa "m" para cualquier tiempo t, se utiliza la SEGUNDA LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON la cual se expresa como:

$$F = m\,a \tag{2.1}$$

donde F es la fuerza actuante en una partícula o cuerpo rígido de masa constante m y a es la aceleración resultante.

La aceleración se define como la segunda derivada del desplazamiento con respecto al tiempo, es decir,

$$a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.2}$$

2.3 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE.

Para obtener la solución de los problemas de dinámica en forma sistemática y organizada, se aconseja dibujar primero el DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE del sistema antes de formular la descripción matemática del mismo.

El diagrama de cuerpo libre, es un croquis del cuerpo aislado, en el que se muestran las fuerzas externas que actúan

sobre él.

Para el sistema mostrado en la Fig. 2.3a el diagrama de cuerpo libre de la masa está representado por la Fig. 2.3b.

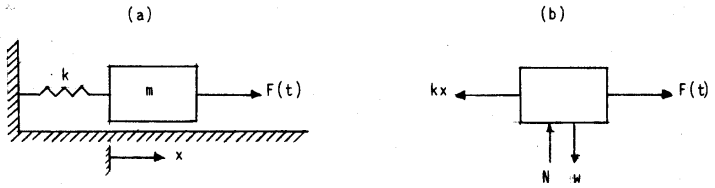


FIG. 2.3 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE.

El peso W y la reacción N de la superficie soportante que también son mostrados en la Fig. 2.3b no entrarán dentro de la ecuación de movimiento escrita para la dirección x, ya que actúan en sentido vertical. Haciendo suma de fuerzas en la dirección horizontal en el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 2.3b y aplicando la Segunda Ley de Newton, se obtiene

$$F(t) - kx = m\ddot{x} \qquad (2.3)$$

2.4 PRINCIPIO DE D'ALEMBERT.

Este principio puede usarse en forma alternativa a la Segunda Ley de Newton, para obtener la ecuación de movimiento. Establece que: "un sistema puede estar en estado de equilibrio dinámico, adicionando a las fuerzas externas las fuerzas de inercia". Las fuerzas de inercia son iguales al producto de la masa por la aceleración ma y de sentido contrario al de la aceleración.

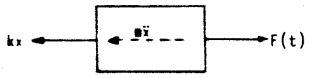


FIG. 2.4 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE.

Para el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 2.4, aplicando el Principio D'Alembert, la ecuación del movimiento queda expresada como,

$$F(t) - kx - m\ddot{x} = 0 \qquad (2.4)$$

Si comparamos las ecs. (2.3) y (2.4) podemos observar que son exactamente iguales, lo cual nos indica que para obtener la ecuación diferencial del movimiento pueden aplicarse indistintamente la Segunda Ley de Newton o el Principio de D'Alembert.

2.5 DETERMINACION DEL MODELO MATEMATICO DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD.

Para obtener el modelo matemático de un marco plano de un nivel y una crujía, como el mostrado en la Fig.2.5a, se consideran las siguientes hipótesis con el objeto de simplificar el análisis:

- Las trabes son infinitamente rígidas comparadas con las columnas.
- La masa de las columnas es despreciable en comparación con las de trabes y losas.
- Los muros no soportan cargas.
- A nivel de la trabe se aplica una fuerza que varía con el tiempo.

Aplicando la Segunda Ley de Newton al diagrama de cuerpo libre de la Fig. 2.5d se obtiene,

$$F(t) - \frac{12EI}{h^3}x - \frac{12EI}{h^3}x = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + \frac{24EI}{h^3}x = F(t) \qquad (2.5)$$

Definamos

$$k = \frac{24EI}{h^3} \qquad (2.6)$$

Sustituyendo la ec. (2.6) en la ec. (2.5) se obtiene la ecuación

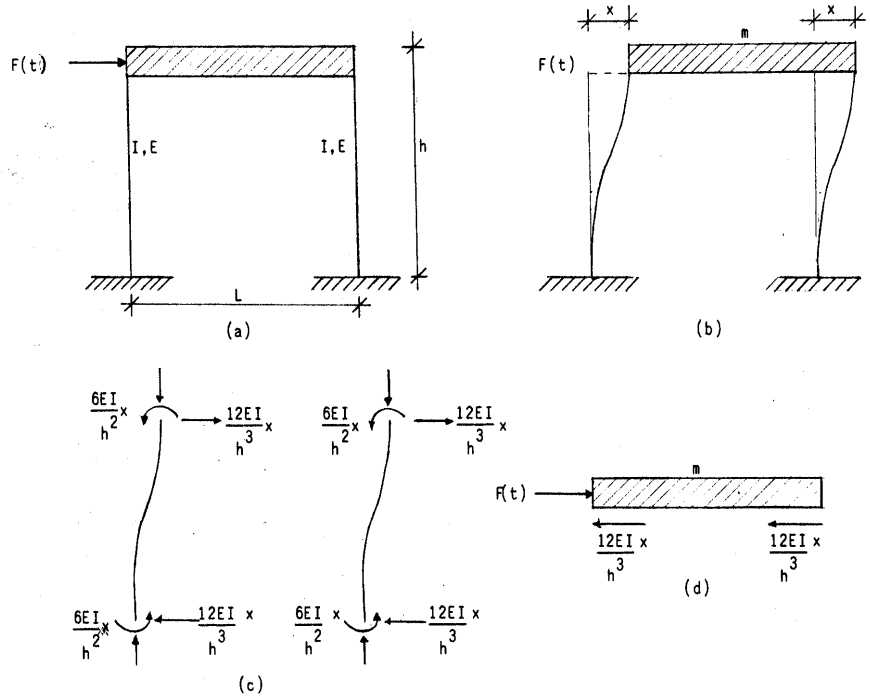


FIG. 2.5 SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD

diferencial de movimiento para sistemas de un solo grado de li-- bertad,

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \tag{2.7}$$

Si a la ec. (2.7) agregamos las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad:

$$x(t=0) = x_o$$
$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_o$$

se obtiene el MODELO MATEMATICO PARA SISTEMAS DE UN SOLO GRADO - DE LIBERTAD y al resolverlo se obtienen los desplazamientos del marco para cualquier tiempo t, con los cuales a su vez, pueden - determinarse los cortantes, momentos flexionantes y las reacciones para cualquier tiempo.

2.6 DETERMINACION DEL MODELO MATEMATICO DE UN SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD.

Ejemplificaremos este caso considerando la variación en el tiempo de los desplazamientos horizontales de las trabes de un marco plano de dos niveles y una crujía, como el mostrado en la Fig. 2.6a; tomando en cuenta las mismas hipótesis simplificatorias usadas en el punto anterior.

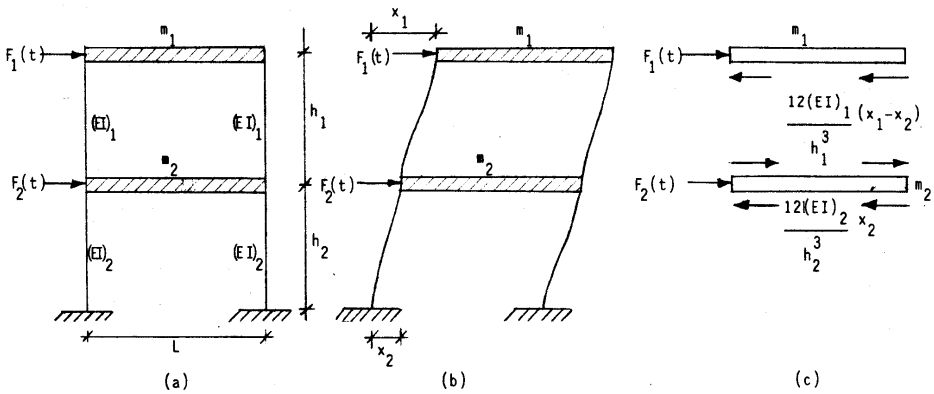


FIG. 2.6 SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

Si aplicamos la Segunda Ley de Newton a los diagramas de cuerpo libre de las trabes, Fig. 2.6c, resultan obvios los siguientes desarrollos:

$$\text{(masa 1)} \quad F_1(t) - \frac{24(EI)_1}{h_1^3}(x_1-x_2) = m_1\ddot{x}_1 \tag{2.8}$$

$$\text{(masa 2)} \quad F_2(t) + \frac{24(EI)_1}{h_1^3}(x_1-x_2) - \frac{24(EI)_2}{h_2^3}x_2 = m_2\ddot{x}_2$$

Definamos

$$k_1 = \frac{24(EI)_1}{h_1^3} \qquad y \qquad k_2 = \frac{24(EI)_2}{h_2^3} \tag{2.9}$$

y sustituyendo las ecs. (2.9) en las ecs. (2.8), se obtienen las

ecuaciones diferenciales del movimiento para sistemas de dos grados de libertad,

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1(x_1-x_2) = F_1(t)$$
$$m_2\ddot{x}_2 - k_1(x_1-x_2) + k_2x_2 = F_2(t) \qquad (2.10)$$

Si a las ecuaciones anteriores agregamos las condiciones iniciales:

$$x(t=0) = x_o$$
$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_o$$

se obtiene el MODELO MATEMATICO DE SISTEMAS DE DOS GRADOS DE LIBERTAD.

Resulta interesante determinar para qué rango de valores de las rigideces a la flexión de columna a trabe puede considerarase que ésta última es infinitamente rígida, ya que ésto nos permitirá un ahorro considerable de cálculo numérico al determinar la rigidez de la estructura. Esto se hace más notorio en sistemas de varios grados de libertad, y para tal fin, al final de este capítulo haremos un análisis detallado para el caso de un marco plano de un nivel y una crujía.

2.7 MODELO MASA-RESORTE.

Este modelo está formado por una masa m y un resorte de rigidez k como se muestra en la Fig. 2.7

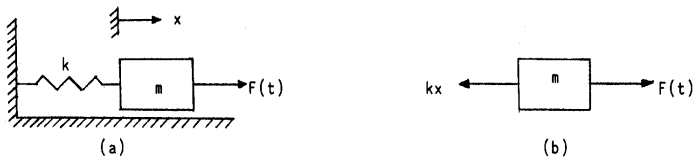


FIG. 2.7 MODELO MASA-RESORTE
(1 G. L.)

La fuerza del resorte es igual al producto de su rigidez k por su elongación x y de sentido contrario al desplazamiento x de la

masa m.

Si aplicamos la Segunda Ley de Newton al diagrama de cuerpo libre de la masa, Fig. 2.7b,

$$-kx + F(t) = m\ddot{x}$$

ó

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \tag{2.11}$$

Ahora, consideremos el modelo masa-resorte formado por dos masas y dos resortes tal como se muestra en la Fig. 2.8 .

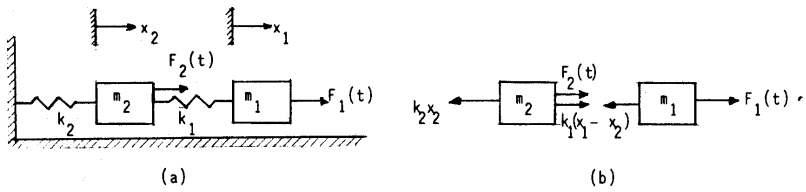


FIG. 2.8 MODELO MASA-RESORTE
(2 G. L.)

De igual manera, del diagrama de cuerpo libre para m_1 y m_2 tenemos,

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k_1(x_1-x_2) &= F_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 - k_1(x_1-x_2) + k_2x_2 &= F_2(t) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Comparando las ecs. (2.7) y (2.11) y las ecs. (2.10) y (2.12) podemos observar que son exactamente iguales. De aquí podemos concluir que un marco plano con trabes infinitamente rígidas puede representarse por un modelo masa-resorte (una o más masas y resortes).

La adopción de los modelos masa-resorte, Figs. 2.7 y 2.8, supone que cada elemento del sistema representa una propiedad particular de la estructura, es decir, la masa representa la propiedad de inercia mientras que el resorte representa la elasticidad. Los elementos"puros" no existen en la realidad, por lo que los modelos masa-resorte son sólo idealizaciones de las estructuras reales,pero proporcionan conocimientos completos y e--

xactos del comportamiento de la estructura real.

Como un ejemplo determinaremos el modelo masa-resorte y el modelo matemático para la viga de la Fig. 2.9 .

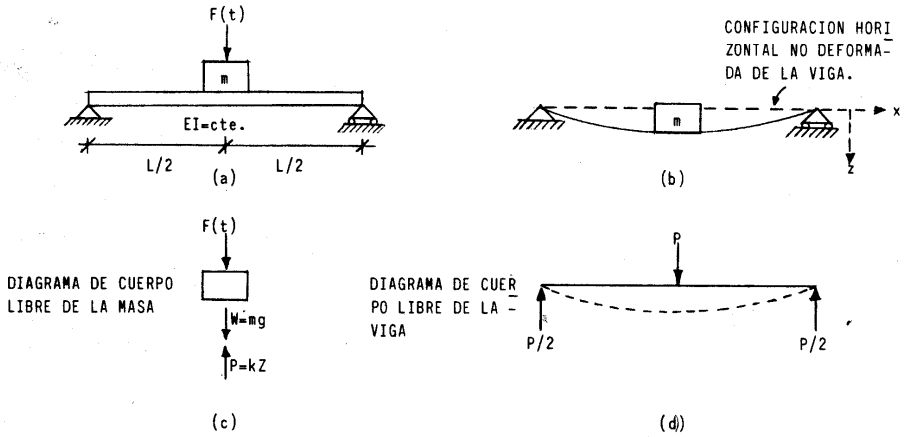


FIG. 2-9 VIGA SIMPLEMENTE APOYADA

Partiendo de que el desplazamiento máximo para una viga simplemente apoyada está dado por

$$Z = \frac{PL^3}{48EI} \quad \text{así} \quad P = \frac{48\ EI}{L^3}\ Z = kZ$$

de donde

$$k = \frac{48EI}{L^3}$$

del diagrama de cuerpo libre se obtiene la ecuación diferencial del movimiento:

$$\begin{aligned} m\ddot{Z} + kZ &= F(t) + mg \\ Z(t=0) &= Z_o \\ \dot{Z}(t=0) &= \dot{Z}_o \end{aligned} \qquad (2.13)$$

que representa el modelo matemático para la viga y el modelo masa resorte se ilustra en la Fig. 2.10

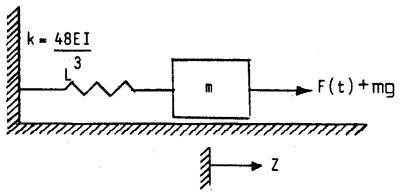


FIG. 2.10 MODELO MASA-RESORTE PARA UNA VIGA SIMPLEMENTE APOYADA

2.8 DESPLAZAMIENTO RELATIVO RESPECTO A LA POSICION DE EQUILIBRIO ESTATICO.

Continuando con la viga simplemente apoyada del ejemplo anterior, al colocar sobre ésta el bloque de masa m, sin la acción de la fuerza externa F(t), el desplazamiento máximo será igual a

$$\frac{mgL^3}{48EI} = u$$

A esta posición de la viga, debida solo al peso del bloque mg, se le denomina POSICION DE EQUILIBRIO ESTATICO lo cual se ilustra en la figura 2.11 .

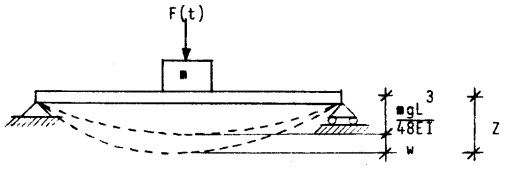


FIG. 2.11 POSICION DE EQUILIBRIO ESTATICO

Al actuar la fuerza externa F(t), el desplazamiento se incrementará una cantidad w, por lo tanto el desplazamiento total Z será igual a

$$Z = u + w$$

Despejando w, y derivando la ecuación resultante tenemos

$$w = Z - u$$

$$w = Z - \frac{mgL^3}{48EI}$$

$$\dot{w} = \dot{Z}$$

$$\ddot{w} = \ddot{Z}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.13):

$$m\ddot{w} + k\left(\frac{mgL^3}{48EI} + w\right) = F(t) + mg$$

$$m\ddot{w} + k\,\frac{mgL^3}{48EI} + kw = F(t) + mg$$

$$m\ddot{w} + k\,\frac{mg}{k} + kw = F(t) + mg$$

$$m\ddot{w} + kw = F(t) \qquad (2.14)$$

$$w(0) = w_o$$

$$\dot{w}(0) = \dot{w}_o$$

La ecuación (2.14) es el modelo matemático para el modelo mostrado en la figura 2.12.

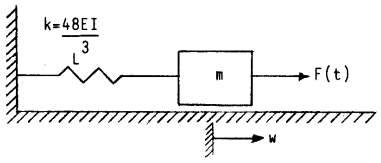


FIG. 2.12 MODELO MASA-RESORTE

De aquí se concluye que al estudiar la variación en el tiempo de los desplazamientos a partir de la posición de equilibrio estático, es equivalente a suponer que el sistema se está moviendo en un lugar donde la gravedad es nula.

2.9 RESORTES EN SERIE O EN PARALELO.

Hay sistemas que constan de dos o más resortes colocados en serie o en paralelo; debido a ello, es necesario determinar la constante equivalente del resorte k_e.

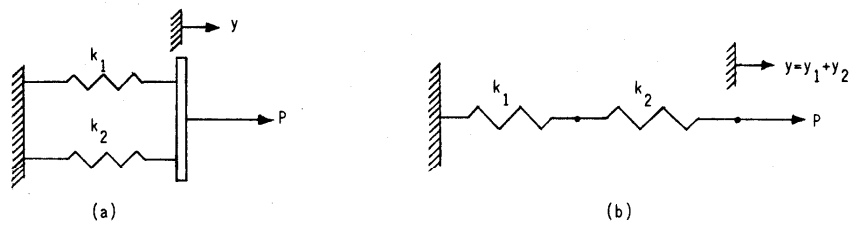


FIG. 2.13 (a) RESORTES EN PARALELO, (b) RESORTES EN SERIE

La fuerza total requerida en dos resortes en paralelo, para producir un desplazamiento unitario relativo en sus extremos, es igual a la suma de sus constantes. Esta fuerza se denomina constante equivalente del resorte y está dada por:

$$k_e = k_1 + k_2$$

En general:

$$k_e = \sum_{i=1}^{n} k_i \qquad (2.15)$$

para resortes en paralelo.

Cuando los resortes estan conectados en serie, Fig. --- 2.13(b), la fuerza P produce un desplazamiento relativo en los resortes

$$y_1 = \frac{P}{k_1} \qquad y \qquad y_2 = \frac{P}{k_2}$$

El desplazamiento total del extremo libre del resorte es igual a $y_1 + y_2$.

$$y = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2}$$

Consecuentemente, la fuerza necesaria para producir un desplaza-- miento unitario o constante equivalente del resorte está dada por

$$k_e = \frac{P}{y} \qquad \text{o bien} \qquad y = \frac{P}{k_e}$$

y sustituyendo en la ecuación anterior

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

En general:

$$\frac{1}{k_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} \tag{2.16}$$

para resortes en serie.

2.10 MODELO MASA-RESORTE-AMORTIGUADOR.

Este modelo, además de la masa y el resorte, consta de un amortiguador que representa las características de disipación o pérdida de energía de una estructura real. Este modelo está representado en la figura 2.14

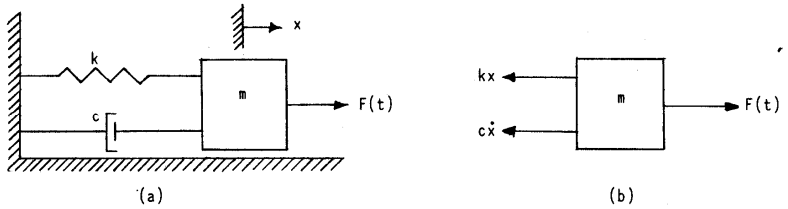


FIG. 2.14 MODELO MASA-RESORTE-AMORTIGUADOR

La fuerza ejercida por el amortiguador es igual a su constante c por la velocidad $\dot{x}$, pero de sentido contrario a ésta.

Haciendo suma de fuerzas en el diagrama de cuerpo libre

$$F = m\ddot{x}$$

$$F(t) - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

y reordenando términos

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{2.17}$$

$$x(0) = x_o$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_o$$

Esta ecuación es conocida como LA ECUACION FUNDAMENTAL DE LA DINAMICA ESTRUCTURAL PARA EL CASO AMORTIGUADO.

2.11 COMENTARIOS.

Como ilustraremos en los ejemplos resueltos en este capítulo, muchas estructuras reales de interés para el Ingeniero Civil, se pueden modelar como un sistema masa-resorte (con o sin amortiguador) y considerando que los sistemas de varios grados de libertad, bajo ciertas circunstancias, son equivalentes a un conjunto de sistemas masa-resorte (con o sin amortiguador) independientes; resulta plenamente justificado el estudiar de manera un tanto exhaustiva la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ecs. (2.7) y (2.17), de las que con toda razón se puede decir que son fundamentales para la Dinámica Estructural.

2.12 PROBLEMAS RESUELTOS.

P.2.1. Hacer un análisis detallado del marco mostrado en la figura P.2.1, determinando para qué rango de valores de las rigideces a la flexión de columna a trabe puede considerarse que ésta última es INFINITAMENTE RIGIDA.

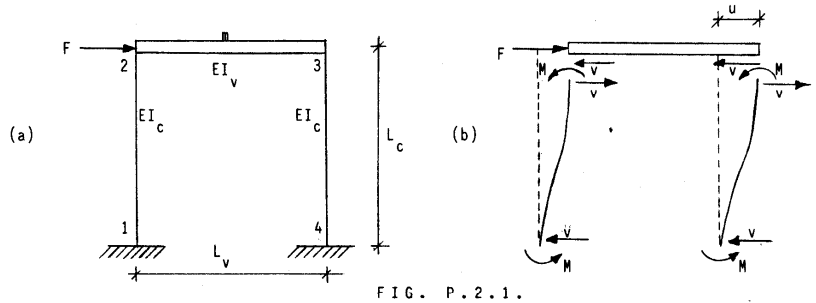


FIG. P.2.1.

SOLUCION:

Considerando que la trabe es infinitamente rígida, se cumple

$$\frac{EIv}{Lv} \ggg \frac{EIc}{Lc} \qquad (a)$$

En una columna empotrada en sus dos extremos, el momento flexio--

nante y la fuerza cortante en sus extremos, están dados por:

$$M = \frac{6EI}{L_c^2}\,u \quad ; \qquad V = \frac{12EI}{L_c^3}\,u \tag{b}$$

La rigidez del marco, considerando que la trabe es infinitamente rígida, es de la forma

$$k_v = \frac{24EI_c}{L_c^3} \tag{c}$$

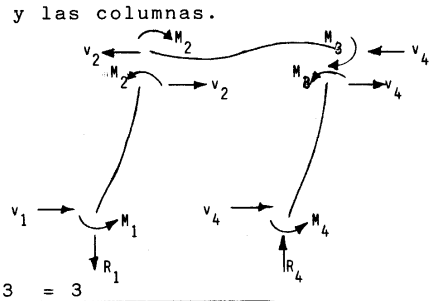
La trabe y las columnas tienen rigideces relativas comparables, - es decir,

$$\frac{EI_v}{L_v} = C\,\frac{EI_c}{L_c} \quad , \; C = \text{cte.} \tag{d}$$

Ahora, considerando que la trabe es flexible, la rigidez está dada por

$$k = \frac{F}{u} \tag{e}$$

Para determinar los elementos mecánicos del marco en estudio, utilizaremos una solución condensada (*) . En la siguiente figura se muestran los momentos flexionantes, fuerzas cortantes y reacciones en la trabe y las columnas.



$$k^* = \frac{3}{D\phi} = \frac{3}{\frac{2I_cL_v}{I_vL_c}\;1 + \frac{6I_vL_c}{I_cL_v}} \tag{f}$$

Donde $\quad D = 2(1 + 6/\phi)$

$$\phi = \frac{I_c}{I_v} \cdot \frac{L_v}{L_c}$$

(*) "PORTICOS Y ARCOS", VALERIAN LEONTOVICH, PAG. 53, 64

donde k* es la constante del marco, D y ø son constantes de la estructura.

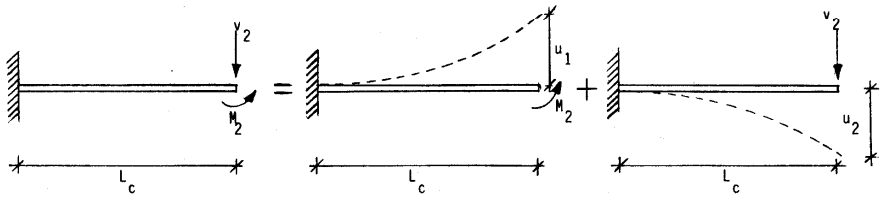
$$M_1 = M_4 = FLc(\tfrac{1}{2} - k^*)$$

$$M_2 = M_3 = FLck^* \qquad (g)$$

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = F/2$$

$$R_1 = R_4 = \frac{2FLck^*}{Lv}$$

El desplazamiento u se determinará analizando una de las columnas como una viga en voladizo con un momento y una fuerza aplicados en el extremo libre. Para simplificar el trabajo, determinaremos el desplazamiento de una viga en voladizo con un momento aplicado en el extremo libre y luego con una fuerza y después superpondremos los desplazamientos:



Los desplazamientos estan dados por las siguientes ecuaciones:

$$u_1 = \frac{M_2 Lc^2}{2EIc}$$

$$u_2 = \frac{V_2 Lc^3}{3EIc}$$

$$u = u_1 + u_2 = -\frac{M_2 Lc^2}{2EIc} + \frac{V_2 Lc^3}{3EIc} \qquad (h)$$

Sustituyendo el valor de k* en la ecuación de M_2:

$$M_2 = \frac{3FLc}{2\frac{IcLv}{IvLc}\ 1 + \frac{6IvLc}{IcLv}}$$

Sustituyendo los valores de M_2 y V_2 en la ec. (h) se determina el desplazamiento total de la estructura, u :

$$u = \frac{FL_c^3}{2EIc}\,\frac{1}{3} - \frac{3}{\frac{2IcLv}{IvLc}\,1 + 6\frac{IvLc}{IcLv}} \qquad (i)$$

y finalmente, sustituyendo la ecuación (i) en la ecuación (e)

$$k = \frac{2EIc}{L_c^3\,\frac{1}{3} - \frac{3}{\frac{2IcLv}{IvLc}\,1 + 6\frac{IvLc}{IcLv}}} \qquad (j)$$

Al relacionar las rigideces considerando a la viga flexible y rígida, se obtiene la relación de rigideces k/k_v. Si graficamos la relación de inercias y longitudes de columnas y trabes IvLc/IcLv (eje x) contra la relación de rigideces k/k_v, se obtiene la gráfica de la Figura 2.15; para la construcción de ésta -- nos auxiliamos de la siguiente tabla:

IvLc/IcLv	k	k/kv
0	$6EIc/L_c^3$	0.25
1	$84EIc/5L_c^3$	0.70
2	$39EIc/2L_c^3$	0.81
3	$228EIc/11L_c^3$	0.86
4	$150EIc/7L_c^3$	0.89
5	$372EIc/17L_c^3$	0.91
6	$222EIc/10L_c^3$	0.92
10	$183EIc/8L_c^3$	0.95
20	$23.42EIc/L_c^3$	0.97

De la gráfica se observa que para fines prácticos, para relación de rigideces relativas de vigas y columnas del orden de 5, se puede considerar que las vigas son infinitamente rígidas y el error que se cometerá será menor del 10%.

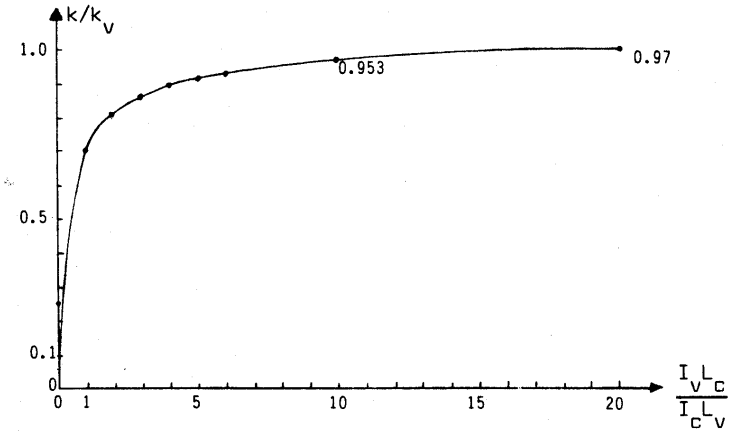


FIG. 2.15

P.2.2. Determinar la ecuación diferencial que gobierna el movimiento del bloque de masa m, de la figura P.2.2.

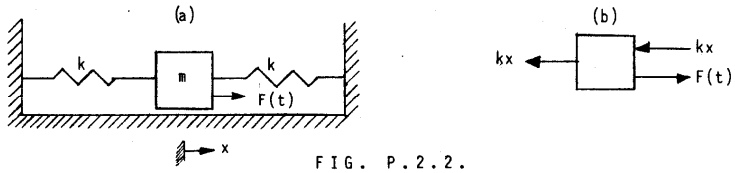


FIG. P.2.2.

SOLUCION:

Haciendo suma de fuerzas en el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura P.2.2(b):

$$\rightarrow \Sigma F = m\ddot{x}$$

$$F(t) - kx - kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + 2kx = F(t) \qquad \text{RESPUESTA}$$

P.2.3. Para la estructura de la figura P.2.3, determinar el modelo masa-resorte equivalente y el modelo matemático.

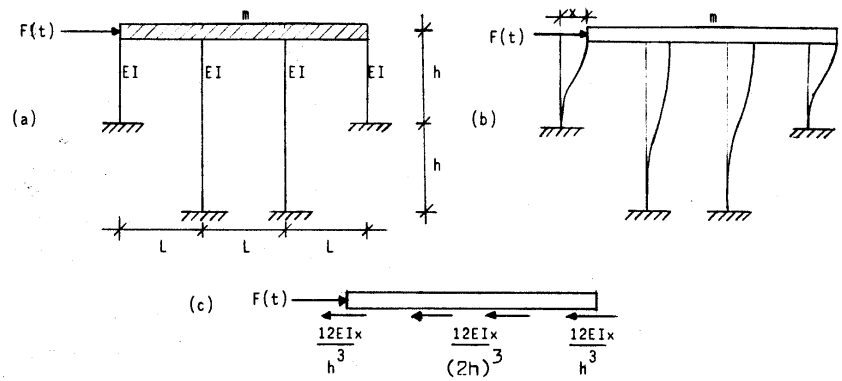
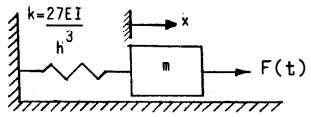


FIG. P.2.3.

Haciendo suma de fuerzas cortantes en el diagrama de -- cuerpo libre, figura P.2.3(c) y haciendo x=1, se obtiene la rigidez de la estructura:

$$k = 2\,\frac{12EI}{h^3} + 2\,\frac{12EI}{(2h)^3} = \frac{27EI}{h^3}$$

Por lo tanto, el modelo masa-resorte equivalente es de la forma:



RESPUESTA

Haciendo suma de fuerzas en el diagrama de cuerpo libre del modelo, se obtiene:

$$\rightarrow \Sigma F = m\ddot{x}$$

$$F(t) - \frac{27EIx}{h^3} = m\ddot{x}$$

Reacomodando términos en la ecuación anterior y agregando las condiciones iniciales de velocidad y desplazamiento, se obtiene el - modelo matemático:

$$m\ddot{x} + \frac{27EIx}{h^3} = F(t), \quad x(t=0) = x_o, \quad \dot{x}(t=0) = \dot{x}_o$$

RESPUESTA

P.2.4. Para el sistema de la figura P.2.4., determine la rigidez equivalente k_e y la ecuación diferencial del movimiento del bloque de masa m .

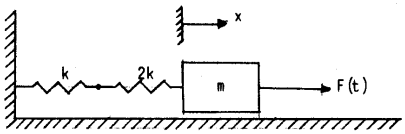


FIG. P.2.4.

SOLUCION:

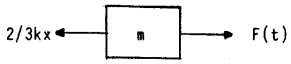
Debido a que los resortes estan en serie, la rigidez equivalente estará dada por:

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Sustituyendo :

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} = \frac{3}{2k}$$

$$k_e = \frac{2k}{3}$$ RESPUESTA



Y haciendo sumatoria de fuerzas en el diagrama de cuerpo libre anterior y reacomodando términos, se obtiene la ecuación diferencial de movimiento:

$$m\ddot{x} + \frac{2kx}{3} = F(t)$$ RESPUESTA

P.2.5. Obtener la rigidez equivalente para el sistema de la figura P.2.5.

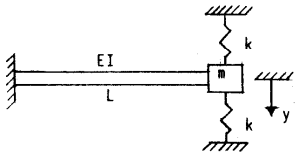


FIG. P.2.5.

SOLUCION:

Como los resortes y la viga estan conectados en paralelo:

$$k_e = k_v + k_r + k_r$$

La rigidez de la viga en voladizo, k_v, se obtiene a partir de la flecha máxima:

$$Z = \frac{PL^3}{3EI} \text{ , si } Z = 1\text{, entonces } k_v = \frac{3EI}{L^3}$$

Sustituyendo los valores de k_v y k_r:

$$k_e = \frac{3EI}{L^3} + k + k$$

$$k_e = \frac{3EI}{L^3} + 2k$$ RESPUESTA

P.2.6. Obtener el modelo matemático para el sistema de la figura P.2.6, a partir de la posición de equilibrio.

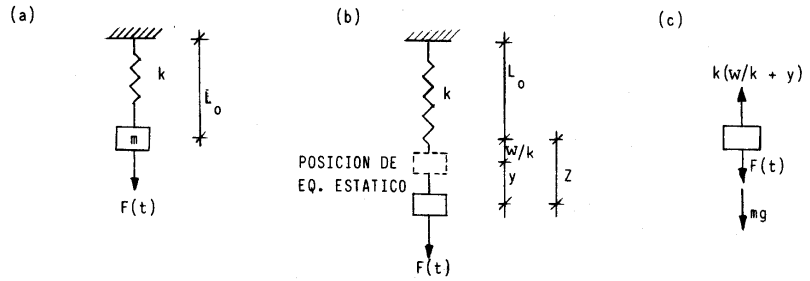


FIG. P.2.6.

SOLUCION:

De la figura P.2.6(b), podemos observar que Z está dada por:

$$Z = \frac{w}{k} + y$$

donde: $\frac{w}{k}$ = desplazamiento estático (constante)

y = desplazamiento dinámico (variable)

Derivando respecto de y la expresión para Z:

$$\dot{z} = \dot{y}$$

$$\ddot{z} = \ddot{y}$$

Haciendo suma de fuerzas en el diagrama de cuerpo libre de la figura P.2.6(c), y aplicando la 2ª Ley de Newton, obtenemos la ecuación del movimiento:

$$\uparrow \Sigma F = m\ddot{z}$$

$$F(t) + w - k(w/k + y) = m\ddot{y}$$

$$F(t) - ky = m\ddot{y}$$

Reordenando términos en la ecuación anterior y adicionando las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad se obtiene finalmente el modelo matemático:

$$m\ddot{y} + ky = F(t)$$

$$y(t=0) = y_o$$

$$\dot{y}(t=0) = \dot{y}_o$$

RESPUESTA

Al comparar la ecuación de movimiento obtenida en este ejemplo, con la ecuación (2.11) nos damos cuenta de que son exactamente iguales; por lo tanto, puede concluirse que es lo mismo modelar un sistema como un cuerpo sostenido por un resorte moviéndose verticalmente, o como un cuerpo vibrando a lo largo de un eje horizontal.

3

"VIBRACIONES LIBRES NO AMORTIGUADAS DE SISTEMAS CON UN SOLO GRADO DE LIBERTAD"

Iniciaremos el estudio de la Dinámica Estructural con el análisis de los Sistemas de un Grado de Libertad, en el cual despreciaremos las fuerzas de fricción o de amortiguamiento. Además, consideraremos que el Sistema, durante el movimiento o vibración, no está bajo la acción de fuerzas externas excitadoras. Debido a ésto, el movimiento del Sistema es gobernado solo por la influencia de las condiciones iniciales; ésto es, dando desplazamiento y velocidad para un tiempo t=0 cuando se inicia el estudio del fenómeno.

A un Sistema que cumple con estas condiciones, se le denomina SISTEMA DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD EN VIBRACIONES LIBRES NO AMORTIGUADAS.

La ecuación fundamental de la Dinámica Estructural para los sistemas de un grado de libertad sin amortiguamiento, está dada por la ecuación (3.1)

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \tag{3.1}$$

Pero en el caso de los sistemas sujetos a vibraciones libres, la fuerza excitadora $F(t) = 0$; sustituyendo este valor en la ecuación (3.1), obtenemos la ecuación que gobierna el movimiento del sistema

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{3.2}$$

3.1 PROBLEMA DE VALORES INICIALES PARA EL MOVIMIENTO EN VIBRACIONES LIBRES DE SISTEMAS DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD.

El objetivo de esta sección es encontrar la solución de la ecuación diferencial (3.2), para las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad, comúnmente denominado "PROBLEMA DE VALORES INICIALES", el cual queda definido por el siguiente modelo matemático:

$$\begin{aligned} &m\ddot{x} + kx = 0 \\ &x(t=0) = x_o \\ &\dot{x}(t=0) = \dot{x}_o \end{aligned} \tag{3.3}$$

Primeramente clasificaremos la ecuación diferencial (3.2). Debido a que la variable dependiente x y su segunda derivada $\ddot{x}$, aparecen en primer grado en la ecuación (3.2), esta ecuación es clasificada como lineal y de segundo orden. De hecho, los coeficientes de x y $\ddot{x}$ (k y m respectivamente), son constantes y el segundo miembro es la función cero; por lo que la ecuación además se clasifica como homogénea con coeficientes constantes.

Para obtener la solución de esta ecuación diferencial de 2º orden, procederemos directamente suponiendo que la solución es de la forma dada por las ecuaciones (3.4) y (3.5)

$$x_1 = A \cos pt \tag{3.4}$$

$$x_2 = B \operatorname{sen} pt \tag{3.5}$$

donde A y B son constantes que dependen del inicio del movimiento y p representa una característica física del sistema.

Derivando respecto a t las ecuaciones (3.4) y (3.5) se obtiene

$$x_1 = A \cos pt$$
$$\dot{x}_1 = -Ap \text{ sen } pt \qquad (3.6)$$
$$\ddot{x}_1 = -Ap^2 \cos pt$$

$$x_2 = B \text{ sen } pt$$
$$\dot{x}_2 = Bp \cos pt \qquad (3.7)$$
$$\ddot{x}_2 = -Bp^2 \text{ sen } pt$$

y sustituyendo los valores de las ecs. (3.6) en la ec. (3.2)

$$m(-Ap^2 \cos pt) + k(A \cos pt) = 0$$
$$(-mp^2 + k)A \cos pt = 0$$

Si esta ecuación se satisface para cualquier tiempo t, entonces - el factor dentro del paréntesis debe ser cero, es decir

$$-mp^2 + k = 0$$
$$p^2 = \frac{k}{m} \qquad (3.8)$$

De la misma manera puede verificarse que las ecs. (3.7) satisfa-- cen la ec. (3.2) para p^2 definido por la ec. (3.8). La raíz positiva de la ecuación (3.8) es conocida como la frecuencia natural circular del sistema. Así, tenemos:

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (3.9)$$

Como ya se demostró, las funciones definidas en las e-- cuaciones (3.4) y (3.5) son soluciones de la ec. (3.2), y como ésta es lineal, la suma de dichas funciones también es solución, es decir

$$x = A \cos pt + B \text{ sen } pt \qquad (3.10)$$

Debido a que la ec. (3.10) consta de dos constantes de integración A y B, es en realidad la solución general de la ecuación diferencial de 2º orden (3.2).

Las ecuaciones de la velocidad y la aceleración se ob-- tienen derivando dos veces la ec. (3.10) respecto a t.

$$\dot{x} = -Ap \text{ sen } pt + Bp \cos pt \tag{3.11}$$

$$\ddot{x} = -Ap^2 \cos pt - Bp^2 \text{ sen } pt \tag{3.12}$$

Los valores de las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad:

$$x(t=0) = x_o$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_o$$

Sustituyendo estos valores en las ecs. (3.10) y (3.11), se obtiene:

$$A = x_o$$

$$B = \frac{\dot{x}_o}{p}$$

Finalmente, al sustituir los valores de A y B en las ecs. (3.10), (3.11) y (3.12) obtenemos las ecuaciones de desplazamiento, velocidad y aceleración para vibraciones libres de los sistemas de un grado de libertad no amortiguados.

$$x(t) = x_o \cos pt + \frac{\dot{x}_o}{p} \text{ sen } pt \tag{3.13}$$

$$\dot{x}(t) = -px_o \text{ sen } pt + \dot{x}_o \cos pt \tag{3.14}$$

$$\ddot{x}(t) = -p^2 x_o \cos pt - p\dot{x}_o \text{ sen } pt \tag{3.15}$$

Considerando el valor de x(t) dado por la ec. (3.13) -- puede determinarse la fuerza cortante y los momentos flexionantes en las columnas, en función del tiempo, para el marco plano de un nivel y una crujía mostrado en la Fig. 2.5 para F(t) = 0.

$$M(t) = \frac{6EI}{h^2} x(t) = \frac{6EI}{h^2}\left[x_o \cos pt + \frac{\dot{x}_o}{p} \text{ sen } pt\right] \tag{3.16}$$

$$V(t) = \frac{12EI}{h^3} x(t) = \frac{12EI}{h^3}\left[x_o \cos pt + \frac{\dot{x}_o}{p} \text{ sen } pt\right] \tag{3.17}$$

3.2 REPRESENTACION GRAFICA DE LAS VIBRACIONES LIBRES.

Al representar gráficamente, para distintas condiciones

iniciales de desplazamiento y velocidad, la variación en el tiempo del desplazamiento, velocidad y aceleración se tomarán como base las ecs. (3.13), (3.14) y (3.15).

Consideraremos los siguientes casos:

i) $x_o > 0$, $\dot{x}_o = 0$

Sustituyendo las condiciones iniciales en las ecs. del movimiento (3.13), (3.14) y (3.15)

$$x(t) = x_o \cos pt$$

$$\dot{x}(t) = -px_o \operatorname{sen} pt$$

$$\ddot{x}(t) = -p^2 x_o \cos pt$$

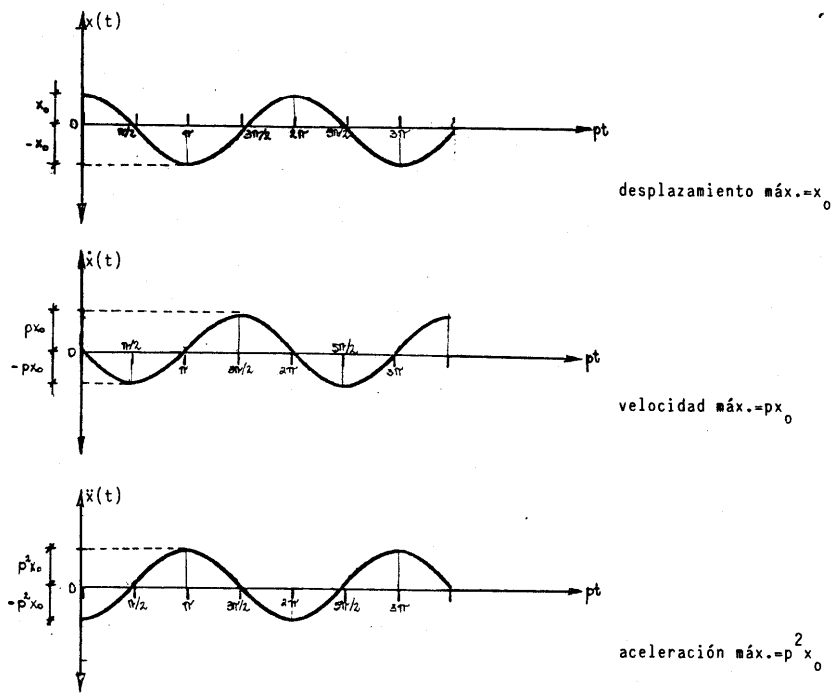


FIG. 3.1 REPRESENTACION GRAFICA DEL MOVIMIENTO PARA CONDICIONES INICIALES $x_o > 0$, $\dot{x}_o = 0$.

ii) $x_o = 0$, $\dot{x}_o > 0$.

Sustituyendo las condiciones iniciales en las ecs. del movi-- miento (3.13), (3.14) y (3.15)

$$x(t) = \frac{\dot{x}_o}{p} \text{ sen } pt$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_o \cos pt$$

$$\ddot{x}(t) = -p\dot{x}_o \text{ sen } pt$$

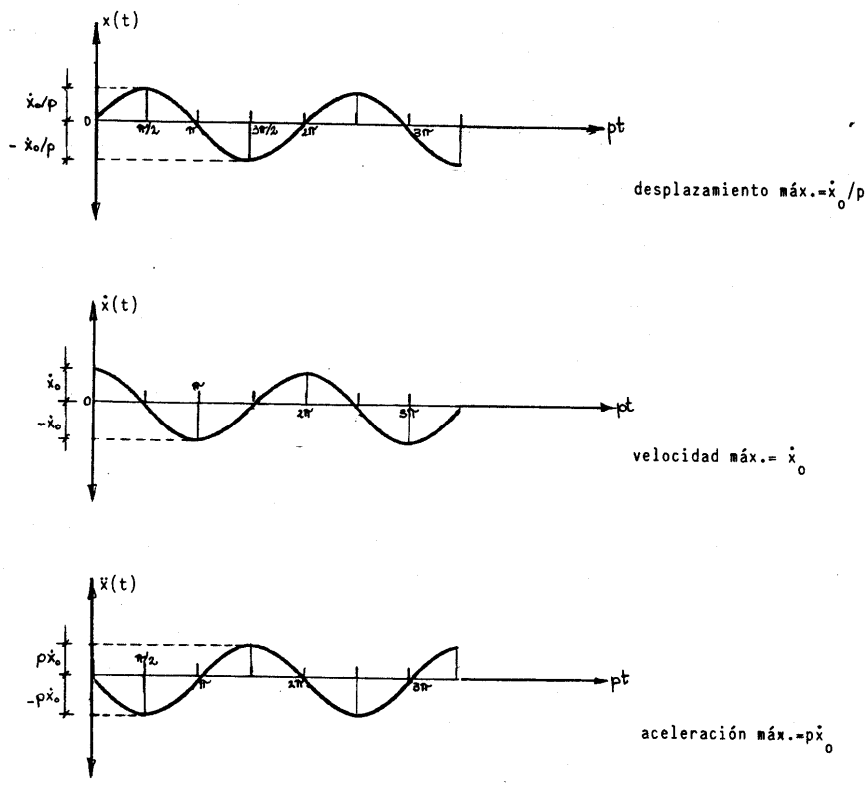


FIG. 3.2 REPRESENTACION GRAFICA DEL MOVIMIENTO PARA CONDICIONES INICIALES: $x_o = 0$, $\dot{x}_o > 0$

iii) Caso general, $x_o \neq 0$, $\dot{x}_o \neq 0$.

Para obtener la representación gráfica del movimiento para el caso general, es decir, condiciones iniciales distintas de cero, es necesario hacerse el siguiente planteamiento.

Analizando la ecuación de desplazamiento (3.13), podemos decir que la vibración consiste de dos partes: una en la cual es proporcional a **cos pt** y depende del desplazamiento inicial x_o y otra, en la cual es proporcional a **sen pt** y depende de la velocidad inicial $\dot{x}_o$. Cada una de estas partes puede ser representada gráficamente como se muestra en las Figs. 3.3a y 3.3b. El desplazamiento total x para cualquier pt se obtiene sumando las coordenadas de las dos curvas para ese pt como se muestra en la Fig. 3.3c.

Como puede observarse, la máxima ordenada de la curva de la Fig. 3.3c está desplazada con respecto a la máxima ordenada de la curva de la Fig. 3.3a, por la cantidad α. En este caso, puede decirse que el desplazamiento total, representado por la curva de la Fig. 3.3.c, se retrasa respecto a la componente del desplazamiento dada por la curva de la Fig. 3.3a.

El mismo razonamiento puede hacerse con las ecuaciones de velocidad y aceleración, (3.14) y (3.15), obteniéndose las gráficas de la Fig. 3.3d y 3.3e.

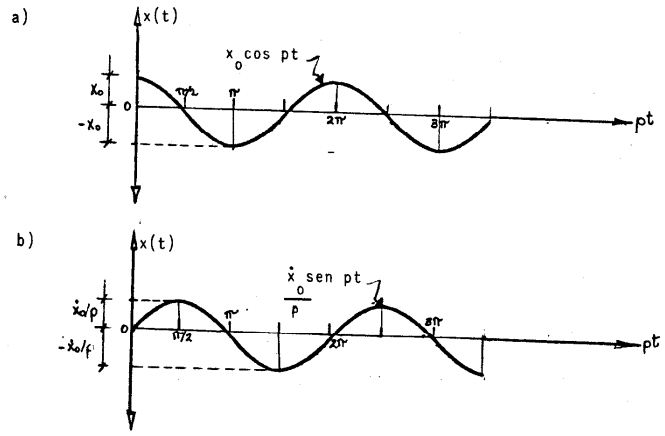


FIG. 3.3

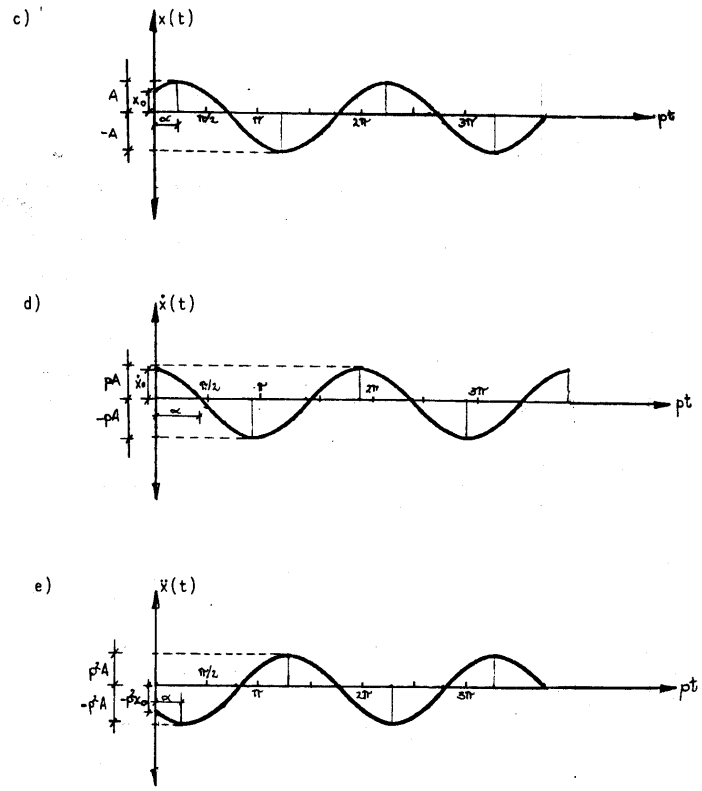


FIG. 3.3 REPRESENTACION GRAFICA DEL MOVIMIENTO PARA CONDICIONES INICIALES: $x_o > 0$, $\dot{x}_o > 0$.

3.3 GRAFICA ALTERNATIVA ADIMENSIONAL.

Para su determinación basta con despejar la función seno o coseno de la ecuación de movimiento. Para el caso ii) de la sección 3.2 por ejemplo, la gráfica adimensional del desplazamiento, dada por la siguiente ecuación, se muestra en la Fig.3.4

$$x(t) = \frac{\dot{x}_o}{p} \text{ sen } pt$$

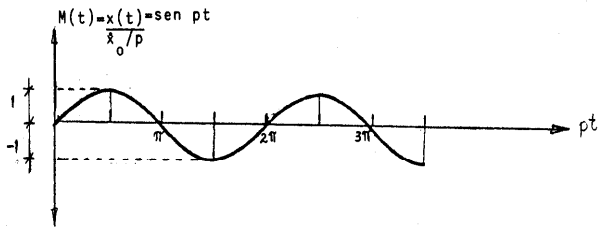


FIG. 3.4 GRAFICA ALTERNATIVA ADIMENSIONAL

3.4 FRECUENCIA Y PERIODO.

Un exámen de la ec. (3.13) muestra que como las funciones $x_o \cos pt$ y $\dot{x}_o/p$ sen pt, tienen ambas la misma frecuencia angular p; el movimiento resultante también poseerá una frecuencia angular p y por lo tanto será armónico y periódico. El período puede determinarse a partir de las funciones seno y coseno, las cuales tienen un período de 2π. El período natural de vibración T es el tiempo requerido para que una estructura complete un ciclo de vibración libre y está dado por la ec. (3.18)

$$pT = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{p} \qquad (3.18)$$

El período T es expresado usualmente en seg/ciclo o simplemente en segundos.

Al valor recíproco del período T se le denomina frecuencia natural f, de modo que:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{p}{2\pi} \qquad (3.19)$$

La frecuencia natural es comúnmente expresada en Hertz o ciclos/seg. La frecuencia natural angular o circular p es 2π veces la frecuencia natural f. La frecuencia natural circular p se expresa en radianes/seg.

3.5 AMPLITUD DE DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD, ACELERACION Y ANGULO DE FASE.

La ec. (3.13) describe el desplazamiento de un oscilador no amortiguado en vibraciones libres, pudiendo reescribirse en forma equivalente por la ec. (3.26) la cual se obtiene a través de simples transformaciones trigonométricas.

Para el caso general, las condiciones iniciales son:

$x(0) = x_o$

$\dot{x}(0) = \dot{x}_o$,

multiplicando y dividiendo el segundo miembro de la ec. (3.13) por el factor A para que no se altere, tenemos:

$$x(t) = A\left[\left(\frac{x_o}{A}\right)\cos pt + \left(\frac{\dot{x}_o/p}{A}\right)\operatorname{sen} pt\right] \tag{3.20}$$

Con la ayuda del triángulo rectángulo de la Fig. 3.8, cuyos catetos son x_o y $\dot{x}_o/p$, la hipotenusa A se determina:

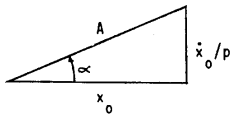


FIG. 3.5

$$A = \sqrt{x_o^2 + (\dot{x}_o/p)^2} \tag{3.21}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\dot{x}_o}{pA} \tag{3.22}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_o}{A} \tag{3.23}$$

$$\tan\alpha = \frac{\dot{x}_o}{px_o} \tag{3.24}$$

Sustituyendo (3.22) y (3.23) en la ec. (3.20)

$$x(t) = A(\cos pt \cos\alpha + \operatorname{sen} pt \operatorname{sen}\alpha) \tag{3.25}$$

y aplicando la identidad trigonométrica:

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

a la ec. (3.25), se determina finalmente la ecuación que representa el desplazamiento de un oscilador simple, ec. (3.26). Derivando esta ecuación con respecto al tiempo, se obtienen las ecuaciones de velocidad y aceleración, ecs. (3.27) y (3.28), respectivamente.

$$x(t) = A \cos (pt - \alpha) \tag{3.26}$$

$$\dot{x}(t) = -pA \operatorname{sen} (pt - \alpha) \tag{3.27}$$

$$\ddot{x}(t) = -p^2 A \cos (pt - \alpha) \tag{3.28}$$

Al valor de A definido por la ec. (3.21) se le denomina AMPLITUD DE MOVIMIENTO y al ángulo α ANGULO DE FASE.

El desplazamiento de un oscilador simple, dado por la ec. (3.26) para condiciones iniciales $x(0) = x_o$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_o$ puede representarse gráficamente por la Fig. 3.6 .

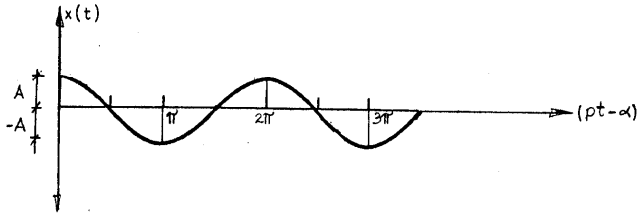


FIG. 3.6 REPRESENTACION GRAFICA DEL DESPLAZAMIENTO DE UN OSCILADOR SIMPLE EN FUNCION DE $(pt - \alpha)$

Si la gráfica de la Fig. 3.6 la desplazamos hacia la derecha una cantidad α se obtiene el desplazamiento en función de pt, el cual se muestra gráficamente en la Fig. 3.7 .

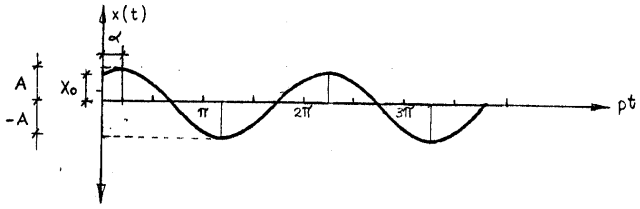


FIG. 3.7 REPRESENTACION GRAFICA DEL DESPLAMIENTO DE UN OSCILADOR SIMPLE EN FUNCION DE pt

Por último, para expresar el desplazamiento en función del tiempo t debe dividirse cada valor representado en el eje de las abscisas de la Fig. 3.7 por p, obteniéndose así, la gráfica de la Fig. 3.8a. De la misma forma que se obtuvo la gráfica del desplazamiento en función del tiempo, pueden obtenerse las gráficas de velocidad y aceleración en función del tiempo, dadas por las Figs. 3.8b y 3.8c respectivamente.

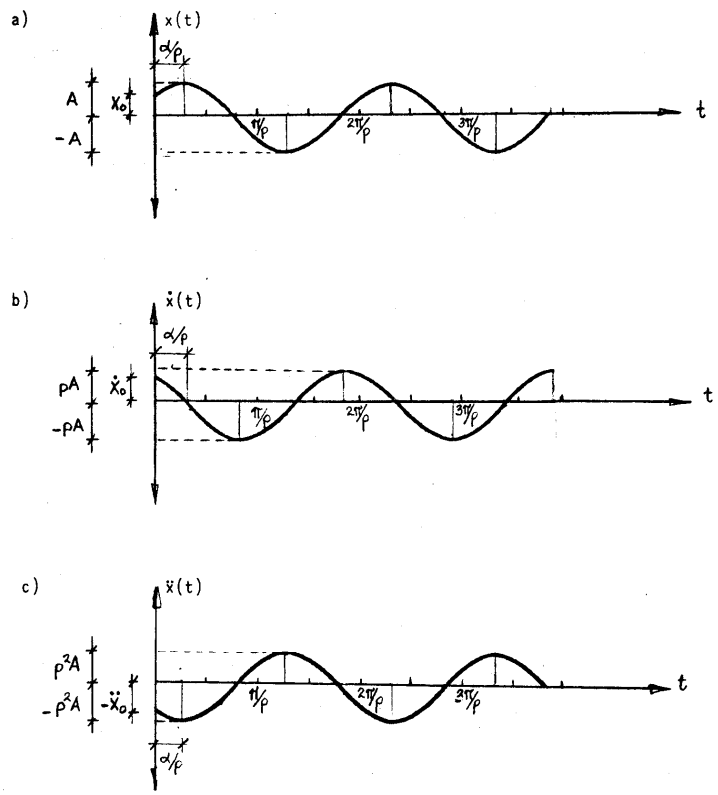


FIG. 3.8 REPRESENTACION GRAFICA (a) DEL DESPLAZAMIENTO (b) LA VELOCIDAD Y (c) LA ACELERACION DE UN OSCILADOR SIMPLE EN FUNCION DEL TIEMPO.

3.6 REPRESENTACION DEL DESPLAZAMIENTO EN VIBRACIONES LIBRES DE UN MODELO MASA-RESORTE MEDIANTE VECTORES ROTATORIOS.

Un método para representar las vibraciones es por medio de VECTORES ROTATORIOS. Imaginemos un vector $\overline{OP}$ (ver Fig. 3.9) de magnitud x_o, rotando con velocidad constante p alrededor de un punto fijo O. A esta velocidad se le denomina frecuencia angular o circular de la vibración. Si en el momento inicial (t=0) el vector $\overline{OP}$ coincide con el eje X, el ángulo que forma con el mismo eje en cualquier otro tiempo t es igual a pt. La proyección de este vector sobre el eje X es igual a x_o cos pt y representa el primer término de la ec. (3.13). Tomando otro vector $\overline{OQ}$ de magnitud $\dot{x}_o/p$ y perpendicular al vector $\overline{OP}$, observamos que su proyección sobre el eje X es igual a $\dot{x}_o/p$ sen pt y representa el segundo término de la ec. (3.13).

El desplazamiento total x se obtiene sumando las proyecciones sobre el eje X de los dos vectores perpendiculares $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ rotando con velocidad angular p.

El mismo resultado se obtendrá si, en lugar de los vectores $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$, consideramos el vector $\overline{OR}$, igual a su suma, y tomamos la proyección del vector resultante sobre el eje X. La magnitud A del vector $\overline{OR}$, se obtiene de la Fig. 3.9 y es igual a la ec. (3.21) y el ángulo que forma con el eje X es (pt $-\alpha$).

De aquí puede concluirse que la ec. (3.13) puede ser expresada en forma equivalente por la ec. (3.26).

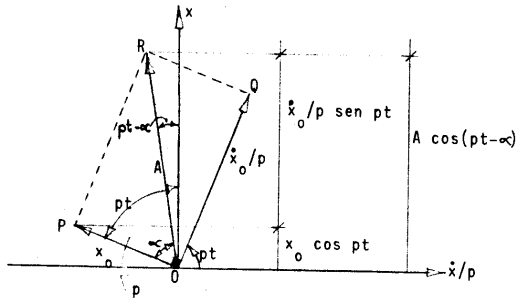


FIG. 3.9 REPRESENTACION DE LAS VIBRACIONES MEDIANTE VECTORES ROTATORIOS.

La magnitud del vector $\overline{OR}$, A, representa el desplaza--- miento máximo del cuerpo vibrante desde su posición de equilibrio y es llamada AMPLITUD DE VIBRACION.

Al ángulo α entre los dos vectores rotantes $\overline{OP}$ y $\overline{OR}$ se le denomina ANGULO DE FASE O DIFERENCIA DE FASE. Las coordenadas x, $\dot{x}/p$ se utilizan para definir el PLANO DE FASE, en el cual los movimientos son tratados como vectores rotantes.

3.7 PROBLEMAS RESUELTOS.

P.3.1. Hacer las gráficas de desplazamiento, velocidad y aceleración de un oscilador simple para los siguientes casos:

i) $x_o < 0$, $\dot{x}_o = 0$

ii) $x_o = 0$, $\dot{x}_o < 0$

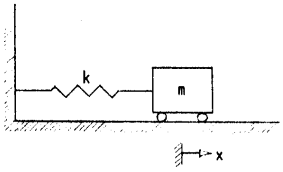
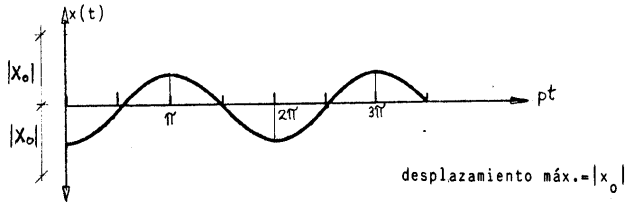


FIG. P.3.1

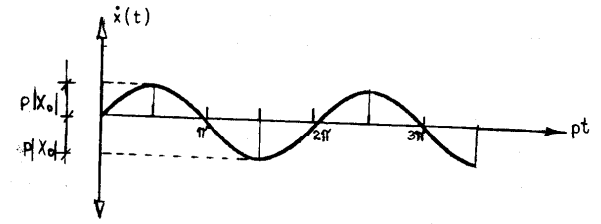
SOLUCION:

Sustituyendo las condiciones iniciales en las ecs. ---- (3.13), (3.14) y (3.15) se obtienen las ecuaciones del movimiento

i)
$$x(t) = -x_o \cos pt$$
$$\dot{x}(t) = px_o \operatorname{sen} pt$$
$$\ddot{x}(t) = p^2 x_o \cos pt$$

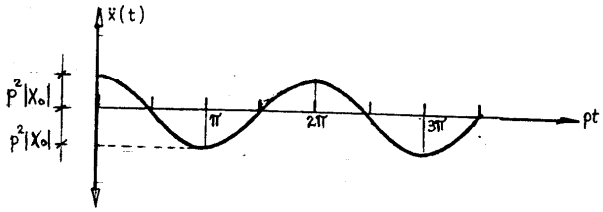


RESPUESTA



velocidad máx.$=p|x_o|$

RESPUESTA

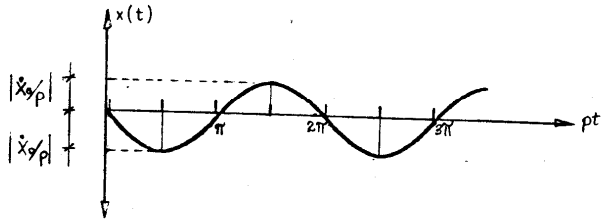


aceleración máx.$=p^2|x_o|$

RESPUESTA

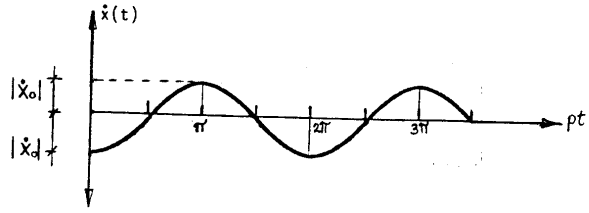
ii)

$$x(t) = -\dot{x}_o/p \text{ sen } pt$$
$$\dot{x}(t) = -\dot{x}_o \cos pt$$
$$\ddot{x}(t) = p\dot{x}_o \text{ sen } pt$$



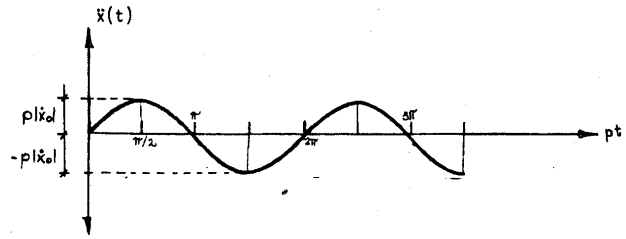
desplazamiento máx.$=|\dot{x}_o|/p$

RESPUESTA



velocidad máx.$=|\dot{x}_o|$

RESPUESTA



aceleración máx.$=p|\dot{x}_o|$

RESPUESTA

P.3.2. Hacer las gráficas adimensionales para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración para los casos :

i) $x_o > 0,\ \dot{x}_o = 0$

ii) $x_o = 0,\ \dot{x}_o > 0$

SOLUCION:

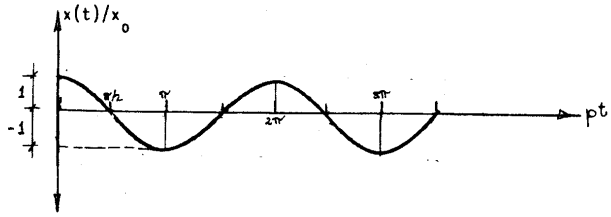
i) $x_o > 0,\ \dot{x}_o = 0$

Las ecuaciones que definen el movimiento son:

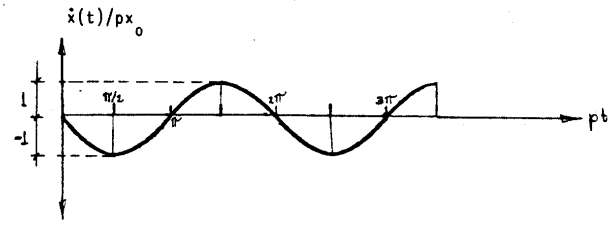
$$\frac{x(t)}{x_o} = \cos pt$$

$$\frac{\dot{x}(t)}{px_o} = -\text{sen } pt$$

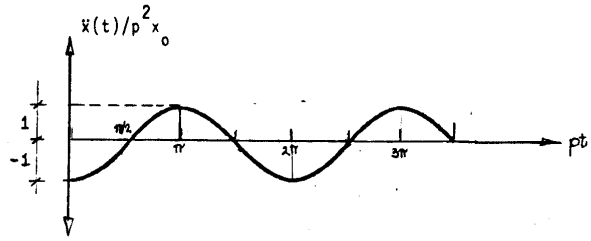
$$\frac{\ddot{x}(t)}{p^2x_o} = -\cos pt$$



RESPUESTA



RESPUESTA



RESPUESTA

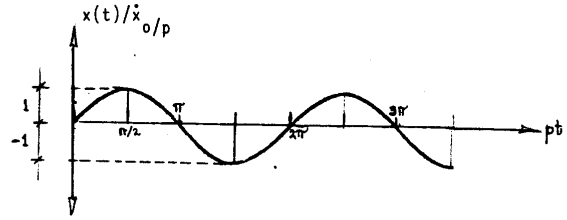
ii) $x_o = 0,\ \dot{x}_o > 0$

Las ecuaciones que definen el movimiento son:

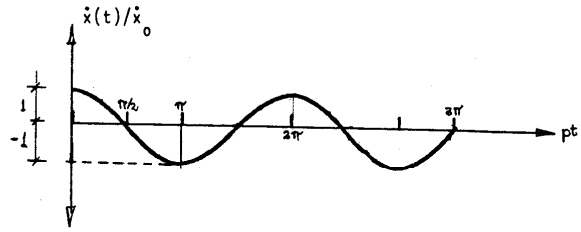
$$\frac{x(t)}{\dot{x}_o/p} = \text{sen } pt$$

$$\frac{\dot{x}(t)}{\dot{x}_o} = \cos pt$$

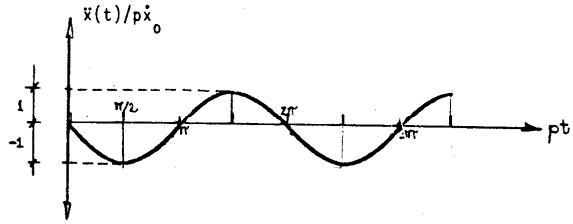
$$\frac{\ddot{x}(t)}{p\dot{x}_o} = -\text{sen } pt$$



RESPUESTA



RESPUESTA



RESPUESTA

P.3.3. Hacer las gráficas del desplazamiento, velocidad y aceleración para un sistema con las siguientes condiciones iniciales:

i) $x_o > 0$, $\dot{x}_o < 0$

ii) $x_o < 0$, $\dot{x}_o > 0$

iii) $x_o < 0$, $\dot{x}_o < 0$

SOLUCION:

i) $x_o > 0$, $\dot{x}_o < 0$

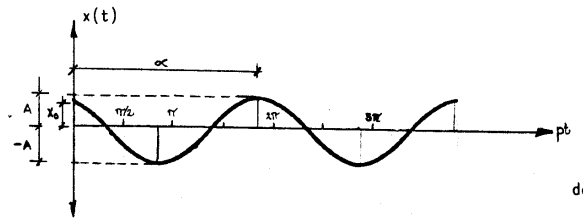
Debido a que el $\cos\alpha = x_o/A > 0$, y $\operatorname{sen}\alpha = \dot{x}_o/pA < 0$; se tiene que el ángulo de fase se encuentra en el intervalo $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$. Las ecuaciones que definen el desplazamiento, la velocidad y la aceleración del sistema son:

$$x(t) = A\cos(pt+\alpha)$$

$$\dot{x}(t) = -pA\operatorname{sen}(pt+\alpha)$$

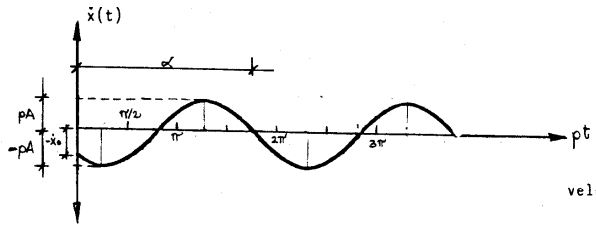
$$\ddot{x}(t) = -p^2A\cos(pt+\alpha)$$

y graficando estas ecuaciones se obtienen:



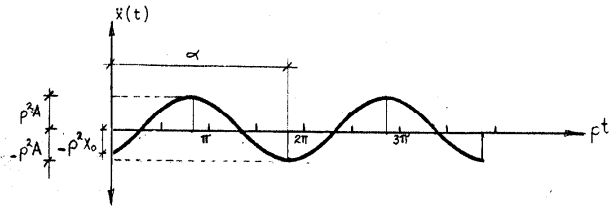
desplazamiento máx.=A

RESPUESTA



velocidad máx.=pA

RESPUESTA



aceleración máx.=p^2A

RESPUESTA

ii) $x_o < 0$, $\dot{x}_o > 0$

$\cos\alpha < 0$, $\operatorname{sen}\alpha > 0$; entonces $\pi/2 < \alpha < \pi$

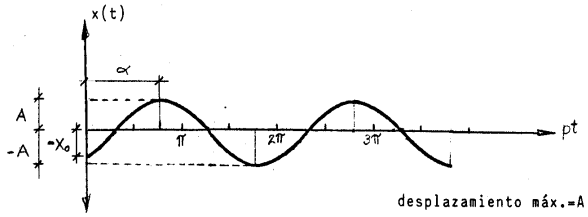
Las ecuaciones del desplazamiento, velocidad y aceleración del sistema son:

$$x(t) = -A\cos(pt+\alpha)$$

$$\dot{x}(t) = pA\operatorname{sen}(pt+\alpha)$$

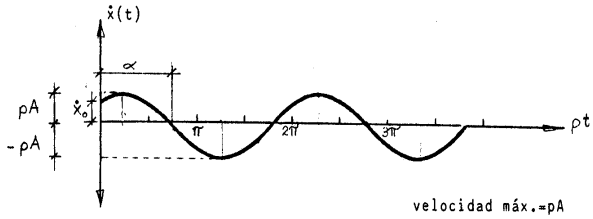
$$\ddot{x}(t) = p^2A\cos(pt+\alpha)$$

y graficando estas ecuaciones se obtienen:



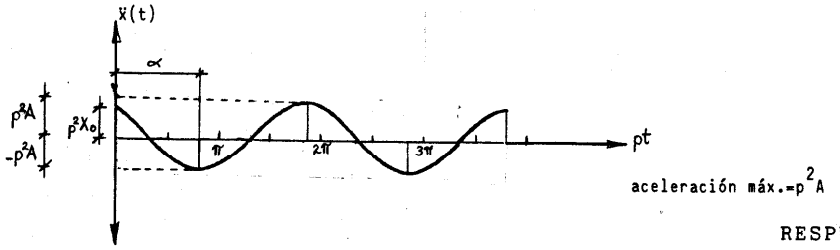
desplazamiento máx.=A

RESPUESTA



velocidad máx.=pA

RESPUESTA



aceleración máx.=p^2A

RESPUESTA

iii) $x_o < 0$, $\dot{x}_o < 0$

$\cos\alpha < 0$, $\operatorname{sen}\alpha < 0$; entonces $\pi < \alpha < 3\pi/2$

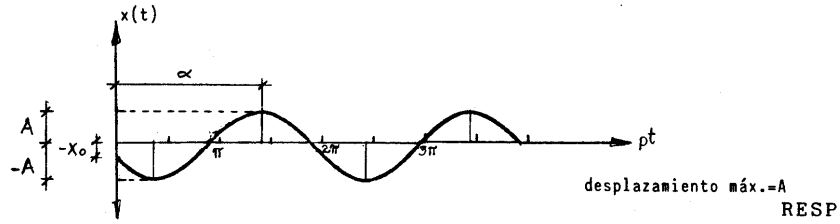
Las ecuaciones del desplazamiento, velocidad y aceleración del sistema son:

$$x(t) = -A\cos(pt-\alpha)$$

$$\dot{x}(t) = pA\operatorname{sen}(pt-\alpha)$$

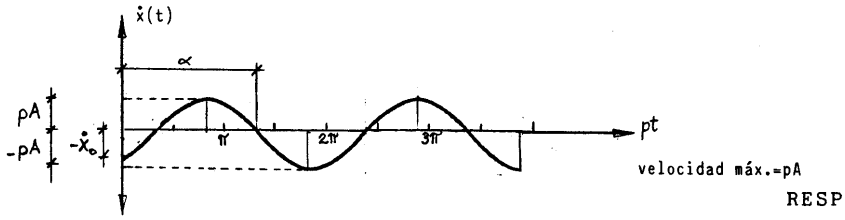
$$\ddot{x}(t) = p^2A\cos(pt-\alpha)$$

y graficando estas ecuaciones se obtienen:



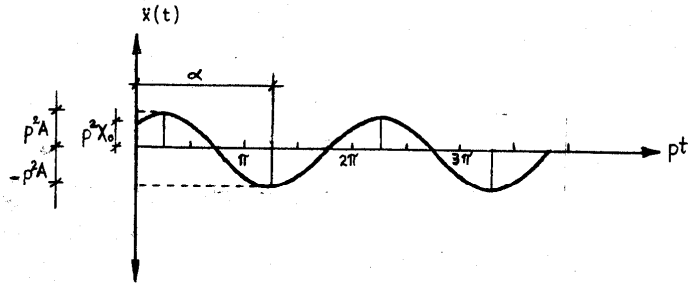
desplazamiento máx.=A

RESPUESTA



velocidad máx.=pA

RESPUESTA



aceleración máx.=p^2A

RESPUESTA

P.3.4. Determinar el período natural para el sistema de la Fig. P.3.4. Suponga que la masa de la viga y la de los resortes que soportan el peso w, son despreciables.

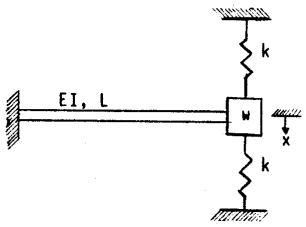


FIG. P.3.4

SOLUCION:

La rigidez equivalente de la estructura, se determinó en el Problema Resuelto P.2.5 como:

$$k_e = \frac{3EI + 2kL^3}{L^3}$$

$$p = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \sqrt{\frac{3EI + 2kL^3}{mL^3}}$$

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3EI + 2kL^3}{mL^3}}}$$ RESPUESTA

P.3.5. Los siguientes valores numéricos corresponden al Problema Resuelto P.3.4: L=100 in, $EI=10^8$ lb-in^2, w=3000 lb, y k=2000 lb/in. Si el peso w tiene un desplazamiento inicial de x_o=1.0 in y una velocidad inicial v_o=20 in/s, determine el desplazamiento y la velocidad 1 segundo después.

SOLUCION:

$$m = w/g = 3000/(32.2x12) = 7.76 \ \frac{lb\text{-}s^2}{in}$$

$$p = \sqrt{\frac{3EI+2kL^3}{mL^3}} = \sqrt{\frac{3(10^8)+2(2000)(100)^3}{7.76(100)^3}} = 23.54 \ s^{-1}$$

$$A = \sqrt{x_o^2+(\dot{x}_o/p)^2} = \sqrt{(1.0)^2 + (20/23.54)^2} = 1.31 \text{ in}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(\dot{x}_o/px_o) = \tan^{-1}(20/23.54) = 0.7043 \text{ rad}$$

Como $x_o > 0$, $\dot{x}_o > 0$ se aplican las ecs. (3,26), (3.27) y (3.28); sustituyendo valores:

$$x(t) = A \cos(pt-\alpha)$$

$$\dot{x}(t) = -pA \text{ sen}(pt-\alpha)$$

$$x(t) = 1.31 \cos(23.54t-0.7043)$$

$$x(t=1) = 1.31 \cos(23.54(1)-0.7043)$$

$$x(t=1) = -0.87 \text{ in} \qquad \text{RESPUESTA}$$

$$\dot{x}(t) = -30.84 \text{ sen}(23.54t-0.7043)$$

$$\dot{x}(t=1) = -30.84 \text{ sen}(23.54(1)-0.7043)$$

$$\dot{x}(t=1) = 23.06 \text{ in/s} \qquad \text{RESPUESTA}$$

P.3.6. Determine la frecuencia natural para el desplazamiento horizontal del marco de acero de la Fig. P.3.6. Suponga que la viga horizontal es infinitamente rígida y desprecie la masa de las columnas. Además determine la variación del momento flexionante y cortante en las columnas para condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad generales.

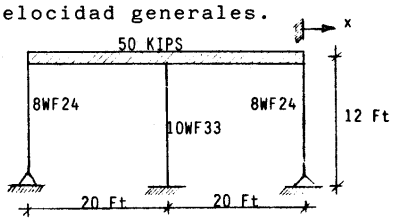


FIG. P.3.6

SOLUCION:

Del Manual AISC se obtiene:

10WF33 -- Ix =171 in^4 y 8WF24 -- Ix = 82.5 in^4

E = 29,000 $Kips/in^2$

EI(10WF33) = 29,000,000(171) = 4.959 E9 $lb\text{-}in^2$

EI(8WF24) = 29,000,000(82.5)= 2.3925 E9 $lb\text{-}in^2$

$k = \frac{12EI}{h^3}$ (columna empotrada-empotrada)

$k = \frac{3EI}{h^3}$ (columna empotrada-articulada)

$k(10WF33) = \frac{12(4.949\ E9)}{(12x12)^3} = 19\ 929.11$ lb/in

$k(8WF24) = \frac{3(2.3925\ E9)}{(12x12)^3} = 2\ 403.73$ lb/in

Como las columnas estan en paralelo:

$k_e = k(10WF33) + 2k(8WF24) = 19\ 929.11 + 2(2\ 403.73)$

$k_e = 24\ 736.57$ lb/in

$m = w/g = 50\ 000/(32.2x12) = 129.40\ \frac{lb\text{-}s^2}{in}$

$p = \sqrt{k_e/m} = \sqrt{24\ 736.57/129.40} = 13.83\ s^{-1}$

$f = p/2\pi = 13.83/2\pi = 2.20$ Hz RESPUESTA

La ecuación de desplazamiento se obtiene sustituyendo valores en la ec. (3.13):

$$x(t) = x_o \cos(13.83t) + (\dot{x}_o/13.83) \text{ sen } (13.83t) \qquad (a)$$

Y la expresión para Momento y Cortante:

$$V_1(t) = \frac{12EI}{L^3}\ x(t)$$

$$M_1(t) = \frac{6EI}{L^2}\ x(t) \qquad (b) \qquad \text{RESPUESTA}$$

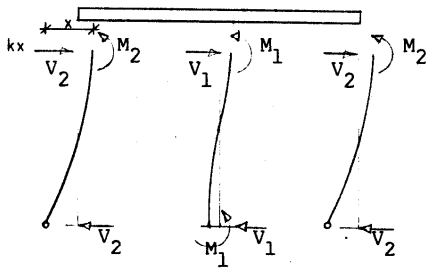
para el caso de columna empotrada-empotrada; y,

$$V_2(t) = \frac{3EI}{L^3}\ x(t)$$

$$M_2(t) = \frac{3EI}{L^2}\ x(t) \qquad (c) \qquad \text{RESPUESTA}$$

para el caso de columna articulada-empotrada.

En las anteriores expresiones (b) y (c), el valor de -- x(t) estará dado por la ec. (a)



P.3.7. Calcule la frecuencia natural en el sentido horizontal para el marco de acero, Fig. P.3.7, para los casos siguientes:

(a) El miembro horizontal se supone infinitamente rígido

(b) El miembro horizontal está hecho de acero flexible 18WF50

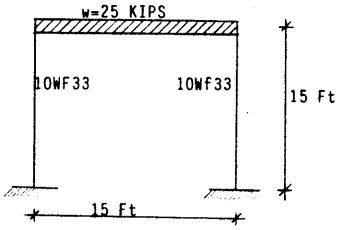


FIG. P. 3.7

SOLUCION:

(a) $EI(10WF30) = 4.959\ E9\ lb\text{-}in^2$

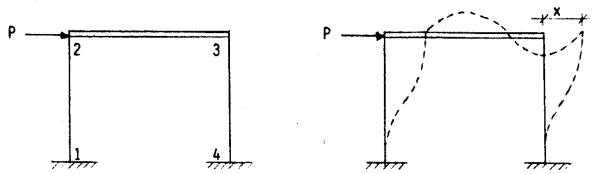
$$k_e = 2(12EI/L^3) = \frac{24(4.959\ E9)}{(15x12)^3} = 20\ 407.41\ \ lb/in$$

$$m = w/g = 25\ 000/(32.2x12) = 64.70\ \frac{lb\text{-}s^2}{in}$$

$$p = \sqrt{k_e/m} = \sqrt{20\ 407.41/64.70} = 17.76\ s^{-1}$$

$$f = p/2\pi = 17.76/2\pi = 2.83\ Hz$$ RESPUESTA

(b)



En este inciso, se considera que la trabe no es infinitamente rígida, sino flexible.

Para este análisis, nos auxiliaremos del libro Marcos y Pórticos de Valerian Leontovich (págs. 53 y 64) para el cálculo de los elementos mecánicos del marco.

$I_{1-2}(10WF33) = 171\ in^4$ --- $EI(10WF33) = 4.959\ E9\ lb\text{-}in^2$

$I_{2-3}(18WF50) = 802\ in^4$ --- $EI(18WF50) = 2.33\ E10\ lb\text{-}in^2$

$\emptyset = I_{1-2}/I_{2-3}\cdot\frac{L}{h} = (171/802).(15/15) = 0.2132$

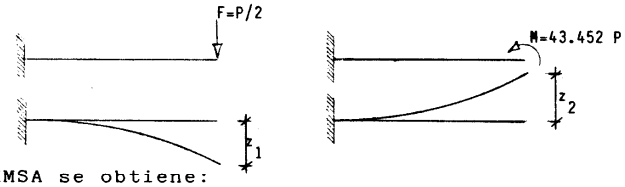
$D = 2\left[1+\frac{6}{\emptyset}\right] = 2\left[1+ (6/0.2132)\right] = 58.29$

$k = 3/D\emptyset = 3/(58.29x0.2132) = 0.2414$

$M_2 = Phk = P(15x12)(0.2414) = 43.452\ P$

$V_2 = P/2$

Ahora, analizando a las columnas como una viga en cantiliver con un momento y una fuerza en su extremo libre, 43.452 P y P/2, respectivamente.



Del Manual AHMSA se obtiene:

$$Z_1 = FL^3/3EI = PL^3/6EI = \frac{P(15x12)^3}{6(4.959E9)} = 0.000196\ P$$

$$Z_2 = ML^2/2EI = 43.452\ PL^2/2EI = \frac{43.452\ P(15x12)^2}{2(4.959E9)}$$

$$= 0.000142\ P$$

El desplazamiento total Z, está dado por:

$$Z = Z_1 + Z_2 = 0.000196\ P - 0.000142\ P = 0.000054\ P$$

Por otro lado:

$Z = P/k$, entonces: $k = P/Z$

Sustituyendo el válor de Z:

$k = P/0.000054\ P = 18\ 518.52$ lb/in

$p = \sqrt{k/m} = \sqrt{18\ 518.52/64.70} = 16.92\ s^{-1}$

$f = p/2\pi = 16.92/2\pi = 2.69$ Hz RESPUESTA

P.3.8. Determine la frecuencia natural de la viga de la Fig. P.3.8 que soporta un peso concentrado w en su centro. Desprecie la masa de la viga. Incluir la variación de las reacciones en función del tiempo.

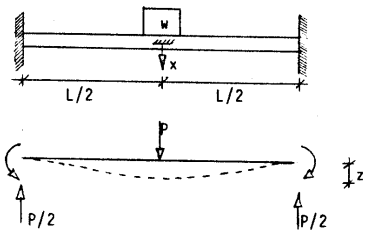


FIG. P.3.8

SOLUCION:

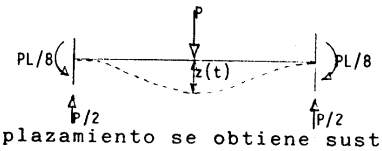
Del Manual Monterrey, para una viga doblemente empotrada, el desplazamiento máximo es igual a:

$Z = PL^3/192EI = P/k$ (a)

$k = 192EI/L^3$

$p = \sqrt{k/m} = \sqrt{192EIg/wL^3}$

$f = p/2\pi = (\sqrt{192EIg/wL^3})/2\pi$ RESPUESTA



La ecuación del desplazamiento se obtiene sustituyendo valores en la ec. (3.13):

$Z(t) = Z_o \cos pt + \dot{Z}_o/p \operatorname{sen} pt$ (b)

Despejando P de la ec. (a), se obtiene:

$$P = kZ = 192EI/L^3\ Z(t)$$

Y sustituyendo este valor en las ecuaciones del cortante y momento flexionante, tenemos:

$$V(t) = P/2 = 96EI/L^3\ Z(t) \qquad (c) \qquad \text{RESPUESTA}$$

$$M(t) = PL/8 = 24EI/L^2\ Z(t)$$

Consideramos los efectos dinámicos ya que la variable Z mide el desplazamiento a partir de la posición de equilibrio.

P.3.9. Los valores numéricos para el Problema P.3.8 son L=120 in, $EI=10^9$ lb-in^2 y w=5000 lb. Si el desplazamiento inicial y la velocidad inicial son, respectivamente, x_o=0.5 in, y $\dot{x}_o$=15 in/s, determine el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de w cuando t=2 seg. Incluir reacciones y momentos flexionantes en los extremos.

SOLUCION:

$$p = \sqrt{\frac{192\ EIg}{wL^3}} = \sqrt{\frac{192(10^9)(32.2x12)}{5\ 000(120)^3}} = 92.66\ s^{-1}$$

$$A = \sqrt{z_o^2 + (\dot{z}_o/p)^2} = \sqrt{(0.5)^2 + (15/92.66)^2} = 0.5255 \text{ in}$$

$$= \tan^{-1}(\dot{z}_o/pz_o) = \tan^{-1}(15/92.66x0.5) = 0.3238 \text{ rad}$$

Debido a que $z_o > 0$ y $\dot{z}_o > 0$, pueden aplicarse las ecuaciones (3.26), (3.27) y (3.28). Sustituyendo los valores anteriores en éstas, se obtiene:

$$z(t) = 0.5255\cos(92.66t-0.3238)$$

$$z(2) = 0.5255\cos(92.66x2 - 0.3238)$$

$$z(2) = -0.4922 \text{ in} \qquad \text{RESPUESTA}$$

$$\dot{z}(t) = -48.69\text{sen}(92.66t-0.3238)$$

$$\dot{z}(2) = -48.69\text{sen}(92.66x2 - 0.3238)$$

$$\dot{z}(2) = -17.05 \text{ in/s} \qquad \text{RESPUESTA}$$

$$\ddot{z}(t) = -4511.88\cos(92.66t-0.3238)$$

$$\ddot{z}(2) = -4511.88\cos(92.66x2 - 0.3238)$$

$$\ddot{z}(2) = 4266.19 \text{ in/s}^2 \qquad \text{RESPUESTA}$$

El valor de las reacciones y momentos flexionantes en los extre--

mos, se obtiene evaluando las ecuaciones (c) del problema anterior en t=2 seg.

$$V(2) = \frac{96EI}{L^3} z(2)$$

$$= \frac{96(10^9)}{(120)^3} (0.4922) = 273\ 444.44 \text{ lb}$$

$$V(2) = 273.44 \text{ Kip}$$ RESPUESTA

$$M(2) = \frac{24EI}{L^2} z(2)$$

$$= \frac{24(10^9)}{(120)^2} (0.4922) = 8\ 203\ 333.33 \text{ lb-in}$$

$$M(2) = 8\ 203.33 \text{ Kip-in}$$ RESPUESTA

P.3.10. Un poste vertical de longitud L y rigidez a la flexión EI, soporta una masa m en su extremo superior, como se muestra en la Fig. P.3.10. Despreciando el peso del poste, derive la ecuación diferencial para las pequeñas vibraciones horizontales de la masa, y encuentre la frecuencia natural. Suponga que los efectos de la gravedad son pequeños y los efectos no lineales pueden despreciarse.

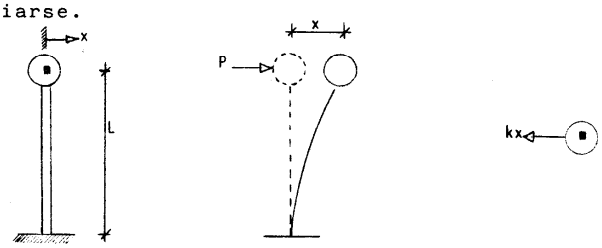


FIG. P.3.10

SOLUCION:

Del Manual Monterrey, para una viga en voladizo, el desplazamiento máximo es igual a:

$$x = \frac{PL^3}{3EI} = P/k$$

$$k = \frac{3EI}{L^3}$$

$$p = \sqrt{k/m} = \sqrt{3EI/mL^3}$$

$$f = p/2\pi = \frac{\sqrt{3EI/mL^3}}{2\pi}$$ RESPUESTA

Haciendo suma de fuerzas en el diagrama de cuarpo libre, se obtiene:

$$F = m\ddot{x}$$

$$-k\ddot{x} = m\ddot{x}$$

Reacomodando términos y sustituyendo el valor de k, se obtiene finalmente la ecuación diferencial del movimiento

$$m\ddot{x} + \frac{3EI}{L^3} x = 0$$ RESPUESTA

4

"VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS DE SISTEMAS CON UN SOLO GRADO DE LIBERTAD"

En los capítulos anteriores, hemos estudiado el comportamiento dinámico de sistemas de un grado de libertad en vibraciones libres, bajo condiciones idealizadas de no amortiguamiento. - Sin embargo, es imposible disponer de sistemas que vibren bajo dicha idealización. Cualquier sistema físico con movimiento tiene presentes siempre fuerzas friccionantes o de amortiguamiento.

Dichas fuerzas forman mecanismos que disipan o transforman la energía mecánica del sistema en otras formas de energía, - como por ejemplo en calor.

Al tomar en cuenta el amortiguamiento en el análisis dinámico de un sistema es común, y ésto debido a la sencillez matemática que conlleva, el suponer que tales fuerzas disipativas son proporcionales a la magnitud de la velocidad y de dirección opuesta a la del movimiento. En la práctica, este tipo de amortigua-- miento es conocido como AMORTIGUAMIENTO VISCOSO, y representa el

tipo de fuerza que podría resultar en un cuerpo restringido en su movimiento por un fluido viscoso circundante.

4.1 ECUACION DEL MOVIMIENTO PARA EL CASO AMORTIGUADO.

Supongamos que hemos modelado un sistema estructural como el que se muestra en la Fig. 4.1a. Aquí, m y k representan respectivamente, la masa y la constante del resorte y c será el coeficiente de amortiguamiento viscoso.

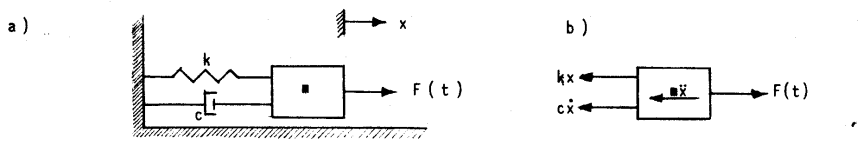


FIG. 4.1 SISTEMA MASA RESORTE AMORTIGUADOR (a) MODELO, (b) DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE.

Del diagrama de cuerpo libre, y aplicando la Segunda Ley de Newton, hacemos sumatoria de fuerzas de tal forma que:

$$F(t) - c\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$

o bien,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{4.1}$$

La ecuación (4.1) es llamada ECUACION FUNDAMENTAL DE LA DINAMICA ESTRUCTURAL PARA EL CASO AMORTIGUADO.

Así, nuestro problema es resolver la ecuación diferencial (4.1)

$$\begin{aligned} & m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \\ & \text{sujeta a las condiciones iniciales} \\ & x(t=0) = x_o \\ & \dot{x}(t=0) = \dot{x}_o \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nos referimos a la ec. (4.2) como el PROBLEMA DE VALORES INICIALES FUNDAMENTAL DE LA DINAMICA ESTRUCTURAL. Si en la ec. (4.2) F(t) = 0, tendremos entonces un PROBLEMA DE VALORES INICIALES EN

VIBRACIONES LIBRES:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$
$$x(t=0) = x_o \qquad (4.3)$$
$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_o$$

Para resolver este problema dividimos la ecuación de movimiento entre m,

$$\ddot{x} + \frac{2c}{2m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Si anteriormente definimos $p^2=k/m$, ahora introducimos un nuevo coeficiente

$$n = \frac{c}{2m}$$

Sustituyendo

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = 0 \qquad (4.4)$$

cuya solución es de la forma

$$x = Ce^{rt} \qquad (4.5)$$

donde C y r son constantes. Así, la primera y segunda derivada de x son:

$$\dot{x} = Cre^{rt} \qquad (4.6)$$

$$\ddot{x} = Cr^2e^{rt} \qquad (4.7)$$

Sustituyendo (4.5) y sus derivadas dadas por (4.6) y (4.7) en --- (4.4), tenemos

$$Cr^2e^{rt} + 2Cnre^{rt} + Cp^2e^{rt} = 0$$

de donde, cancelando sus factores comunes, obtenemos

$$r^2 + 2nr + p^2 = 0 \qquad (4.8)$$

conocida como la ECUACION CARACTERISTICA asociada a la ec. (4.4).

Ya que la ec. (4.8) es cuadrática en r, sus raíces, llamadas RAICES CARACTERISTICAS son:

$$\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} = -n \pm \sqrt{n^2-p^2} \qquad (4.9)$$

entonces, la solución general de la ec. (4.4) estará dada por:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \tag{4.10}$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración determinadas por las condiciones iniciales.

Sin embargo, la forma final de la ec. (4.10) depende del signo de la expresión que aparece dentro del radical en la ec. (4.9); de tal forma que pueden presentarse los siguientes tres casos:

CASO I: $n^2 - p^2 < 0$

CASO II: $n^2 - p^2 = 0$

CASO III: $n^2 - p^2 > 0$

Estudiaremos cada uno de estos casos por separado.

4.2 CASO I. SISTEMA SUBAMORTIGUADO.

En este caso tenemos que $n^2 - p^2 < 0$, entonces la expresión dentro del radical es negativa, es decir, las raíces de la ecuación característica son conjugadas complejas. Ahora definamos

$$p_d^2 = p^2 - n^2 > 0 \tag{4.11}$$

donde p_d es llamada FRECUENCIA NATURAL CIRCULAR AMORTIGUADA. Así

$$\sqrt{n^2 - p^2} = \sqrt{(-1)(p^2 - n^2)} = \sqrt{(-1)p_d^2} = p_d\sqrt{(-1)}$$

$$= ip_d$$

entonces

$$r_1, r_2 = -n \pm ip_d$$

$$r_1 = -n + ip_d \tag{4.12}$$

$$r_2 = -n - ip_d \tag{4.13}$$

Evaluando la ec. (4.10) para los valores de r_1 y r_2 dados por las ecs. (4.12) y (4.13):

$$x = C_1 e^{(-n+ip_d)t} + C_2 e^{(-n-ip_d)t}$$

$$= C_1 e^{-nt} e^{ip_d t} + C_2 e^{-nt} e^{-ip_d t}$$

$$x = e^{-nt}(C_1 e^{ip_d t} + C_2 e^{-ip_d t}) \tag{4.14}$$

En este punto es conveniente hacer uso de la Fórmula de Euler, la cual relaciona funciones exponenciales y trigonométricas en la siguiente forma

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$$

Continuando con la ec. (4.14) tenemos que:

$$x = e^{-nt}(C_1(\cos p_d t + i\operatorname{sen} p_d t) + C_2(\cos p_d t - i\operatorname{sen} p_d t))$$

$$x = e^{-nt}((C_1+C_2)\cos p_d t + i(C_1-C_2)\operatorname{sen} p_d t)$$

Si llamamos

$$A = C_1 + C_2$$

$$B = i(C_1 - C_2)$$

$$x = e^{-nt}(A\cos p_d t + B\operatorname{sen} p_d t) \qquad (4.15)$$

Para determinar el valor de las constantes A yB hacemos uso de las condiciones iniciales

$$x(t=0) = x_o$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_o$$

evaluando la ec. (4.15) en t = 0,

$$x_o = A \qquad (4.16)$$

Podemos afirmar entonces que la constante A representa el desplazamiento inicial del sistema. Ahora derivamos una vez la ec. --- (4.15) y la evaluamos en t = 0.

$$\dot{x} = -ne^{-nt}(A\cos p_d t + B\operatorname{sen} p_d t) + e^{-nt}(-Ap_d\operatorname{sen} p_d t + Bp_d\cos p_d t)$$

en t = 0

$\dot{x}_o = -nA + Bp_d$, despejamos B y sustituimos el valor de A dado por la ec. (4.16),

$$B = \frac{\dot{x}_o + nx_o}{p_d} \qquad (4.17)$$

Finalmente, la ec. (4.15) puede escribirse como

$$x(t) = e^{-nt}\left(x_o \cos p_d t + \frac{\dot{x}_o + n x_o}{p_d} \operatorname{sen} p_d t\right) \qquad (4.18)$$

donde:

$$n = \frac{c}{2m} \quad y \quad p_d = \sqrt{p^2 - n^2}$$

Análogamente, podemos determinar las expresiones para la velocidad y la aceleración derivando dos veces la ec. (4.15).

$$\dot{x}(t) = e^{-nt}((-nA+Bp_d)\cos p_d t - (nB+Ap_d)\operatorname{sen} p_d t)$$

$$\dot{x}(t) = e^{-nt}(C \cos p_d t - D \operatorname{sen} p_d t)$$

$$C = -nA+Bp_d = -nx_o + \frac{\dot{x}_o + nx_o}{p_d} p_d = \dot{x}_o$$

$$D = nB+Ap_d = \frac{n\dot{x}_o + n^2 x_o}{p_d} + x_o p_d = \frac{n\dot{x}_o + p^2 x_o}{p_d}$$

entonces la expresión para $\dot{x}(t)$ se escribe como

$$\dot{x}(t) = e^{-nt}(\dot{x}_o \cos p_d t + ((-n\dot{x}_o - p^2 x_o)/p_d)\operatorname{sen} p_d t) \qquad (4.19)$$

Para la aceleración:

$$\ddot{x}(t) = e^{-nt}(-(nC+Dp_d)\cos p_d t + (nD-Cp_d)\operatorname{sen} p_d t)$$

$$\ddot{x}(t) = e^{-nt}(-E\cos p_d t + F\operatorname{sen} p_d t)$$

$$E = nC+Dp_d = n\dot{x}_o + n\dot{x}_o + p^2 x_o = 2n\dot{x}_o + p^2 x_o$$

$$F = nD-Cp_d = \frac{n\dot{x}_o + np^2 x_o}{p_d} - \dot{x}_o p_d = \frac{\dot{x}_o(n^2 - p_d^2) + np^2 x_o}{p_d}$$

Así:

$$\ddot{x}(t) = e^{-nt}\left(-(2n\dot{x}_o + p^2 x_o)\cos p_d t + \frac{\dot{x}_o(n^2 - p_d^2) + np^2 x_o}{p_d} \operatorname{sen} p_d t\right) \qquad (4.20)$$

Puede notarse que si $n=0$, entonces $p_d=p$ y las ecs. (4.18), (4.19) y (4.20) son las que corresponden al caso de vibraciones libres no amortiguadas.

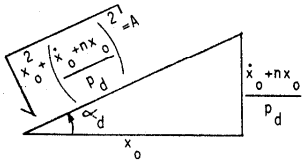
Interpretemos gráficamente la ec. (4.18). Para ello, definamos el siguiente término

$$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{\dot{x}_o + nx_o}{p_d}\right)^2}$$

de tal manera que multiplicando y dividiendo al mismo tiempo la ecuación (4.18) por A, tenemos:

$$x(t) = Ae^{-nt}\left(\cos p_d t(x_o/A) + \operatorname{sen} p_d t\left(\frac{\dot{x}_o + nx_o}{Ap_d}\right)\right) \qquad (4.21)$$

Si



$$\cos \alpha_d = x_o/A$$

$$\operatorname{sen} \alpha_d = \frac{\frac{\dot{x}_o + nx_o}{p_d}}{A}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ec. (4.21)

$$x(t) = Ae^{-nt}(\cos p_d t \cos\alpha_d + \operatorname{sen} p_d t \operatorname{sen}\alpha_d)$$

o bien

$$x(t) = Ae^{-nt}\cos(p_d t - \alpha_d) \qquad (4.22)$$

La Fig. 4.2 es la representación gráfica de la ec. ---- (4.22). En ella se puede apreciar que el movimiento del sistema es oscilatorio pero no periódico. Es decir, la amplitud de la vibración no permanece constante durante el movimiento sino que decrece por ciclos consecutivos; no obstante, las oscilaciones ocurren a intervalos iguales de tiempo. Este intervalo de tiempo es llamado PERIODO AMORTIGUADO y está dado por:

$$T_d = \frac{2\pi}{p_d} \qquad (4.23)$$

Entonces, la expresión que define FRECUENCIA AMORTIGUADA es

$$f_d = \frac{1}{T_d} \qquad (4.24)$$

También definamos el término RELACION DE AMORTIGUAMIENTO como

$$\varepsilon = \frac{n}{p} = \frac{c}{2mp} = \frac{c}{c_{cr}} \qquad (4.25)$$

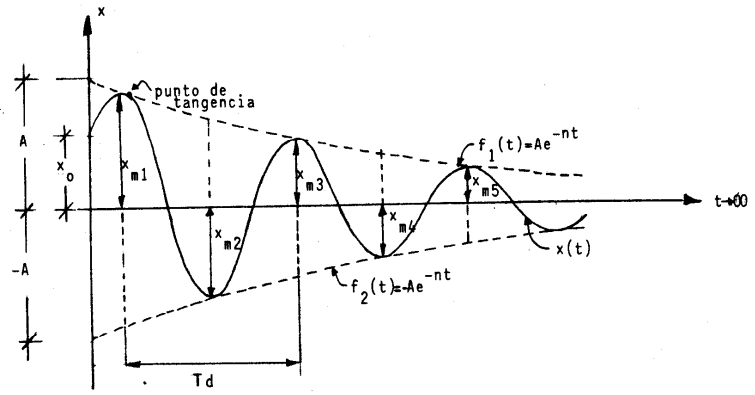


FIG. 4.2 REPRESENTACION GRAFICA DEL DESPLAZAMIENTO EN EL CASO DE VIBRACIONES LIBRES AMORTI-- GUADAS CON $X_o > 0$, $\dot{X}_o > 0$.

el término $c_{cr}=2mp$ es conocido como AMORTIGUAMIENTO CRITICO. Para este caso en que $n<p$, $c<c_{cr}$; y la frecuencia natural circular amortiguada puede también escribirse como

$$p_d = \sqrt{p^2-n^2} = p\sqrt{1-(n/p)^2} = p\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

La curva desplazamiento-tiempo de la Fig. 4.2 es tangente a las dos envolventes $f_1(t)$ y $f_2(t)$; sin embargo, estos puntos de tangencia no coinciden con los de dezplazamiento máximo donde la pendiente de la tangente es igual a cero.

Podemos determinar los puntos donde se ubican los valores máximos y mínimos de la ec. (4.22) obteniendo su primera derivada e igualándola a cero.

$$\dot{x}(t) = Ae^{-nt}(-p_d sen(p_d t-\alpha_d)-ncos(p_d t-\alpha_d)) = 0$$

en esta expresión, el término Ae^{-nt} es cero cuando $t\rightarrow\infty$. Entonces para encontrar el valor de t para el cual la ec. (4.22) alcanza sus valores máximos, igualamos a cero la segunda parte de la - primera derivada:

$$-p_d sen(p_d t-\alpha_d)-ncos(p_d t-\alpha_d) = 0$$

$$\frac{\text{sen}\ (p_d t-\alpha_d)}{\cos\ (p_d t-\alpha_d)} = -\ \frac{n}{p_d} = \tan\ (p_d t-\alpha_d)$$

$t = \dfrac{\tan^{-1}(-n/p_d + \alpha_d}{p_d}$, como primer valor y los subsecuentes, π/p_d segundos después.

Para ubicar los puntos en los que la ec. (4.22) es tangente a sus envolventes, la igualamos a $f_1(t) = Ae^{-nt}$ y $f_2(t) = -Ae^{-nt}$.

$$Ae^{-nt}\cos(p_d t-\alpha_d) = Ae^{-nt}$$

$$\cos(p_d t-\alpha_d) = 1$$

lo que implica que la expresión dentro del paréntesis es igual a

$$p_d t-\alpha_d = 2j\pi \qquad j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

$$t = \frac{2j\pi+\alpha_d}{p_d}$$

de igual manera para $f_2(t)$, encontramos

$$t = \frac{\pi(2j+1) + \alpha_d}{p_d} \qquad j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Cuando la relación n/p_d es pequeña (0.25 o menos) puede verificarse, y se hará al final de este capítulo, que los puntos máximos y los puntos de tangencia prácticamente coinciden.

La interpretación gráfica de las ecs. (4.19) y (4.20) - para velocidad y aceleración respectivamente, se lleva a cabo en forma muy similar a la efectuada sobre la ec. (4.18); considerando

$A \doteq \sqrt{\dot{x}_o^2 + ((-n\dot{x}_o-p^2x_o)/p_d)^2}$ para la ec. (4.19), y

$A \doteq \sqrt{(-(2n\dot{x}_o+p^2x_o))^2 + ((\dot{x}_o(n^2-p_d^2)+np^2x_o)/p_d)^2}$ para la ec. (4.20).

4.3 CASO II. SISTEMA AMORTIGUADO CRITICAMENTE.

Para un sistema con amortiguamiento crítico, n=p y la -

expresión dentro del radical es igual a cero, es decir

$$(c/2m)^2 - (k/m) = 0$$

$c = 2mp = c_{cr}$ como se definió anteriormente. En este caso las dos raíces de la ecuación característica son iguales a $-p$.

$$r_1 = r_2 = -n = -p \tag{4.26}$$

Al tener raíces repetidas, la solución toma la forma particular de

$$x = C_1 e^{-pt} + C_2 t e^{-pt} \tag{4.27}$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$x(t=0) = x_o$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_o$$

Para encontrar los valores de C_1 y C_2, sustituimos las condiciones iniciales en la ec. (4.27) y su primera derivada, de tal manera que

$$x_o = C_1 \tag{4.28}$$

$$\dot{x}(t) = -pC_1 e^{-pt} + C_2(e^{-pt} - pte^{-pt})$$

$$\dot{x}_o = -pC_1 + C_2(1-0)$$

$$\dot{x}_o + px_o = C_2 \tag{4.29}$$

Con estos valores para C_1 y C_2 dados por las ecs.(4.28) y (4.29) evaluamos la ec. (4.27) y así llegamos a la expresión final para el desplazamiento del sistema

$$x(t) = x_o e^{-pt} + (\dot{x}_o + px_o)te^{-pt}$$

$$x(t) = e^{-pt}(x_o + (\dot{x}_o + px_o)t) \tag{4.30}$$

La primera y segunda derivada con respecto a t, de la ec. (4.30), nos dan las expresiones correspondientes a la velocidad y la aceleración respectivamente. Así pues, derivando una vez:

$$\dot{x}(t) = e^{-pt}(\dot{x}_o - (\dot{x}_o + px_o)pt) \tag{4.31}$$

y para la aceleración:

$$\ddot{x}(t) = e^{-pt}(-p(2\dot{x}_o+px_o) + (\dot{x}_o+px_o)p^2t) \qquad (4.32)$$

La interpretación gráfica de la ec. (4.30) se muestra en la Fig. 4.3 para un valor fijo de x_o mayor que cero y varios valores de $\dot{x}_o$.

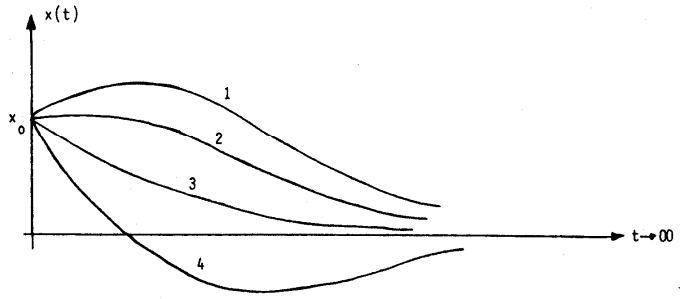


FIG. 4.3 REPRESENTACION GRAFICA DEL DESPLAZAMIENTO PARA EL CASO AMORTIGUADO CRITICAMENTE CON $x_o > 0$ Y VARIOS VALORES DE $\dot{x}_o$

En la curva 1, el valor de $\dot{x}_o$ es positivo; en la curva 2, igual a cero; para la número 3, $\dot{x}_o$ es negativo y además el término $-|\dot{x}_o| + px_o$ es mayor de cero; por último en la curva 4, $\dot{x}_o$ es también menor que cero pero $-|\dot{x}_o| + px_o$ es negativo.

Así pues, podemos observar que en cualquiera de los casos, el movimiento pierde su carácter oscilatorio.

4.4 CASO III. SISTEMA SOBREAMORTIGUADO.

En este último caso $n>p$, $n^2-p^2>0$ y las raíces de la ecuación característica (4.8) son reales y negativas, dadas por la ec. (4.9); de tal manera que la solución de la ec. (4.4) está dada directamente por la ec. (4.10):

$$x = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$$

donde

$$r_1 = -n + \sqrt{n^2-p^2}$$

$$r_2 = -n - \sqrt{n^2-p^2}$$

Si sustituimos para t=0, las condiciones iniciales ---- $x(t=0)=x_o$ y $\dot{x}(t=0)=\dot{x}_o$, tenemos que

$$x_o = C_1+C_2 \qquad\qquad C_2 = x_o-C_1$$

$$\dot{x}_o = r_1C_1+r_2C_2,$$ sustituyendo el valor de C_2:

$$\dot{x}_o = r_2x_o+C_1(r_1-r_2)$$

de donde

$$C_1 = \frac{\dot{x}_o-r_2x_o}{r_1-r_2}$$

$$C_2 = \frac{r_1x_o-\dot{x}_o}{r_1-r_2} \tag{4.33}$$

Así, la solución general dada por la ec. (4.10) se trans forma en:

$$x(t) = \frac{\dot{x}_o-r_2x_o}{(r_1-r_2)}\, e^{r_1t} + \frac{x_or_1-\dot{x}_o}{(r_1-r_2)}\, e^{r_2t} \tag{4.34}$$

Definamos $p_d' = \sqrt{n^2-p^2} = p\sqrt{\varepsilon^2-1}$ (4.35)

entonces

$$r_1 = -n+p_d'$$

$$r_2 = -n-p_d',$$

con estos valores C_1 y C_2, las ecs. (4.33), se expresarán ahora - como

$$C_1 = \frac{\dot{x}_o-x_o(-n-p_d')}{-n+p_d'+n+p_d'} = \frac{x_o(n+p_d')+\dot{x}_o}{2p_d'}$$

$$C_2 = \frac{x_o(-n+p_d')-\dot{x}_o}{2p_d'} = \frac{x_o(p_d'-n)-\dot{x}_o}{2p_d'}$$

yla ec. (4.34),

$$x(t) = \frac{x_o(n+p_d')+\dot{x}_o}{2p_d'}\, e^{(-n+p_d')t} + \frac{x_o(p_d'-n)-\dot{x}_o}{2p_d'}\, e^{(-n-p_d')t}$$

$$= \frac{x_o(n+p_d')+\dot{x}_o}{2p_d'}e^{-nt}e^{p_d't}+\frac{x_o(p_d'-n)-\dot{x}_o}{2p_d'}\, e^{-nt}e^{-p_d't}$$

$$e^{-nt}\left[\frac{x_o n}{2p'_d}\, e^{p'_d t} + \frac{x_o p'_d}{2p'_d}\, e^{p'_d t} + \frac{\dot{x}_o}{2p'_d}\, e^{p'_d t} + \right.$$

$$\left. \frac{x_o p'_d}{2p'_d}\, e^{-p'_d t} - \frac{x_o n}{2p'_d}\, e^{-p'_d t} - \frac{\dot{x}_o}{2p'_d}\, e^{-p'_d t}\right]$$

$$x(t) = e^{-nt}\left[\frac{x_o n}{2p'_d}(e^{p'_d t}-e^{-p'_d t})+\frac{x_o}{2}(e^{p'_d t}+e^{-p'_d t})+\right.$$

$$\left.\frac{\dot{x}_o}{2p'_d}(e^{p'_d t}-e^{-p'_d t})\right]$$

Si:

$$\text{senh } x = \tfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$$
$$\cosh x = \tfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$$

entonces

$$x(t) = e^{-nt}\left[\frac{x_o n}{p'_d}(\text{senh } p'_d t)+x_o(\cosh p'_d t)+\frac{\dot{x}_o}{p'_d}(\text{senh } p'_d t)\right]$$

$$x(t) = e^{-nt}\left(x_o \cosh p'_d t+\frac{x_o n+\dot{x}_o}{p'_d}\,\text{senh } p'_d t\right)$$

ya que $\varepsilon = n/p$, entonces $n = \varepsilon p$

la expresión final para el desplazamiento en el caso sobreamortiguado es

$$x(t) = e^{-\varepsilon p t}\left(x_o \cosh p'_d t+\frac{x_o n+\dot{x}_o}{p'_d}\,\text{senh } p'_d t\right) \qquad (4.36)$$

La ec. (4.36) no representa un movimiento oscilatorio; la resistencia viscosa es tan grande que cuando el cuerpo es liberado no vibra, solo se desliza gradualmente de regreso a su posición de equilibrio. Gráficamente, la respuesta de un sistema sobreamortiguado es similar al de uno amortiguado críticamente; solo que el regreso a la posición de equilibrio requiere más tiempo debido a que la relación de amortiguamiento se incrementa.

4.5 DECREMENTO LOGARITMICO.

Volviendo al caso subamortiguado, sección 4.2, hemos --

visto que la proporción de amortiguamiento depende de la relación n/p, ec. (4.25); y de la Fig. 4.2, podemos observar que la relación entre dos amplitudes máximas sucesivas x_{mi} y x_{mi+1}, será

$$\frac{x_{mi}}{x_{mi+1}} = \frac{Ae^{-nt_i}}{Ae^{-n(t_i+T_d)}} = e^{nT_d} = e^{\pounds} \tag{4.37}$$

El término £ en la ec. (4.37) es llamado DECREMENTO LOGARITMICO y es igual a

$$\pounds = \ln \frac{x_{mi}}{x_{mi+1}} = nT_d = \frac{2\pi n}{p_d} \cong \frac{2\pi n}{p} \tag{4.38}$$

y puede usarse para determinar experimentalmente el coeficiente de amortiguamiento n. Para ello, se deberá establecer por medio de la experimentación, la relación entre dos amplitudes máximas de vibración sucesivas. Sin embargo, se obtendrá una mayor precisión en los resultados si se utiliza mejor la relación de dos ciclos no consecutivos. En este caso la ec. (4.37) será

$$\frac{x_{mi}}{x_{mi+j}} = e^{jnT_d} \tag{4.39}$$

donde j representa el número de oscilaciones tomadas después de la oscilación i.

Entonces la ecuación para el decremento logarítmico quedará expresada como,

$$\pounds = \frac{1}{j} \ln \frac{x_{mi}}{x_{mi+j}} \tag{4.40}$$

A lo largo de este capítulo, hemos considerado siempre el coeficiente de amortiguamiento n como una cantidad positiva, es decir, como una fuerza resistente que se opone al movimiento. De esta forma, la energía en el sistema es disipada y la amplitud de la vibración disminuye con el tiempo, hasta que el movimiento desaparece. No obstante, existen casos en los que por el contrario, la energía es guardada dentro del sistema y como resultado la amplitud de vibración crece. Es en estos casos donde se utiliza la noción de AMORTIGUAMIENTO NEGATIVO.

Así, según la ec. (4.15), si n es negativo el factor -- e^{-nt} crece con el tiempo y las vibraciones se superponen gradualmente. Si consideramos que cuando n es positivo y las vibraciones desaparecen, estamos en el caso de un MOVIMIENTO ESTABLE; de la misma forma podemos decir que el caso de n negativo representará un MOVIMIENTO INESTABLE. Este último tipo de problemas no los consideraremos por no ser de interés dentro de la Ingeniería Civil.

4.6 PROBLEMAS RESUELTOS.

P.4.1. Como complemento de la sección 4.2, demostrar -- que cuando la relación n/p_d es pequeña (0.25 ó menos), los picos y los puntos de tangencia prácticamente coinciden, considerando - los siguientes casos:

1.- $x_o > 0$ y $\dot{x}_o = 0$

2.- $x_o = 0$ y $\dot{x}_o > 0$

SOLUCION:

1.- $x_o > 0$, $\dot{x}_o = 0$

$$x(t) = Ae^{-nt}\cos(p_d t - \alpha_d) \qquad (a)$$

donde

$$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{\dot{x}_o + nx_o}{p_d}\right)^2}\ , \text{ si } \dot{x}_o = 0$$

$$A = \sqrt{x_o^2 + (nx_o/p_d)^2} = x_o\sqrt{1 + (n/p_d)^2} \qquad (b)$$

además el tiempo para el cual tenemos un máximo o mínimo de (a) - está dado por

$$t = \frac{\tan^{-1}(-n/p_d) + \alpha_d}{p_d} \qquad (c)$$

entonces, sustituyendo (b) y (c) en (a)

$$x(t_p) = x_o\sqrt{1+(n/p_d)^2}\, e^{-n(\tan^{-1}(-n/p_d)+\alpha_d)/p_d}$$
$$\cos\left(p_d(\tan^{-1}(-n/p_d)+\alpha_d)/p_d - \alpha_d\right)$$

como $n/p_d \cong 0$, $\tan^{-1}(-n/p_d) \cong -n/p_d$ y $\cos(-n/p_d) \cong 1$

entonces

$$x(t_p) = x_o\, e^{-n(-n/p_d+\alpha_d)/p_d} \qquad (d)$$

Ahora sustituimos (b) y (c) en $f(t)=Ae^{-nt}$

$$f(t_p) = x_o \sqrt{1+(n/p_d)^2}\; e^{-n(\tan^{-1}(-n/p_d)+\alpha_d)/p_d}$$

$$f(t_p) = x_o\, e^{-n(-n/p_d+\alpha_d)/p_d} \qquad (e)$$

De las ecs. (d) y (e) concluimos que $x(t_p) = f(t_p)$ para valores de n/p próximos a cero. RESPUESTA

2.- $x_o = 0$, $\dot{x}_o > 0$

De manera análoga al inciso anterior,

$$A = \dot{x}_o/p_d \qquad (f)$$

y sustituyendo (f) y (c) en las ecuaciones para $x(t)$ y $f(t)$ tenemos

$$x(t_p) = (\dot{x}_o/p_d)e^{-n(-n/p_d+\alpha_d)/p_d} \qquad (g)$$

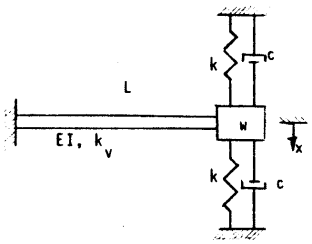
$$f(t_p) = (\dot{x}_o/p_d)e^{-n(-n/p_d+\alpha_d)/p_d} \qquad (h)$$

RESPUESTA

cuando $n/p_d \cong 0$

P.4.2. Para el sistema de la Fig. P.4.2, si el peso w tiene un desplazamiento inicial x_o = 1.0 in. y una velocidad inicial $\dot{x}_o$ = 20 in/seg, determinar el desplazamiento y la velocidad un segundo después. Suponga que el sistema tiene un 15% del amortiguamiento crítico. L = 100 in., EI = 10^8 lb-in^2, w = 3000 lb y k = 2000 lb/in. Suponga además, que la masa de la viga y la de los resortes que soportan al peso w, son despreciables.

FIG. P.4.2



SOLUCION:

$$k_e = k_v + k + k = 3EI/L^3 + 2k$$

$$k_e = \frac{3(10^8 \text{ lb-in}^2)}{(100 \text{ in})^3} + 2(2000 \text{ lb/in}) = 4\ 300 \text{ lb/in}$$

$$m = w/g = \frac{3\ 000 \text{ lb}}{386.4 \text{ in/s}^2} = 7.764 \text{ lb-s}^2\text{/in}$$

$$p = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{4\ 300 \text{ lb/in}}{7.764 \text{ lb-s}^2\text{/in}}} = 23.534 \text{ s}^{-1}$$

$$c_{cr} = 2mp = 2(7.764 \text{ lb-s}^2\text{/in})(23.534 \text{ s}^{-1}) = 365.436$$

$$\varepsilon = 0.15 = c/c_{cr} \text{ , entonces}$$

$$c = 0.15\ c_{cr} = 0.15(365.436 \text{ lb-s/in}) = 54.815 \text{ lb-s/in}$$

$$n = c/2m = \frac{54.815 \text{ lb-s/in}}{2(7.764 \text{ lb-s}^2\text{/in})} = 3.53 \text{ s}^{-1}$$

$$p_d = \sqrt{p^2 - n^2} = \sqrt{(23.534)^2 - (3.53)^2} = 23.268 \text{ s}^{-1}$$

Para movimiento subamortiguado:

$$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{\dot{x}_o + nx_o}{p_d}\right)^2}$$

$$A = \sqrt{(1.0)^2 + \left(\frac{20 + (3.53)(1.0)}{23.268}\right)^2} = 1.422 \text{ in}$$

$$\alpha_d = \cos^{-1}(x_o/A) = \cos^{-1}(1.0/1.422) = 0.791 \text{ rad}$$

Utilizando todos los valores anteriormente obtenidos, en la ec. - (4.22):

$$x(t) = A\ e^{-nt}\cos(p_d t - \alpha_d) \text{ , en } t=1 \text{ s}$$

$$x(1) = (1.422 \text{ in})e^{-3.53(1.0)}\cos(23.268 \times 1.0 - 0.791)$$

$$x(1) = -0.037 \text{ in}$$ RESPUESTA

Y, en la primera derivada de la ec. (4.22) para la velocidad:

$$\dot{x}(t) = -Ae^{-nt}(n\cos(p_d t - \alpha_d) + p_d \text{sen}(p_d t - \alpha_d)$$

$$\dot{x}(1) = (-1.422)e^{-3.53}(3.53\cos(23.268 - 0.791) + 23.268 \text{ sen}(23.268 - 0.791))$$

$$\dot{x}(1) = 0.583 \text{ in/s}$$ RESPUESTA

P.4.3. La amplitud de vibración del sistema mostrado en la Fig. P.4.3, se observa que decrece 5% en cada ciclo consecutivo de movimiento. Determinar el coeficiente de amortiguamiento c del sistema. Considere k=200 lb/in, m=10 lb-s^2/in

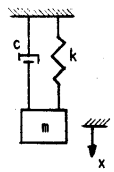


FIG. P. 4.3

SOLUCION:

$x_2 = 0.95\ x_1$

$\pounds = \ln x_1/x_2 = \ln x_1/0.95x_1 = \ln(1/0.95) = 0.0513$

$c_{cr} = 2mp = 2m\sqrt{k/m} = 2(10)(\sqrt{200/10}) = 89.443$ lb-s/in

$\pounds \cong 2\pi n/p = 2\pi c/c_{cr} = 0.0513$, entonces

$c = 0.0513\ c_{cr}/2\pi = \dfrac{(0.0513)(89.443)}{2\pi}$

$c = 0.7303$ lb-s/in RESPUESTA

P.4.4. Se observó experimentalmente que la amplitud en vibraciones libres de una cierta estructura, modelada como un sistema de un grado de libertad, decreció de 1.0 in a 0.4 in en 10 ciclos. ¿Cuál es el porcentaje de amortiguamiento crítico?

SOLUCION:

Utilizando la ec. (4.40)

$\pounds = \frac{1}{j} \ln x_{mi}/x_{mi+j}$

$\pounds = (1/10) \ln (1.0/0.4) = 0.092$

$\pounds = 2\pi\varepsilon$, entonces $\varepsilon = \pounds/2\pi$

$\varepsilon = 0.092/2\pi = 0.015 = 1.5\%$ RESPUESTA

P.4.5. Una estructura es modelada como un oscilador amortiguado con un resorte de constante k=30 kips/in y una frecuencia natural no amortiguada p=25 rad/s. Experimentalmente se encontró que una fuerza de 1 Kip, produce una velocidad relativa de 1.0 in/s, en el elemento amortiguador. Encontrar,(a) la relación de amortiguamiento ε, (b) el período de amortiguamiento T_d, (c) el decremento logarítmico $\pounds$, y (d) la relación entre dos amplitudes consecutivas.

SOLUCION:

$$p^2 = k/m \text{ , entonces } m = k/p^2 = \frac{30\ 000 \text{ lb/in}}{(25 \text{ s}^{-1})^2} = 48 \frac{\text{lb-s}^2}{\text{in}}$$

$$F = c\dot{x} \text{ , entoces } c = F/\dot{x} = \frac{1\ 000 \text{ lb}}{1.0 \text{ in/s}} = 1\ 000 \text{ lb-s/in}$$

(a) $$\varepsilon = n/p = c/2mp = \frac{1\ 000 \text{ lb-s/in}}{2(48 \text{ lb-s}^2/\text{in})(25 \text{ s}^{-1})}$$

$$\varepsilon = 0.417$$ RESPUESTA

(b) $$T_d = 2\pi/p_d$$

$$n = c/2m = \frac{1\ 000 \text{ lb-s/in}}{2(48 \text{ lb-s}^2/\text{in})} = 10.417 \text{ s}^{-1}$$

$$p_d = \sqrt{p^2-n^2} = \sqrt{(25)^2-(10.417)^2} = 22.726 \text{ s}^{-1}$$

$$T_d = 2\pi/22.726 \text{ s}^{-1} = 0.276 \text{ s}$$ RESPUESTA

(c) $$\pounds = 2\pi\varepsilon = 2\pi(0.417) = 2.62$$ RESPUESTA

(d) $$\pounds = \ln(x_1/x_2) \text{ entonces } e^{\pounds} = x_1/x_2$$

$$x_1/x_2 = e^{(2.62)} = 13.734$$ RESPUESTA

5

"METODOS NUMERICOS PARA EL CALCULO DE LA RESPUESTA DE SISTEMAS DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD"

En este capítulo y el siguiente, analizaremos la solu--- ción de los sistemas de un solo grado de libertad sujetos a la acción de fuerzas externas excitadoras ($F(t) \neq 0$), para los Problemas de Valores Iniciales de la Dinámica Estructural definidos por los dos siguientes modelos matemáticos:

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$
$$x(t=0) = x_o \qquad \text{Caso No Amortiguado}$$
$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_o$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$
$$x(t=0) = x_o \qquad \text{Caso Amortiguado}$$
$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_o$$

El hecho de que anteriormente se hayan estudiado siste-- mas en vibraciones libres ($F(t)=0$) se debe fundamentalmente a las

5

"METODOS NUMERICOS PARA EL CALCULO DE LA RESPUESTA DE SISTEMAS DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD"

En este capítulo y el siguiente, analizaremos la solu--- ción de los sistemas de un solo grado de libertad sujetos a la acción de fuerzas externas excitadoras ($F(t) \neq 0$), para los Problemas de Valores Iniciales de la Dinámica Estructural definidos por los dos siguientes modelos matemáticos:

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$
$$x(t=0) = x_o \qquad \text{Caso No Amortiguado}$$
$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_o$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$
$$x(t=0) = x_o \qquad \text{Caso Amortiguado}$$
$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_o$$

El hecho de que anteriormente se hayan estudiado siste-- mas en vibraciones libres ($F(t)=0$) se debe fundamentalmente a las

siguientes razones:

a) La respuesta en el caso general ($F(t) \neq 0$) requiere del conocimiento previo de la manera de comportarse en vibraciones libres con el objeto de determinar entre otras cosas, la frecuencia angular p, el período natural T y la frecuencia natural f.

b) En la práctica, cuando se tiene una estructura sometida a la acción de una fuerza excitadora, una vez que ésta ha terminado, el movimiento subsiguiente es en vibraciones libres.

c) Desde el punto de vista didáctico, por la sencillez matemática del modelo que corresponde a las oscilaciones libres, es conveniente estudiarlas al inicio.

La solución de los sistemas de un solo grado de libertad bajo la acción de fuerzas externas puede determinarse de dos formas:

1.- Métodos numéricos

2.- Métodos exactos

En este capítulo estudiaremos los métodos numéricos, los cuales son fáciles de entender y se basan en la aplicación de sencillas fórmulas recurrentes en cada intervalo de tiempo; los cuales son más precisos entre más pequeño sea el intervalo de tiempo. Entre los principales métodos numéricos se citan: el Método de los Impulsos de Aceleración, Método de la Aceleración Promedio, Método de la Aceleración Lineal y el Método β de Newmark.

Los métodos exactos, como su nombre lo indica, dan una solución exacta del comportamiento del sistema, lo cual no sucede con los métodos numéricos ya que la solución es aproximada. Por otra parte, los métodos exactos son más complejos debido a que se necesitan métodos de integración para determinar la solución del sistema. Además, hay casos en que debido a la variación de la fuerza excitadora o por razón de que el sistema es no lineal, según se verá en el siguiente capítulo, es imposible obtener una solución exacta de la ecuación diferencial del movimiento.

En las secciones siguientes se desarrollarán con cierto detalle los algoritmos de los métodos numéricos anteriormente men-

cionados, ilustrando la aplicación de los mismos en ciertos casos específicos.

5.1 METODO DE LOS IMPULSOS DE ACELERACION.

5.1.1 ECUACION DEL DESPLAZAMIENTO

Este es un procedimiento mediante el cual se resuelve la ecuación de Movimiento paso por paso, empezando en el tiempo cero, donde el desplazamiento y la velocidad son conocidos (condiciones iniciales).

En el tiempo $t=t_i$, la aceleración $a_i=\ddot{x}_i$ es igual a la -- pendiente de la tangente a la curva velocidad-tiempo como se indica en la Fig. 5.1, es decir,

$$\ddot{x}_i = \frac{dv_i}{dt} \qquad (5.1)$$

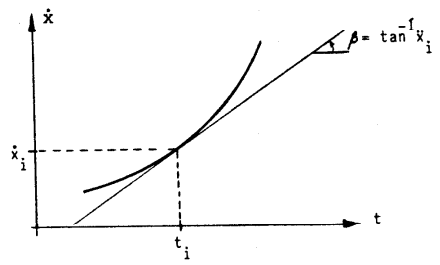


FIG. 5.1

Supondremos que para los tiempos t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, los desplazamientos y las velocidades son x_{i-1}, x_i, x_{i+1} y $\dot{x}_{i-1}$, $\dot{x}_i$, $\dot{x}_{i+1}$ respectivamente, como se indican en las Figs. 5.2 y 5.3.

Debido a que el intervalo de tiempo Δt es muy pequeño, - la pendiente de la tangente a la curva puede aproximarse por la -- pendiente de la secante, como se muestra en las Figs. 5.2 y 5.3.

De la Fig. 5.2, aplicando el criterio anterior y haciendo una aproximación hacia adelante, es decir, obteniendo la pen--- diente de la secante entre las velocidades $\dot{x}_i$ y $\dot{x}_{i+1}$ se determina

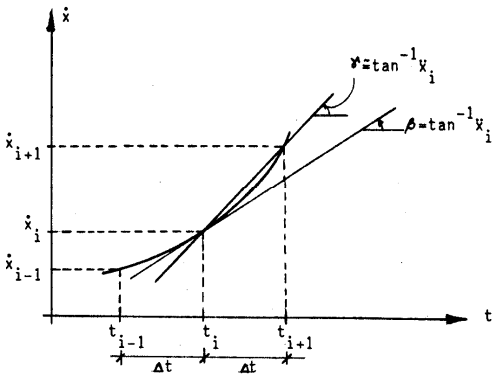


FIG. 5.2

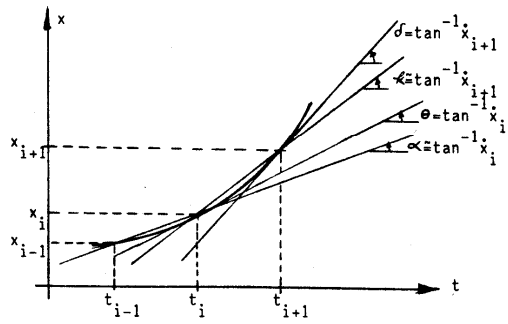


FIG. 5.3

la aceleración $\ddot{x}_i$,

$$\ddot{x}_i = \frac{\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i}{\Delta t} \tag{5.2}$$

En el tiempo $t=t_i$, la velocidad $v_i=\dot{x}_i$ es igual a la pendiente de la tangente a la curva desplazamiento-tiempo, como se indica en la Fig. 5.3,

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \tag{5.3}$$

Haciendo una aproximación hacia atrás, y con la ayuda de la Fig. 5.3, se obtienen las velocidades $\dot{x}_i$ y $\dot{x}_{i+1}$,

$$\dot{x}_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \tag{5.4}$$

$$\dot{x}_{i+1} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \tag{5.5}$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.4) y (5.5) en la ecuación (5.2) y - despejando el desplazamiento para el tiempo t_{i+1}:

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + \ddot{x}_i(\Delta t)^2 \tag{5.6}$$

Reacomodando términos en la ecuación anterior, se obtiene:

$$x_{i+1} = x_i + \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} + \ddot{x}_i \Delta t\right)\Delta t \tag{5.7}$$

donde:

$\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}$, es la velocidad promedio en el intervalo --- (t_{i-1}, t_i); y al término:

$\ddot{x}_i \Delta t$, se le denomina INCREMENTO DE ACELERACION O IMPULSO DE ACELERACION $\ddot{x}_i$, de aquí, el nombre del método.

$$V_c = \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} + \ddot{x}_i \Delta t \tag{5.8}$$

Sustituyendo la ec. (5.8) en la ec. (5.7),

$$x_{i+1} = x_i + V_c \Delta t \tag{5.9}$$

5.1.2 CASO NO AMORTIGUADO

Analizando la ec. (5.6) nos damos cuenta que falta por - determinar el valor de la aceleración $\ddot{x}_i$, el cual puede establecer se a partir de la ecuación de movimiento para el caso no amortigua do:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} = F(t) \tag{5.10}$$

Debido a que esta ecuación es válida para cualquier tiempo t_i,

$$m\ddot{x}_i + kx_i = F_i \tag{5.11}$$

Despejando $\ddot{x}_i$:

$$\ddot{x}_i = \frac{F_i}{m} - p^2 x_i \tag{5.12}$$

Sustituyendo la ec. (5.12) en la ec. (5.6), se obtiene finalmente la ecuación del desplazamiento para el tiempo t_{i+1}, x_{i+1};

$$x_{i+1} = (2-(p\Delta t)^2)x_i - x_{i-1} + (F_i/m)(\Delta t)^2 \qquad (5.13)$$

La fórmula recurrente dada por la ec. (5.13) es obviamente aproximada, pero da resultados precisos tomando intervalos de tiempo pequeños en relación a la variación de la aceleración. En realidad, como $\Delta t \to 0$ la solución se vuelve exacta, aunque el número de cálculos se incrementa cuando Δt se reduce, con lo cual se incrementa el número de intervalos de tiempo involucrados. En general, se ha encontrado que resultados suficientemente precisos para propósitos prácticos pueden obtenerse si el intervalo de tiempo se toma no mas grande que un décimo del período natural del sistema.

Antes de utilizar esta fórmula, es necesario utilizar un procedimiento especial en el primer intervalo de tiempo ya que, en t=0, no existe valor de x_{i-1}.

Existen dos opciones para el cálculo del desplazamiento x_1 correspondiente al primer intervalo de tiempo.

5.1.3 OPCIONES PARA EL CALCULO DEL DESPLAZAMIENTO x_1

PRIMERA OPCION.- Asume que la aceleración en el primer intervalo de tiempo (t_0, t_1), varía linealmente tal como se indica en la Fig. 5.4.

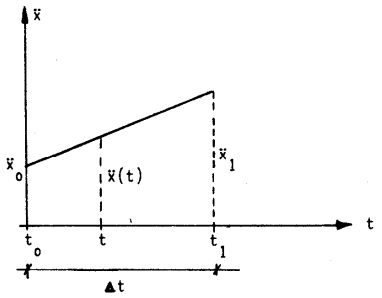


FIG. 5.4 GRAFICA ACELERACION-TIEMPO

La ecuación de la recta de la Fig. 5.4 es la siguiente:

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_0 + \frac{\ddot{x}_1-\ddot{x}_0}{\Delta t} t \tag{5.14}$$

Integrando la ecuación anterior:

$$\int \ddot{x}(t)dt = \int x_0 dt + \frac{\ddot{x}_1-\ddot{x}_0}{\Delta t} \int t dt \tag{5.15}$$

Por definición:

$$\int \ddot{x}(t)dt = \int \frac{d\dot{x}}{dt} dt \tag{5.16}$$

Sustituyendo la ec. (5.16) en la ec. (5.15):

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} d\dot{x} = x_0 \int_0^t dt + \frac{\ddot{x}_1-\ddot{x}_0}{\Delta t} \int_0^t t dt \tag{5.17}$$

Resolviendo la integral y reacomodando términos, se obtiene la ecuación de la velocidad para cualquier tiempo t dentro del primer intervalo de tiempo.

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \ddot{x}_0 t + \frac{\ddot{x}_1-\ddot{x}_0}{\Delta t} \frac{t^2}{2} \tag{5.18}$$

Si la ecuación anterior nuevamente se vuelve a integrar, se obtiene la ecuación del desplazamiento correspondiente al primer intervalo de tiempo.

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{\ddot{x}_0 t^2}{2} + \frac{\ddot{x}_1-\ddot{x}_0}{\Delta t} \frac{t^3}{6} \tag{5.19}$$

Ahora, sustituyendo en la ecuación anterior $t = \Delta t$, se obtiene

$$x_1 = x_0 + \dot{x}_0 \Delta t + \frac{1}{6}(\ddot{x}_1+2\ddot{x}_0)(\Delta t)^2 \tag{5.20}$$

En la ec. (5.20) se conocen las condiciones iniciales de velocidad y desplazamiento ($\dot{x}_0$, x_0) y el intervalo de tiempo Δt, y se desconocen las aceleraciones $\ddot{x}_0$ y $\ddot{x}_1$, determinándose a partir de las ecuaciones de movimiento.

$$\ddot{x}_0 = F_0/m - p^2 x_0 \tag{5.21}$$

$$\ddot{x}_1 = F_1/m - p^2 x_1 \tag{5.22}$$

Sustituyendo los valores de $\ddot{x}_0$ y $\ddot{x}_1$ en la ec. (5.20), finalmente - se obtiene la ecuación del desplazamiento x_1,

$$x_1 = \frac{\left(1-\frac{(p\Delta t)^2}{3}\right)x_0 + \dot{x}_0\Delta t + \left(\frac{2F_0+F_1}{6m}\right)\Delta t^2}{\left(1+\frac{(p\Delta t)^2}{6}\right)} \tag{5.23}$$

SEGUNDA OPCION.- supone que la aceleración en el primer intervalo de tiempo (t_0,t_1), es constante e igual a $\ddot{x}_0$, tal como - se indica en la Fig. 5.5.

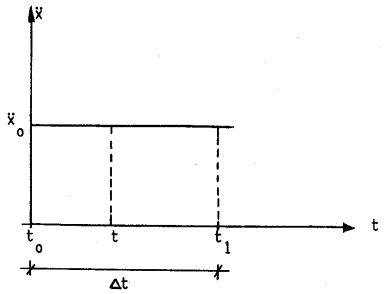


FIG. 5.5 GRAFICA ACELERACION-TIEMPO

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_0 \tag{5.24}$$

Integrando:

$$\int \ddot{x}(t) = \int \ddot{x}_0 dt \tag{5.25}$$

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} d\dot{x} = \int_0^t \ddot{x}_0 dt \tag{5.26}$$

Resolviendo la integral,

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \ddot{x}_0 t \tag{5.27}$$

Integrando de nuevo la ecuación anterior,

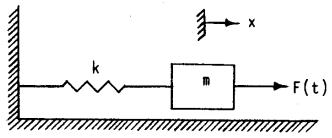
$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \tfrac{1}{2}\ddot{x}_0 t^2 \tag{5.28}$$

Por último, sustituyendo la ec. (5.21) en (5.28) y tomando $t=\Delta t$ se obtiene la ecuación para el desplazamiento x_1,

$$x_1 = \left(1-\frac{(p\Delta t)^2}{2}\right)x_0 + \dot{x}_0\Delta t + \frac{F_0(\Delta t)^2}{2m} \tag{5.29}$$

Esta opción no puede utilizarse cuando las condiciones iniciales de velocidad y desplazamiento y la fuerza F_0 son nulas, debido a que x_1 sería igual a cero, en este caso, se recomienda utilizar la primera opción.

5.1.4 ALGORITMO DEL METODO



Datos de entrada: k, m, F(t) (ecuación o en forma tabular), x_0, $\dot{x}_0$

1° Calcular la frecuencia circular p y el período de tiempo T

$$p = \sqrt{k/m} \; ; \; T = 2\pi/p$$

2° Definir el intervalo de tiempo Δt,

$$\Delta t \leq T/10$$

3° Calcular el desplazamiento x_1 con las ecs. (5.23) o (5.29)

4° Cálculo de x_{i+1}, con la ec. (5.13), aplicándola para cada uno de los intervalos de tiempo considerados.

5.1.5 CASO AMORTIGUADO

En este caso, también se parte de la ec.(5.7), pero la aceleración $\ddot{x}_i$ se obtiene a partir de la ecuación de movimiento para el caso amortiguado.

$$\ddot{x}_i = \frac{F_i - c\dot{x}_i - kx_i}{m} \tag{5.30}$$

Sustituyendo en la ec. (5.7), la ec. (5.30):

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + \frac{F_i - c\dot{x}_i - kx_i}{m} (\Delta t)^2 \tag{5.31}$$

Donde $\dot{x}_i$ es la velocidad promedio en el intervalo (x_i, x_{i-1}) y está dada por:

$$\dot{x}_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \tag{5.32}$$

Sustituyendo la ec. (5.32) en la ec. (5.31) se obtiene finalmente

la ecuación recurrente del desplazamiento:

$$x_{i+1} = (2-2n\Delta t-(p\Delta t)^2)x_i-(1-2n\Delta t)x_{i-1}+\frac{F_i}{m}(\Delta t)^2 \qquad (5.33)$$

5.1.6 OPCIONES PARA EL CALCULO DEL DESPLAZAMIENTO x_1

PRIMERA OPCION.- La aceleración varía linealmente en el primer intervalo.

Las aceleraciones $\ddot{x}_0$ y $\ddot{x}_1$ se calculan a partir de la ecuación de movimiento para el caso amortiguado,

$$\ddot{x}_0 = \frac{F_0-c\dot{x}_0-kx_0}{m} \qquad (5.34)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{F_1-c\dot{x}_1-kx_1}{m} \qquad (5.35)$$

donde: $$\dot{x}_1 = \frac{x_1-x_0}{\Delta t} \qquad (5.36)$$

Sustituyendo las ecs. (5.34), (5.35) y (5.36) en la ec. (5.20), se obtiene la ecuación para determinar el desplazamiento x_1,

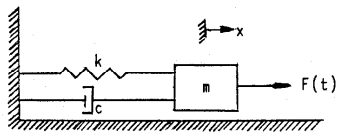
$$x_1 = \frac{1+\left[\frac{n\Delta t-(p\Delta t)^2}{3}\right]x_0 + \left[1-\frac{2n\Delta t}{3}\right]\dot{x}_0\Delta t + \left[\frac{2F_0+F_1}{6m}\right](\Delta t)^2}{\left[1+\frac{2n\Delta t+(p\Delta t)^2}{6}\right]} \qquad (5.37)$$

SEGUNDA OPCION.- La aceleración es constante en el primer intervalo.

Sustituyendo la ec. (5.34) en la ec. (5.28), se determina la ecuación para el desplazamiento x_1,

$$x_1 = \left[1-\frac{(p\Delta t)^2}{2}\right]x_0+(1-n\Delta t)\dot{x}_0\Delta t+\frac{F_0(\Delta t)^2}{2m} \qquad (5.38)$$

5.1.7 ALGORITMO DEL METODO



1° Obtener los datos de entrada k, c, m, x_0, $\dot{x}_0$ y F(t).

2° Cálculo de p y T.

3° Definir el intervalo de tiempo Δt.

4° Calcular el desplazamiento x_1 con las ecs. (5.37) ó (5.38).

5° Calcular x_{i+1} con la ec. (5.33), aplicándola para cada uno de los intervalos de tiempo considerados.

Si en las ecuaciones correspondientes al caso amortiguado, (5.33), (5.37) y (5.38), n se hace cero, se obtienen las ecuaciones para el caso no amortiguado, (5.13), (5.23) y (5.29).

5.2 METODO DE LA ACELERACION PROMEDIO.

5.2.1 ECUACION DE DESPLAZAMIENTO

Este método supone que la aceleración en el intervalo (t_i, t_{i+1}) es igual a la aceleración promedio entre los tiempos i e i+1, Fig. 5.6. Se considera que es un método incondicionalmente estable, es decir, la solución es convergente; no obstante a lo anterior, no es muy preciso.

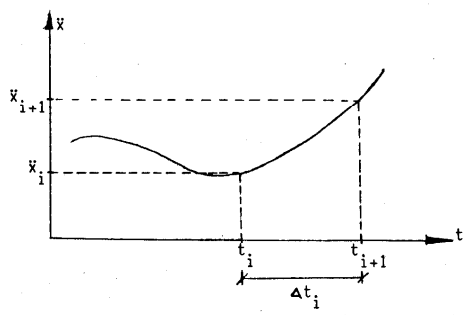


FIG. 5.6 GRAFICA ACELERACION-TIEMPO

De la Fig. 5.6 se obtiene la ecuación para la aceleración promedio, en el intervalo de tiempo (t_i, t_{i+1}),

$$a_i = \tfrac{1}{2}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \qquad (5.39)$$

De igual forma, de las Figs. 5.7b y 5.7c, se obtienen las ecuaciones de la velocidad y el desplazamiento para el tiempo

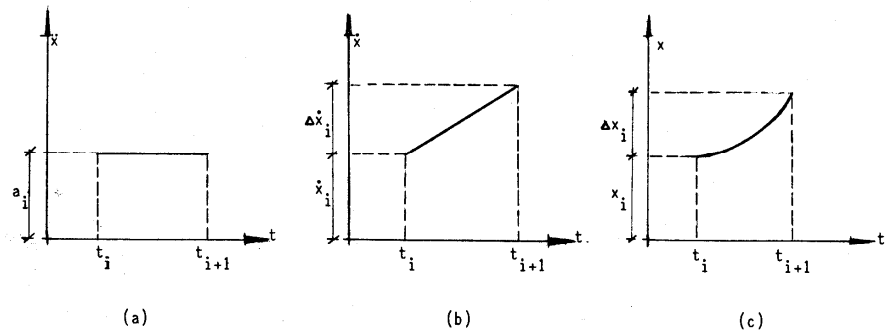


FIG. 5.7 GRAFICAS DE ACELERACION, VELOCIDAD Y DESPLAZAMIENTO EN EL INTERVALO DE TIEMPO (t_i, t_{i+1})

t_{i+1},

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{\Delta t_i}{2}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \tag{5.40}$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t_i + \frac{(\Delta t_i)^2}{4}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \tag{5.41}$$

La ec. (5.41) puede obtenerse al integrar la ec. (5.40). Por otra parte, se define,

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \tag{5.42}$$

$$\Delta \dot{x}_i = \dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i \tag{5.43}$$

$$\Delta \ddot{x}_i = \ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i \tag{5.44}$$

Si en la ec. (5.41) se suma y se resta $\ddot{x}_i$ en el tercer término del miembro derecho, y además el primero se pasa al lado izquierdo de ésta, se obtiene:

$$x_{i+1} - x_i = \dot{x}_i \Delta t_i + \frac{(\Delta t_i)^2}{4}(\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i + 2\ddot{x}_i) \tag{5.45}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior las ecs. (5.42) y (5.44),

$$\Delta x_i = \dot{x}_i \Delta t_i + \frac{(\Delta t_i)^2}{4}(\Delta \ddot{x}_i + 2\ddot{x}_i) \tag{5.46}$$

y despejando el incremento de la aceleración $\Delta\ddot{x}_i$,

$$\Delta\ddot{x}_i = \frac{4}{(\Delta t_i)^2}(\Delta x_i - \dot{x}_i \Delta t_i) - 2\ddot{x}_i \tag{5.47}$$

De igual forma, si en la ec. (5.40) se suma y se resta $\ddot{x}_i$, el término $\dot{x}_i$ se pasa del lado izquierdo y además se sustituyen las ecs. (5.43) y (5.44), se obtiene,

$$\Delta\dot{x}_i = \frac{\Delta t_i}{2}(\Delta\ddot{x}_i + 2\ddot{x}_i) \tag{5.48}$$

Sustituyendo el valor de $\Delta\ddot{x}_i$, ec. (5.47), eliminando términos,

$$\Delta\dot{x}_i = \frac{2}{\Delta t_i}\Delta x_i - 2\dot{x}_i \tag{5.49}$$

Aplicando la ecuación del movimiento para el caso amortiguado a los tiempo t_{i+1} y t_i, puesto que es válida para cualquier tiempo,

$$m\ddot{x}_{i+1} + c\dot{x}_{i+1} + kx_{i+1} = F_{i+1} \tag{5.50}$$

$$m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + kx_i = F_i \tag{5.51}$$

Restando miembro a miembro las ecs. (5.50) y (5.51),

$$m(\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i) + c(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) + k(x_{i+1} - x_i) = F_{i+1} - F_i \tag{5.52}$$

Definiendo,

$$\Delta F_i = F_{i+1} - F_i \tag{5.53}$$

Sustituyendo las ecs. (5.42), (5.43), (5.44) y (5.53) en la ecuación anterior se obtiene la "ECUACION INCREMENTAL DE EQUILIBRIO DINAMICO",

$$m\Delta\ddot{x}_i + c\Delta\dot{x}_i + k\Delta x_i = \Delta F_i \tag{5.54}$$

Donde ΔF_i es la fuerza incremental. Sustituyendo los valores de -- $\Delta\ddot{x}_i$ y $\Delta\dot{x}_i$, ecs. (5.47), (5.49), en (5.54) y reagrupando términos,

$$\left(\frac{4m}{(\Delta t_i)^2} + \frac{2c}{\Delta t_i} + k\right)\Delta x_i = \Delta F_i + \left(2c + \frac{4m}{\Delta t_i}\right)\dot{x}_i + 2m\ddot{x}_i \tag{5.55}$$

Lo anterior es similar a un resorte de constante k, al cual se le aplica una fuerza Q, estirando una cantidad Δ,

$$k\Delta = Q$$

A partir del razonamiento anterior, puede definirse:

$$k_i^* \Delta x_i = \Delta F_i^* \tag{5.56}$$

Comparando miembro a miembro las ecs. (5.55) y (5.56) se obtiene,

$$k_i^* = \frac{4m}{(\Delta t_i)^2} + \frac{2c}{\Delta t_i} + k \tag{5.57}$$

$$\Delta F_i^* = \Delta F_i + \left(2c + \frac{4m}{\Delta t_i}\right)\dot{x}_i + 2m\ddot{x}_i \tag{5.58}$$

Y despejando el incremento de los desplazamientos, Δx_i, de la ec. (5.56):

$$\Delta x_i = \frac{\Delta F_i^*}{k_i^*} \tag{5.59}$$

Si en las ecs. (5.57) y (5.58), el coeficiente de amortiguamiento c se hace igual a cero, se obtienen las ecuaciones para el caso no amortiguado.

5.2.2 ALGORITMO DEL METODO

1° Obtener los datos de entrada: k, c, m, x_o, $\dot{x}_o$, F_i; i=0,1,...,n.

2° Determinar p, T, Δt.

3° Obtener $\ddot{x}_o$ con la ecuación

$$\ddot{x}_o = \frac{1}{m}(F_o - c\dot{x}_o - kx_o) \tag{5.60}$$

4° Calcular k_i^* con la ec. (5.57)

5° Calcular ΔF_i^* con la ec. (5.58)

6° Calcular Δx_i con la ec. (5.59)

7° Calcular $\Delta\ddot{x}_i$ y $\Delta\dot{x}_i$ con las ecs. (5.47) y (5.49)

8° Calcular x_{i+1}, $\dot{x}_{i+1}$, $\ddot{x}_{i+1}$ con las ecs. (5.42), (5.43) y (5.44).

5.3 METODO DE LA ACELERACION LINEAL.

5.3.1 ECUACION DE DESPLAZAMIENTO

Un refinamiento obvio del método de "Los Impulsos de la Aceleración", es suponer una función continua para la aceleración en vez de una función escalonada, como se muestra en la Fig. 5.8.

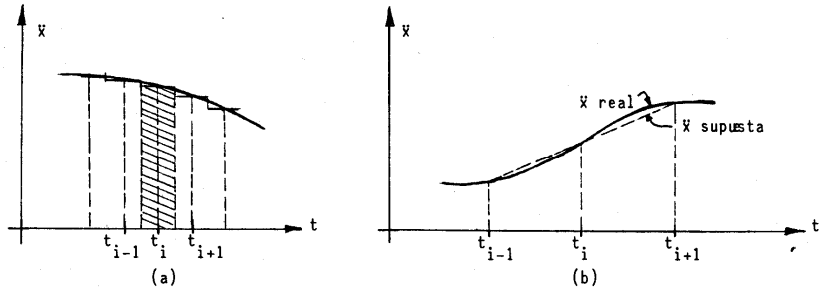


FIG. 5.8 FUNCIONES ESCALONADAS Y CONTINUAS DE LA ACELERACION

Así, el método de la aceleración lineal supone que la aceleración varía linealmente entre dos intervalos de tiempo t_i y t_{i+1}, como se indica en la Fig. 5.9a.

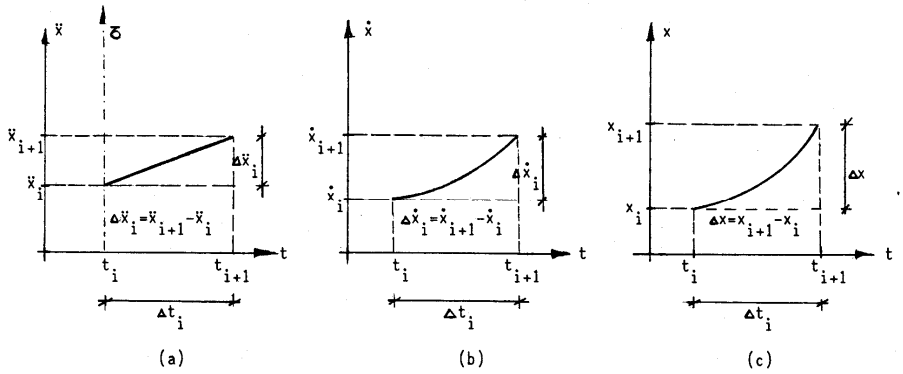


FIG. 5.9 GRAFICAS DE ACELERACION, VELOCIDAD Y DESPLAZAMIENTO

De la Fig. 5.9a, la aceleración entre los intervalos t_i y t_{i+1} esta dada por la siguiente expresión:

$$\ddot{x}(\tau) = \ddot{x}_i + \frac{\Delta\ddot{x}_i}{\Delta t_i}\tau \tag{5.61}$$

Sustituyendo la ec. (5.1) en la ecuación anterior e integrando, se obtiene la expresión para la velocidad.

$$\int_{\dot{x}_i}^{\dot{x}(\tau)} \frac{d\dot{x}(\tau)}{d\tau}\, d\tau = \int_0^{\tau}\left(\ddot{x}_i + \frac{\Delta\ddot{x}_i}{\Delta t_i}\right) d\tau \tag{5.62}$$

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_i + \ddot{x}_i\tau + \frac{\frac{1}{2}\Delta\ddot{x}_i}{\Delta t_i}\tau^2 \tag{5.63}$$

De igual manera, puede obtenerse la ecuación para el desplazamiento al sustituir la ec. (5.3) en la ec. (5.63) e integrar la expresión resultante.

$$x(\tau) = x_i + \dot{x}_i\tau + \frac{1}{2}\ddot{x}_i\tau^2 + \frac{1}{6}\frac{\Delta\ddot{x}_i}{\Delta t_i}\tau^3 \tag{5.64}$$

Sustituyendo en la ec. (5.64) $\tau = \Delta t_i$ se obtiene el desplazamiento -- x_{i+1},

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i\Delta t_i + \frac{1}{2}\ddot{x}_i\Delta t_i^2 + \frac{1}{6}\frac{\Delta\ddot{x}_i}{\Delta t_i}\Delta t_i^3 \tag{5.65}$$

Despejando $\Delta\ddot{x}_i$ y aplicando la ec. (5.42),

$$\Delta\ddot{x}_i = \frac{6}{(\Delta t_i)^2}\Delta x_i - \frac{6}{(\Delta t_i)}\dot{x}_i - 3\ddot{x}_i \tag{5.66}$$

En forma similar y con la ayuda de la Fig. 5.9b puede - determinarse la fórmula para el cálculo de $\Delta\dot{x}_i$,

$$\Delta\dot{x}_i = \frac{3\Delta x_i}{\Delta t_i} - 3\dot{x}_i - \frac{\Delta t_i}{2}\ddot{x}_i \tag{5.67}$$

Sustituyendo las ecs. (5.66) y (5.67) en la ecuación incremental de equilibrio dinámico, ec. (5.54), y aplicando de nuevo la ec. - (5.56) se determinan los siguientes valores:

$$k_i^* = k + \frac{6m}{(\Delta t_i)^2} + \frac{3c}{\Delta t_i} \tag{5.68}$$

$$\Delta F_i^* = \Delta F_i + m\left[\frac{6}{(\Delta t_i)}\dot{x}_i + 3\ddot{x}_i\right] + c\left[3\dot{x}_i + \frac{(\Delta t_i)}{2}\ddot{x}_i\right] \qquad (5.69)$$

El método de la aceleración lineal es condicionalmente estable y dará una solución divergente cuando se considere un incremento de tiempo Δt_i mayor o igual que ½T. El término condicionalmente estable significa que el método en algunas circunstancias produce errores de aproximación que se van incrementando cuando se calculan los desplazamientos correspondientes a instantes de tiempo progresivos. Sin embargo, en general se obtendrán resultados confiables si escogemos un Δt_i menor o igual que T/10. Pero si hay alguna duda acerca de lo adecuado de una solución numérica, se aconseja hacer un segundo análisis con un incremento de tiempo Δt_i igual a la mitad del anterior; si la respuesta no cambia apreciablemente en el segundo análisis, se puede suponer que los errores de aproximación que involucra este método son despreciables.

5.3.2 ALGORITMO DEL METODO

1° Obtener los datos de entrada: k, c, m, x_o, $\dot{x}_o$, F_i; i=1,2,...,n
2° Determinar p, T, y Δt_i.
3° Obtener $\ddot{x}_o$ con la ec. (5.60).
4° Calcular k_i^* con la ec. (5.68).
5° Calcular ΔF_i^* con la ec. (5.69).
6° Calcular Δx_i con la ec. (5.59).
7° Calcular $\Delta\ddot{x}_i$ y $\Delta\dot{x}_i$ con las ecs. (5.66) y (5.67) respectivamente.
8° Calcular x_{i+1}, $\dot{x}_{i+1}$, $\ddot{x}_{i+1}$ con las ecs. (5.42), (5.43) y (5.44) en cada uno de los intervalos considerados.

5.4 METODO "β DE NEWMARK".

5.4.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Un método muy versátil, descubierto por Newmark, el cual puede ser ajustado para adaptarse a un problema particular, es --

formulado en las ecuaciones siguientes:

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{\Delta t_i}{2}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \tag{5.70}$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t_i + (\tfrac{1}{2}-\beta)\ddot{x}_i(\Delta t_i)^2 + \beta \ddot{x}_{i+1}(\Delta t_i)^2 \tag{5.71}$$

Dentro de ciertos límites, β, puede seleccionarse a gusto, debido a que es un factor que toma en cuenta la variación de la aceleración en el intervalo de tiempo Δt_i. El valor seleccionado afecta la rapidez de convergencia dentro de cada iteración, la estabilidad del análisis y la magnitud del error. Un valor de β adecuado está relacionado con un buen valor de Δt_i.

Investigaciones relacionadas sobre el "Método β de Newmark", han demostrado que se obtienen resultados de precisión aceptable si β se toma dentro del rango de 1/6 a 1/4 y Δt_i menor o igual a 1/10 del período natural T.

Si en la ec. (5.71) se agrupan términos, se aplican las ecs. (5.42) y (5.44), y de la expresión resultante se despeja el incremento de la aceleración $\Delta\ddot{x}_i$,

$$\Delta\ddot{x}_i = \frac{\Delta x_i}{\beta(\Delta t_i)^2} - \frac{\dot{x}_i}{\beta(\Delta t_i)} - \frac{\ddot{x}_i}{2\beta} \tag{5.72}$$

Ahora, si en la ec. (5.71) se suma y se resta $\ddot{x}_i$, se sustituyen las ecs. (5.43) y (5.44) y además se sustituye el valor de $\Delta\ddot{x}_i$ dado por la ec. (5.72) se obtiene la fórmula para el cálculo de el incremento de la velocidad $\Delta\dot{x}_i$,

$$\Delta\dot{x}_i = \frac{\Delta x_i}{2\beta(\Delta t_i)} - \frac{\dot{x}_i}{2\beta} - \frac{\ddot{x}_i(\Delta t_i)}{4\beta} + \ddot{x}_i(\Delta t_i) \tag{5.73}$$

Y por último, sustituyendo los valores de $\Delta\ddot{x}_i$ y $\Delta\dot{x}_i$ en la ecuación incremental de equilibrio dinámico, ec. (5.54), se determinan las ecuaciones para el cálculo de k_i^* y ΔF_i^*.

$$k_i^* = \frac{m}{\beta(\Delta t_i)^2} + \frac{c}{2\beta(\Delta t_i)} + k \tag{5.74}$$

$$\Delta F_i^* = \Delta F_i + \left[\frac{m}{\beta(\Delta t_i)} + \frac{c}{2\beta}\right]\dot{x}_i + \left[\frac{m}{2\beta} + \frac{c(\Delta t_i)}{4\beta} - c(\Delta t_i)\right]\ddot{x}_i \qquad (5.75)$$

Inspeccionendo las ecs. (5.72), (5.73), (5.74) y (5.75); revelan que cuando se toma β=¼, corresponden exactamente al método de la "Aceleración Promedio" y si β=1/6, corresponden al método de la "Aceleración Lineal".

5.4.2 ALGORITMO DEL METODO

1° Obtener los datos de entrada: k, c, m, x_o, $\dot{x}_o$, F_i, i=1,2,...,n
2° Determinar p, T, Δt_i y
3° Determinar $\ddot{x}_o$ con la ec. (5.60)
4° Calcular k_i^* con la ec. (5.74)
5° Calcular ΔF_i^* con la ec. (5.75)
6° Calcular Δx_i con la ec. (5.59)
7° Calcular $\Delta\ddot{x}_i$ y $\Delta\dot{x}_i$ con las ecs. (5.72) y (5.73)
8° Calcular x_{i+1}, $\dot{x}_{i+1}$, $\ddot{x}_{i+1}$ con las ecs. (5.42), (5.43) y (5.44) para cada intervalo de tiempo considerado.

5.5 PROBLEMAS RESUELTOS.

P.5.1 Aplicando el método de los "Impulsos de Aceleración, determinar el esfuerzo normal máximo para la viga de la Fig. P.5.1a, si: w=30 Kips, E=30x10^6 lb/in^2, I=2096.4 in^4, S=175.4 in^3, la fuerza externa es de la forma dada por la gráfica de la Fig. P. 5.1b, y las condiciones iniciales son nulas.

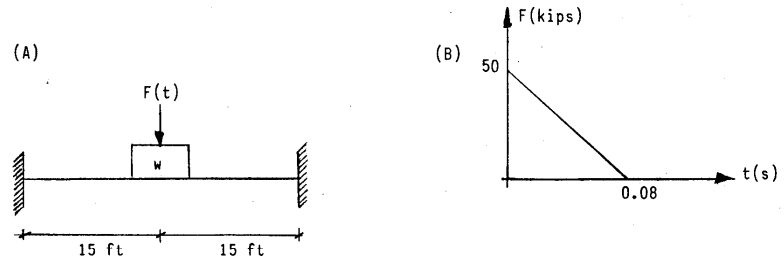


FIG. P.5.1

SOLUCION:

1° Cálculo de p y T

$$k = \frac{192EI}{L^3} = \frac{192(30x10^6)(2096.4)}{(30x12)^3} = 258\ 814.81\ lb/in$$

$$m = \frac{w}{g} = \frac{30\ 000}{32.2x12} = 77.64\ \frac{lb\text{-}s^2}{in} = 0.07764\ \frac{Kips\text{-}s^2}{in}$$

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{258\ 814.81}{77.64}} = 57.74\ rad/s$$

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi/57.74 = 0.11\ s$$

2° Cálculo del intervalo de tiempo Δt

$$\Delta t \leq T/10 = \frac{0.11}{10} = 0.011$$

$$\Delta t = 0.01\ seg$$

3° Cálculo del desplazamiento x_1 con la segunda opción, ec. (5.29)

$$x_1 = \frac{F_o \Delta t^2}{2m} = \frac{50(0.01)^2}{2(0.07764)} = 0.0322\ in$$

4° Ecuación de la fuerza excitadora

$$F_i = 50-625t_i \qquad 0 \leq t_i \leq 0.08$$

5° Cálculo de los desplazamientos x_{i+1}, sustituyendo los valores en la ec. (5.13), se obtiene:

$$x_{i+1} = 1.6666x_i - x_{i-1} + 0.001288F_i$$

t(s)	F(Kips)	x(in)
0.00	50.00	0.00000
0.01	43.75	0.03220
0.02	37.50	0.11001
0.03	31.25	0.19944
0.04	25.00	0.26263
0.05	18.75	0.27046
0.06	12.50	0.21227
0.07	6.25	0.09941
0.08	0.00	-0.03854
0.09	0.00	-0.16364
0.10	0.00	-0.23418
0.11	0.00	-0.22664

De la tabla anterior: $x_{máx} = 0.27046$ in

6° Cálculo del esfuerzo normal máximo.

-Esfuerzo normal máximo dinámico-

$$Q_{max} = kx_{max} = 258(0.27046) = 69.78 \text{ Kips}$$

$$M_{max} = \frac{QL}{8} = \frac{69.78(30x12)}{8} = 3\ 140.10 \text{ Kips-in}$$

$$\sigma_{dmax} = M/S = 3\ 140.10/175.4 = 17.90 \text{ KSI}$$ RESPUESTA

-Esfuerzo normal máximo estático-

$$Q_{max} = w = 30 \text{ Kips}$$

$$M_{max} = \frac{wL}{8} = \frac{30(30x12)}{8} = 1\ 350 \text{ Kips-in}$$

$$\sigma_{emax} = M/S = 1\ 350/175.4 = 7.70 \text{ KSI}$$ RESPUESTA

-Esfuerzo normal máximo-

$$\sigma_{max} = \sigma_{dmax} + \sigma_{emax} = 17.90+7.70 = 25.6 \text{ KSI}$$ RESPUESTA

P.5.2. Determinar, utilizando el método de la "Aceleración Promedio", los desplazamientos x(t) para el intervalo de tiempo (0,0.2), para el sistema de la Fig. P.5.2. Considerar los siguientes valores: c=0, k=40 lb/in, w=38.6 lb, x_o=0, $\dot{x}_o$=0, y F(t)= 10 cos10t (lb).

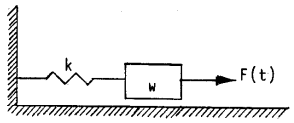


FIG. P.5.2

SOLUCION:

1° Cálculo de p y T

$$m = \frac{w}{g} = \frac{38.6}{32.2x12} = 0.10 \text{ lb-s}^2/\text{in}$$

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{40/0.10} = 20 \ s^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi/20 = 0.3142 \ s$$

$$\Delta t \leqslant T/10 = 0.3142/10 = 0.0314 \ s$$

entonces tomaremos $\Delta t = 0.02$ s

2° Cálculo de $\ddot{x}_o$ con la ec. (5.60)

Como $x_o = \dot{x}_o = 0$

$$\ddot{x}_o = F_o/m = 10/0.10 = 100 \ in/s^2$$

3° Cálculo de k_i^* con la ec. (5.57)

$$k_i^* = \frac{4(0.10)}{(0.02)^2} + 40 = 1040 \ lb/in$$

4° Cálculo de ΔF_i^* con la ec. (5.58)

$$\Delta F_i^* = \Delta F_i + \frac{4(0.10)}{0.02} \dot{x}_i + 2(0.10)\ddot{x}_i$$

$$\Delta F_i^* = \Delta F_i + 20\dot{x}_i + 0.20 \ \ddot{x}_i$$

5° Cálculo de Δx_i con la ec. (5.59)

$$\Delta x_i = \Delta F_i^*/1040$$

6° Cálculo de $\Delta\ddot{x}_i$ y $\Delta\dot{x}_i$ con las ecs. (5.47) y (5.49)

$$\Delta\ddot{x}_i = 10\ 000(\Delta x_i - 0.02\dot{x}_i) - 2\ddot{x}_i$$

$$\Delta\dot{x}_i = 100 \Delta x_i - 2\dot{x}_i$$

7° Cálculo de x_{i+1}, $\dot{x}_{i+1}$, $\ddot{x}_{i+1}$ con las ecs. (5.42), (5.43) y ---- (5.44) respectivamente

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$$

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta\dot{x}_i$$

$$\ddot{x}_{i+1} = \ddot{x}_i + \Delta\ddot{x}_i$$

Los resultados se muestran en la siguiente tabla P.5.2:

i	t_i	k^*_i	F_i	ΔF_i	ΔF^*_i	Δx_i	$\Delta \ddot{x}_i$	$\Delta \dot{x}_i$	x_i	$\dot{x}_i$	$\ddot{x}_i$
0	0.00	1040	10.0000	-0.1993	19.8007	0.01904	- 9.60	1.9040	0.00000	0.0000	100.00
1	0.02	1040	9.8007	-0.5991	55.5699	0.05343	-27.30	1.5350	0.01904	1.9040	90.40
2	0.04	1040	9.2106	-0.9572	80.4428	0.07735	-40.50	0.8570	0.07247	3.4390	63.10
3	0.06	1040	8.2534	-1.2863	89.1537	0.08572	-47.20	-0.0200	0.14982	4.2960	22.60
4	0.08	1040	6.9671	-1.5641	79.0359	0.07600	-46.00	-0.9520	0.23554	4.2760	- 24.60
5	0.10	1040	5.4030	-1.7794	50.5806	0.04864	-37.20	-1.7840	0.31154	3.3240	- 70.60
6	0.12	1040	3.6236	-1.9239	7.3161	0.00703	-22.10	-2.3770	0.36018	1.5400	-107.80
7	0.14	1040	1.6997	-1.9917	- 44.7117	-0.04299	- 2.70	-2.6250	0.36721	-0.8370	-129.90
8	0.16	1040	-0.2920	-1.9800	- 97.7400	-0.09398	17.80	-2.4740	0.32422	-3.4620	-132.60
9	0.18	1040	-2.2720	-1.8895	-143.5695	-0.13805	36.30	-1.9330	0.23024	-5.9360	-114.80
10	0.20	1040	-4.1615	-	-	-	-	-	0.09219	-7.8690	- 78.50

TABLA P.5.2

P.5.3. Para el marco de acero mostrado en la Fig. P.5.3 a, sometido a una carga dinámica horizontal F(t) al nivel de la trabe, cuya magnitud y variación en el tiempo están dados por la Fig. P.5.3b; determinar:

(a) El máximo desplazamiento horizontal de la trabe utilizando el método de la Aceleración Lineal

(b) La máxima fuerza cortante

(c) El momento flexionante máximo

(d) El esfuerzo normal dinámico máximo debido a la flexión en cada una de las columnas

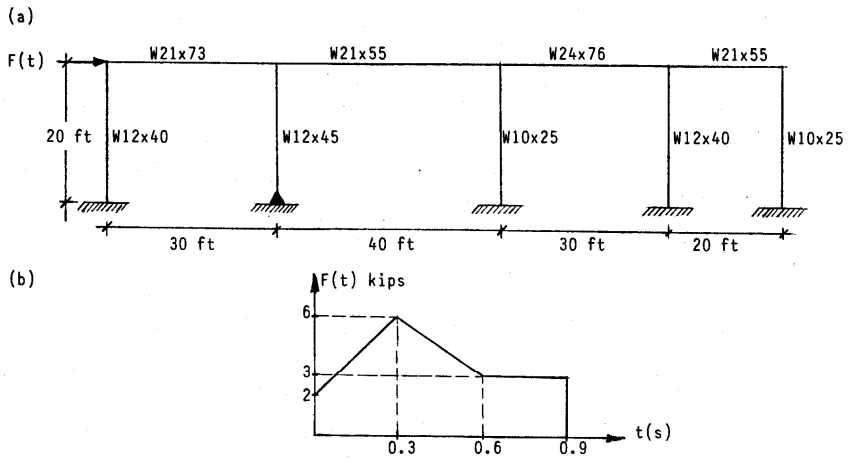


FIG. P.5.3

Considerar que el techo es una losa de concreto de 0.5 pies de espesor, con acción compuesta entre ella y las trabes; de tal manera que se puede considerar que las columnas no giran en sus extremos superiores. Además, se supondrá que los muros existentes estarán apropiadamente desligados de las trabes y columnas. Para el cálculo de la masa se tomarán en cuenta la losa, las trabes y la mitad de las columnas. El marco soporta un área de losa de 60x120 pies. El peso específico del concreto es de 150 lb/ft^3.

SOLUCION:

(a) Aplicando el algoritmo del método de la Aceleración Lineal:

1° Datos de entrada

$$w(\text{losa}) = \frac{150(60)(120)(0.5)}{1000} = 540 \text{ Kips}$$

$$w(\text{trabes}) = \frac{(73)(30)+(55)(40)+(76)(30)+(55)(20)}{1000} = 7.77 \text{ Kips}$$

$$w(\text{columnas}) = \frac{40(10)+45(10)+25(10)+40(10)+25(10)}{1000} = 1.75 \text{ Kips}$$

$$w(\text{total}) = 549.52 \text{ Kips}$$

$$m = \frac{w}{g} = \frac{549.52}{32.2x12} = 1.422 \ \frac{\text{Kips-s}^2}{\text{in}}$$

Del Manual de AISC obtenemos las inercias para cada uno de los perfiles involucrados:

PERFIL	INERCIA(in^4)
W21x73	1600
W21x55	1140
W24x76	2100
W10x25	133
W12x40	310
W12x45	351

$k = 12EI/L^3$ para ambos extremos empotrados

$k = 3EI/L^3$ para un extremo empotrado y otro articulado

Y como las columnas estan en paralelo la k_e es igual a la suma de las rigideces de cada una de ellas.

$$k_e = \frac{12(30x10^3)(2(310)+2(133))}{(20x12)^3} + \frac{3(30x10^3)(351)}{(20x12)^3}$$

$$= 25.358 \text{ Kips/in}$$

Además, de la Fig. P.5.3b se obtiene:

$F(t) = 2+(40/3)t$ para $0 \leq t \leq 0.3$

$F(t) = 9-10t$ para $0.3 \leq t \leq 0.6$

$F(t) = 3$ para $0.6 \leq t \leq 0.9$

2° Cálculo de p, T y Δt_i

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{25.358/1.422} = 4.22\ s^{-1}$$

$$T = 2\pi/p = 2\pi/4.22 = 1.489\ s$$

$$t \leq T/10 = 0.149 \cong 0.15\ s$$

3° Cálculo de $\ddot{x}_o$ con la ec. (5.60)

$$\ddot{x}_o = (1/1.422)(2) = 1.406\ in/s^2$$

4° Cálculo de k_i^* con la ec. (5.68)

$$k_i^* = 25.358 + \frac{6(1.422)}{(0.15)^2} = 404.558\ Kips/in$$

5° Cálculo de ΔF_i^* con la ec. (5.69)

$$\Delta F_i^* = \Delta F_i + 1.422((6/0.15)\dot{x}_i + 3\ddot{x}_i)$$
$$= \Delta F_i + 56.88\dot{x}_i + 4.266\ddot{x}_i$$

6° Cálculo de Δx_i con la ec. (5.59)

$$\Delta x_i = \Delta F_i^*/k_i^*$$

7° Cálculo de $\Delta \ddot{x}_i$ y $\Delta \dot{x}_i$ con las ecs. (5.66) y (5.67)

$$\Delta \ddot{x}_i = (6/(0.15)^2)\Delta x_i - (6/0.15)\dot{x}_i - 3\ddot{x}_i$$
$$= 266.667\Delta x_i - 40\dot{x}_i - 3\ddot{x}_i$$

$$\Delta \dot{x}_i = (3/0.15)\Delta x_i - 3\dot{x}_i - (0.15/2)\ddot{x}_i$$
$$= 20\Delta x_i - 3\dot{x}_i - 0.075\ddot{x}_i$$

8° Cálculo de x_{i+1}, $\dot{x}_{i+1}$, $\ddot{x}_{i+1}$ con las ecs. (5.42), (5.43) y ---- (5.44) respectivamente

$$x_{i+1} = \Delta x_i + x_i$$

$$\dot{x}_{i+1} = \Delta \dot{x}_i + \dot{x}_i$$

$$\ddot{x}_{i+1} = \Delta \ddot{x}_i + \ddot{x}_i$$

Ahora construimos la siguiente tabla P.5.3:

i	t_i	k^*_i	F_i	ΔF_i	ΔF^*_i	Δx_i	$\Delta \ddot{x}_i$	$\Delta \dot{x}_i$	x_i	$\dot{x}_i$	$\ddot{x}_i$
0	0.00	404.558	2.0	2.00	7.9980	0.0198	1.0620	0.2906	0.0000	0.0000	1.4060
1	0.15	404.558	4.0	2.00	29.0578	0.0718	0.1189	0.3791	0.0198	0.2906	2.4680
2	0.30	404.558	6.0	-1.50	47.6283	0.1177	-3.1620	0.1509	0.0916	0.6697	2.5869
3	0.45	404.558	4.5	-1.50	42.7224	0.1056	-2.9387	-0.3067	0.2093	0.8206	-0.5751
4	0.60	404.558	3.0	0.00	14.2408	0.0352	-0.6279	-0.5742	0.3149	0.5139	-3.5138
5	0.75	404.558	3.00	0.00	-21.0984	-0.0522	0.9171	-0.5525	0.3501	-0.0603	-4.1417
6	0.90	404.558	3.00	-	-	-	-	-	0.2979	-0.6128	-3.2246

TABLA P.5.3

De donde:

$$x_{máx} = 0.3501 \text{ in} \qquad \text{RESPUESTA}$$

(b) $$V_{máx} = \frac{12EI}{L^3} x_{máx}$$

$$= \frac{12(30x10^3)(310)}{(20x12)^3}(0.3501)$$

$$V_{máx} = 2.83 \text{ Kips} \qquad \text{RESPUESTA}$$

(c) $$M_{máx} = \frac{6EI}{L^2} x_{máx}$$

$$= \frac{6(30x10^3)(310)}{(20x12)^2}(0.3501)$$

$$M_{máx} = 339.16 \text{ Kips-in} \qquad \text{RESPUESTA}$$

(d) $$\bar{\sigma}_{din} = M_{máx}/S$$

$$= 339.16/51.9$$

$$\bar{\sigma}_{din} = 6.53 \text{ Kips/in}^2 \qquad \text{RESPUESTA}$$

P.5.4. Para la viga de la Fig. P.5.4a sujeta a una carga F(t), Fig. P.5.4b, calcular:

(a) El desplazamiento máximo aplicando el método "β de Newmark" para $\beta = 1/4$ y $\beta = 1/6$

(b) Graficar x(t) en el intervalo (0, 0.5)

(c) El esfuerzo normal máximo dinámico

(d) El esfuerzo normal máximo total

Considerar que:

k_R = 10 Kips/in, w = 20 Kips y L = 20 ft.

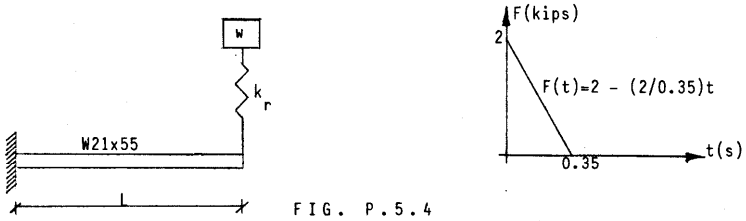


FIG. P.5.4

SOLUCION:

(a) Aplicando el algoritmo del método "β de Newmark":

1° Datos de entrada:

$$m = \frac{w}{g} = 20/(32.2x12) = 0.052 \ \frac{Kips\text{-}s^2}{in}$$

del Manual AISC I(W21x55) = 1140 in^4; S(W21x45) = 110 in^3

$$k_V = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3(30x10^3)(1140)}{(20x12)^3} = 7.422 \text{ Kips/in}$$

Como el resorte y la viga están conectados en serie:

$1/k_e = 1/k_v + 1/k_R = 0.23473$, entonces k_e=4.26 Kips/in

2° Cálculo de p, T y Δt_i

$$p = \sqrt{k/m} = \sqrt{4.26/0.052} = 9.051 \ s^{-1}$$

$$T = 2\pi/p = 2\pi/9.051 = 0.694 \text{ s}$$

$$t \leqslant T/10 = 0.694/10 = 0.069 \text{ s}$$

$$t = 0.05 \text{ s}$$

3° Cálculo de $\ddot{x}_o$ con la ec. (5.60)

$$\ddot{x}_o = F_o/m = 2/0.052 = 38.46 \text{ in/s}^2$$

4° Cálculo de k_i^* con la ec. (5.74)

$$k_i^* = \frac{m}{\beta(\Delta t_i)^2} + k$$

Para β= 1/4, k_i^* = 87.46

Para β= 1/6, k_i^* =129.06

5° Cálculo de ΔF_i^* con la ec. (5.75)

$$\Delta F_i^* = \Delta F_i + (m/\beta\Delta t_i)\dot{x}_i + (m/2\beta)\ddot{x}_i$$

$$\beta = 1/4, \ \Delta F_i^* = \Delta F_i + 4.16\dot{x}_i + 0.104\ddot{x}_i$$

$$\beta = 1/6, \ \Delta F_i^* = \Delta F_i + 6.24\dot{x}_i + 0.156\ddot{x}_i$$

6° Cálculo de Δx_i con la ec. (5.59)

$$\Delta x_i = \Delta F_i^*/k_i^*$$

7° Cálculo de $\Delta\ddot{x}_i$ y $\Delta\dot{x}_i$ con las ecs. (5.72) y (5.73)

$$\Delta\ddot{x}_i = \frac{\Delta x_i}{\beta(\Delta t_i)^2} - \dot{x}_i/(\beta\Delta t_i) - \ddot{x}_i/(2\beta)$$

$$\Delta\dot{x}_i = \frac{\Delta x_i}{2\beta(\Delta t_i)} - \frac{\dot{x}_i}{2\beta} - \frac{\ddot{x}_i}{4\beta}\Delta t_i + \ddot{x}_i\Delta t_i$$

$\beta = 1/4$, $\Delta\ddot{x}_i = 1600\Delta x_i - 80\dot{x}_i - 2\ddot{x}_i$

$\Delta\dot{x}_i = 40\Delta x_i - 2\dot{x}_i$

$\beta = 1/6$, $\Delta\ddot{x}_i = 2400\Delta x_i - 120\dot{x}_i - 3\ddot{x}_i$

$\Delta\dot{x}_i = 60\Delta x_i - 3\dot{x}_i - 0.025\,\ddot{x}_i$

8° Calcular x_{i+1}, $\dot{x}_{i+1}$, $\ddot{x}_{i+1}$ con las ecs. (5.42), (5.43) y (5.44) respectivamente

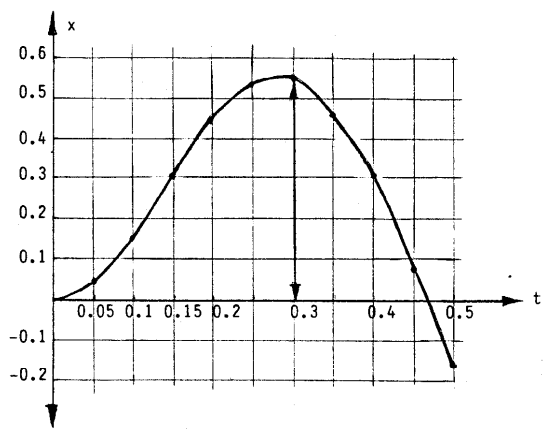
$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$$

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta\dot{x}_i$$

$$\ddot{x}_{i+1} = \ddot{x}_i + \Delta\ddot{x}_i$$

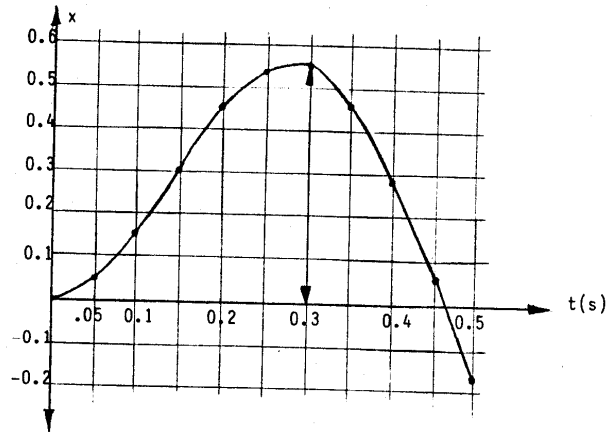
Los resultados se presentan en las siguientes dos tablas P.5.4a y P.5.4b para β=1/4 y β=1/6 respectivamente.

(b) $\beta = 1/4$



$x_{máx} = 0.5543$ in

$\beta = 1/6$



$x_{máx} = 0.554$ in

(c) Cálculo del esfuerzo normal máximo

$Q_{máx} = kx_{máx} = 4.26(0.554) = 2.36$ Kips

$M_{máx} = Q_{máx}L = 2.36(20x12) = 566.41$ Kips-in

$\sigma_{máx}(din) = M_{máx}/S = 566.41/110$

$= 5.15$ Kips/in^2

RESPUESTA

(d) Cálculo del esfuerzo normal total

$M_{máx}(est) = wL = 20(20x12) = 4800$ Kips-in

$\sigma_{máx}(est) = M_{máx}(est)/S = 4800/110 = 43.64$ Kips/in^2

$\sigma_{máx}(total) = \sigma_{máx}(est) + \sigma_{máx}(din)$

$= 43.64 + 5.15 = 48.79$ Kips/in^2

RESPUESTA

i	t_i	k^*_i	F_i	ΔF_i	ΔF^*_i	Δx_i	$\Delta \ddot{x}_i$	$\Delta \dot{x}_i$	x_i	$\dot{x}_i$	$\ddot{x}_i$
0	0.00	87.46	2.0000	-0.2857	3.7141	0.0425	- 8.92	1.700	0.0000	0.000	38.46
1	0.05	87.46	1.7143	-0.2857	9.8585	0.1127	-14.76	1.108	0.0425	1.700	29.54
2	0.10	87.46	1.4286	-0.2857	12.9327	0.1479	-17.56	0.300	0.1552	2.808	14.78
3	0.15	87.46	1.1429	-0.2857	12.3545	0.1413	-17.00	-0.564	0.3031	3.108	- 2.78
4	0.20	87.46	0.8571	-0.2857	8.2402	0.0942	-13.24	-1.320	0.4444	2.544	-19.78
5	0.25	87.46	0.5714	-0.2857	1.3721	0.0157	- 6.76	-1.820	0.5386	1.244	-33.02
6	0.30	87.46	0.2857	-0.2857	- 6.9022	-0.0789	1.00	-1.964	0.5543	-0.596	-39.78
7	0.35	87.46	0.0000	0.0000	-14.6287	-0.1679	13.72	-1.596	0.4754	-2.560	-38.78
8	0.40	87.46	0.0000	0.0000	-19.8952	-0.2275	18.60	-0.788	0.3075	-4.156	-25.06
9	0.45	87.46	0.0000	0.0000	-21.2389	-0.2428	19.96	0.176	0.0800	-4.944	- 6.46
10	0.50	87.46	0.0000	-	-	-	-	-	-0.1628	-4.768	13.50

TABLA P.5.4a

i	t_i	k^*_i	F_i	ΔF_i	ΔF^*_i	Δx_i	$\Delta \ddot{x}_i$	$\Delta \dot{x}_i$	x_i	$\dot{x}_i$	$\ddot{x}_i$
0	0.00	129.06	2.0000	-0.2857	5.7141	0.0443	- 9.06	1.696	0.0000	0.000	38.46
1	0.05	129.06	1.7143	-0.2857	14.8869	0.1153	-15.06	1.093	0.0443	1.696	29.40
2	0.10	129.06	1.4286	-0.2857	19.3609	0.1500	-17.82	0.271	0.1596	2.790	14.34
3	0.15	129.06	1.1429	-0.2857	18.2752	0.1416	-17.10	-0.601	0.3096	3.061	- 3.48
4	0.20	129.06	0.8571	-0.2857	11.8542	0.0919	-12.90	-1.351	0.4512	2.460	-20.58
5	0.25	129.06	0.5714	-0.2857	1.4085	0.0109	- 6.42	-1.834	0.5431	1.108	-33.48
6	0.30	129.06	0.2857	-0.2857	-11.0403	-0.0855	1.62	-1.954	0.5540	-0.726	-39.90
7	0.35	129.06	0.0000	0.0000	-22.6980	-0.1759	14.34	-1.555	0.4685	-2.680	-38.28
8	0.40	129.06	0.0000	0.0000	-30.1673	-0.2337	19.26	-0.715	0.2926	-4.236	-23.94
9	0.45	129.06	0.0000	0.0000	-31.6274	-0.2451	19.98	0.265	0.0589	-4.951	- 4.68
10	0.50	129.06	0.0000	-	-	-	-	-	-0.1862	-4.686	15.30

TABLA P.5.4b

6

"SISTEMAS NO LINEALES DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD"

En los capítulos anteriores, al analizar el comportamiento dinámico de sistemas con un grado de libertad, utilizando para ello el modelo que represente adecuadamente la estructura; hemos asumido que la fuerza de rigidez es proporcional al desplazamiento, así como que las fuerzas de amortiguamiento (también supuestas como una forma de disipación de energía), son proporcionales a la velocidad. Además, consideramos que la masa en el modelo permanece invariable con el tiempo. Así, la ecuación de movimiento para sistemas de este tipo resulta en una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal con coeficientes constantes como la expresada por la ec. (4.2):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

Dicha ecuación representa el comportamiento dinámico de muchas de las estructuras modeladas como sistemas de un solo grado

de libertad. Sin embargo, existen condiciones físicas para las cuales este modelo lineal no representará apropiadamente el comportamiento real de la estructura modelada. En tales casos, es necesaria la introducción de un modelo donde las fuerzas de resorte y amortiguamiento no sean proporcionales al desplazamiento y la velocidad, respectivamente. Con estas últimas consideraciones, la ecuación de movimiento resultante no es lineal, su solución matemática es muy compleja y frecuentemente será necesario hacer uso de algun método numérico para su integración.

6.1 ECUACION DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS NO LINEALES.

Consideremos el sistema de un grado de libertad mostrado en la Fig. 6.1a y su correspondiente diagrama de cuerpo libre, Fig. 6.1b. si asumimos que la fuerza del resorte es una función no lineal del tiempo, como se muestra en la Fig. 6.2a; entonces la pendiente de la curva $F_s - x$, definida como la constante de rigidez k, es variable en todos sus puntos; en otras palabras, k no es constante.

De la misma forma, si la fuerza de amortiguamiento es función de la velocidad, según se ve en la Fig. 6.2b, podemos afirmar que el valor de la constante de amortiguamiento definida como la pendiente de la curva $F_d - \dot{x}$, es variable en todos sus puntos.

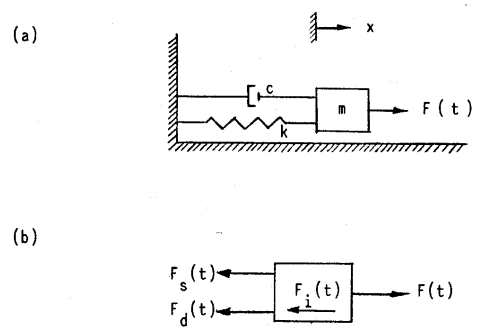


FIG. 6.1 (a) MODELO PARA SISTEMAS DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD, (b) DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

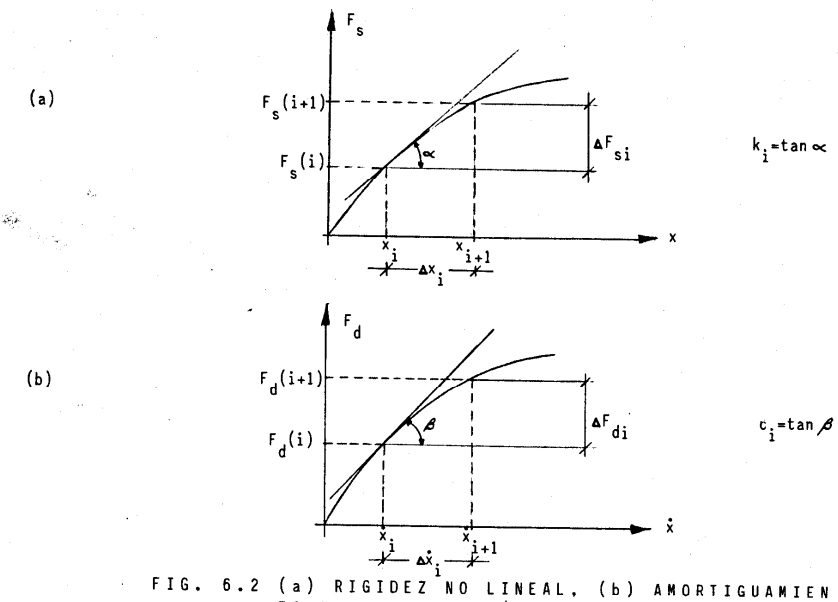


FIG. 6.2 (a) RIGIDEZ NO LINEAL, (b) AMORTIGUAMIENTO NO LINEAL.

El equilibrio dinámico para un sistema de esta naturaleza, se establece igualando a cero la suma de la fuerza de inercia $F_I(t)$, la fuerza de amortiguamiento $F_D(t)$, la fuerza de resorte -- $F_S(t)$, y la fuerza externa $F(t)$. Así, para un tiempo cualquiera - $t = t_i$ este equilibrio se expresará como:

$$F_I(t_i)+F_D(t_i)+F_S(t_i) = F(t_i) \tag{6.1}$$

y un intervalo de tiempo posterior $t = t_{i+1}$:

$$F_I(t_{i+1})+F_D(t_{i+1})+F_S(t_{i+1}) = F(t_{i+1}) \tag{6.2}$$

Restando miembro a miembro las ecs. (6.1) y (6.2) obtenemos:

$$\Delta F_{Ii} + \Delta F_{Di} + \Delta F_{Si} = \Delta F_i \tag{6.3}$$

conocida como la FORMA INCREMENTAL DE LA ECUACION DE EQUILIBRIO DINAMICO, donde:

$$\Delta F_{Ii} = F_I(t_{i+1}) - F_I(t_i)$$

$$\Delta F_{Di} = F_D(t_{i+1}) - F_D(t_i)$$

$$\Delta F_{Si} = F_S(t_{i+1}) - F_S(t_i)$$
$$\Delta F_{Ii} = F(t_{i+1}) - F(t_i) \qquad (6.4)$$

Como hemos asumido que la fuerza de amortiguamiento es función de la velocidad, y la fuerza de resorte función del desplazamiento; mientras la fuerza inercial permanece proporcional a la aceleración, podemos expresar la ec. (6.4) como:

$$\Delta F_{Ii} = m\Delta\ddot{x}_i \ , \ m=cte.$$
$$\Delta F_{Di} = c_i\Delta\dot{x}_i$$
$$\Delta F_{Si} = k_i\Delta x_i \qquad (6.5)$$

donde:

$$\Delta\ddot{x}_i = \ddot{x}(t_{i+1}) - \ddot{x}(t_i)$$
$$\Delta\dot{x}_i = \dot{x}(t_{i+1}) - \dot{x}(t_i)$$
$$\Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) \qquad (6.6)$$

Los coeficientes k_i y c_i en la ec. (6.5), que estan representados gráficamente como las pendientes correspondientes de las curvas mostradas en la Fig. 6.2a y 6.2b, se definen como el valor de la derivada de la fuerza de resorte y amortiguamiento respecto al desplazamiento y velocidad, respectivamente.

Sustituyendo las ecs. (6.5) en la ec. (6.3), podemos escribir de manera conveniente la ecuación incremental como:

$$m\Delta\ddot{x}_i + c_i\Delta\dot{x}_i + k_i\Delta x_i = \Delta F_i \qquad (6.7)$$

donde los valores de c_i y k_i estan evaluados para una velocidad y desplazamiento correspondientes a t_i y se supone permanecen constantes durante el incremento de tiempo Δt. Sin embargo, cabe aclarar, como estos dos coeficientes no permanecen constantes para dicho intervalo de tiempo, la ec. (6.7) es una ecuación aproximada.

6.2 SOLUCION DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS NO LINEALES.

El método más efectivo para resolver la ecuación no li--

neal de movimiento, es la integración paso por paso. En este método, se evalúa la respuesta en incrementos sucesivos de tiempo Δt, de una magnitud adecuada para el cálculo. Al inicio de cada intervalo, se establece la condición de equilibrio dinámico; luego, la respuesta para un incremento Δt se calcula aproximadamente suponiendo que el valor de $c(\dot{x})$ y $k(x)$ permanecerán constantes durante el intervalo Δt. El carácter no lineal de estos coeficientes es tomado en cuenta evaluándolos nuevamente al inicio de cada intervalo. Además, el desplazamiento y la velocidad al final de cada intervalo son tomados como las condiciones iniciales del siguiente.

Existen muchos procedimientos para efectuar la integración paso por paso. En este trabajo estableceremos los algoritmos para dos de los métodos más usuales:

1.- Método de la Aceleración Promedio

2.- Método de la Aceleración Lineal

Antes de ello, tratemos un poco el problema de la selección de un incremento de tiempo Δt apropiado; ya que la exactitud del método depende de la magnitud del incremento seleccionado. Para ello, pueden tomarse en cuenta los siguientes factores:

1.- El período natural de la estructura

2.- La relación de variación de la función de carga, y

3.- La complejidad de las curvas de rigidez y amortiguamiento.

En general, la experiencia ha demostrado que puede obtenerse una exactitud confiable si el incremento es tomado no mayor que la décima parte del período natural de la estructura

$$t \leq T/10 \tag{6.8}$$

Para la segunda consideración el intervalo deberá ser lo suficientemente pequeño como para que represente adecuadamente la variación de la carga con respecto al tiempo; y por último, debe procurarse que no haya variaciones bruscas en las funciones que definen la rigidez y el amortiguamiento, seleccionando para ello incrementos más pequeños en la proximidad de dichos cambios súbitos. En general, se puede observar que es factible modelar el comportamiento no lineal con una serie sucesiva de comportamientos lineales cambiantes.

6.3 ALGORITMO PARA EL METODO DE ACELERACION PROMEDIO.

1° Datos:

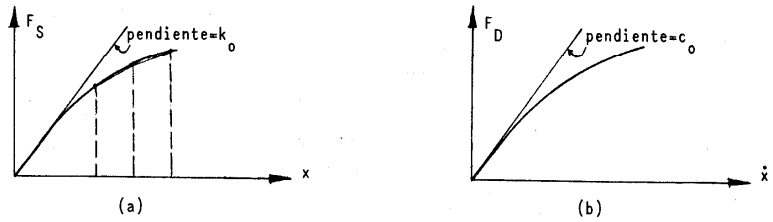


FIG. 6.3 (a) CURVA QUE DEFINE LA VARIACION DE LA FUERZA DEL RESORTE (b) CURVA QUE DEFINE LA VARIACION DE LA FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO.

además, conoceremos como datos los valores de: m, x_o, $\dot{x}_o$ y F(t) definida por una ecuación o en forma tabular.

2° Calcular

$$\ddot{x}_o = \frac{F_o - c_o\dot{x}_o - k_o x_o}{m} \tag{6.9}$$

comenzando con i=0

3° Con la ec. (5.57) calculamos

$$k_i^* = k_i + \frac{2c_i}{\Delta t_i} + \frac{4m}{(\Delta t_i)^2} \tag{6.10}$$

donde k_i y c_i son obtenidos de las gráficas de la Fig. 6.3a y 6.3b respectivamente.

4° Calcular

$$\Delta F_i^* = \Delta F_i + \left[\frac{4m}{\Delta t_i} + 2c_i\right]\dot{x}_i + 2m\ddot{x}_i \tag{6.11}$$

5° Calcular

$$\Delta x_i = \Delta F_i^*/k_i^* \tag{6.12}$$

6° Calcular

$$\Delta\dot{x}_i = (2/\Delta t_i)\Delta x_i - 2\dot{x}_i \tag{6.13}$$

7° Calcular

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \tag{6.14}$$

8° Calcular

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta\dot{x}_i \tag{6.15}$$

9° Calcular

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{1}{m}(F_{i+1} - F_{D(i+1)} - F_{S(i+1)}) \tag{6.16}$$

donde

$F_{D(i+1)}$ se obtiene de la Fig. 6.3b

$F_{S(i+1)}$ se obtiene de la Fig. 6.3a

10° Repetir los pasos del 3° al 9° para i=1,2,...,n-1

6.4 ALGORITMO PARA EL METODO DE ACELERACION LINEAL.

1° Datos: al igual que en el algoritmo anterior, las curvas F_S-x, F_D-$\dot{x}$, m, x_o. $\dot{x}_o$ y F(t) como ecuación o en forma tabular.

2° Calcular con la ec. (6.9):

$$\ddot{x}_o = \frac{F_o - c_o\dot{x}_o - k_o x_o}{m}$$

3° Del capítulo anterior, con la ec. (5.68) calculamos:

$$k_i^* = k_i + \frac{6m}{(\Delta t_i)^2} + \frac{3c_i}{\Delta t_i} \tag{6.17}$$

4° Calcular:

$$\Delta F_i^* = \Delta F_i + m\left[\frac{6\dot{x}_i}{\Delta t_i} + 3\ddot{x}_i\right] + c_i\left[3\dot{x}_i + \frac{\Delta t_i}{2}\ddot{x}_i\right] \tag{6.18}$$

5° Calcular con la ec. (6.12)

$$\Delta x_i = \Delta F_i^*/k_i^*$$

6° Calcular

$$\Delta\dot{x}_i = \frac{3}{\Delta t_i}\Delta x_i - 3\dot{x}_i - \frac{\Delta t_i}{2}\ddot{x}_i \tag{6.19}$$

7° calcular con la ec. (6.14)

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$$

8° Calcular con la ec. (6.15)

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta\dot{x}_i$$

9° Calcular con la ec. (6.16)

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{1}{m}(F_{i+1} - F_{D(i+1)} - F_{S(i+1)})$$

10° Repetir pasos del 3° al 9° para i=1,2,...,n-1.

6.5 COMPORTAMIENTO ELASTOPLASTICO.

La Fig. 6.4a muestra una curva fuerza-desplazamiento que podemos asociar a cualquier estructura modelada como sistema de un grado de libertad que llega a fluir plásticamente. Puede apreciarse que existe una porción de la curva en la cual el comportamiento es elástico lineal; después del cual, para cualquier deformación posterior, se presenta el flujo plástico.

Si la estructura se descarga, el comportamiento vuelve a ser elástico hasta que es vuelto a cargar produciendo ahora flujo plástico en compresión. Así, en esta forma, la estructura puede someterse a carga y descarga cíclicas. En cada ciclo se disipará cierta cantidad de energía proporcional al área bajo la curva, como se ve en la Fig. 6.4a.

Todo este comportamiento se simplifica definiendo un punto de fluencia, más allá del cual el desplazamiento adicional tendrá lugar para un valor constante de fuerza de respuesta sin ningún incremento posterior de la carga que lo produce. Este comportamiento es conocido como comportamiento ELASTOPLASTICO y su curva fuerza-desplazamiento puede apreciarse en la Fig. 6.4b.

En ella, se representa un ciclo elastoplástico general, suponiendo que las condiciones iniciales son cero (es decir, $x_o=0$, $\dot{x}_o=0$) para la estructura sin carga. Ahora, mientras la carga es aplicada gradualmente, el sistema se comporta elásticamente a lo largo de la recta E_o; el desplazamiento x_t para el cual se inicia el flujo plástico, así como el desplazamiento x_c para el flujo plástico en compresión, pueden obtenerse de:

$$x_t = R_t/k$$
$$x_c = R_c/k \qquad (6.20)$$

donde R_t y R_c son, respectivamente, las fuerzas que provocan la -- fluencia en tensión y compresión, y k es la rigidez elástica de la estructura. El sistema estará sobre la recta E_o siempre y cuando

$$x_c < x < x_t$$

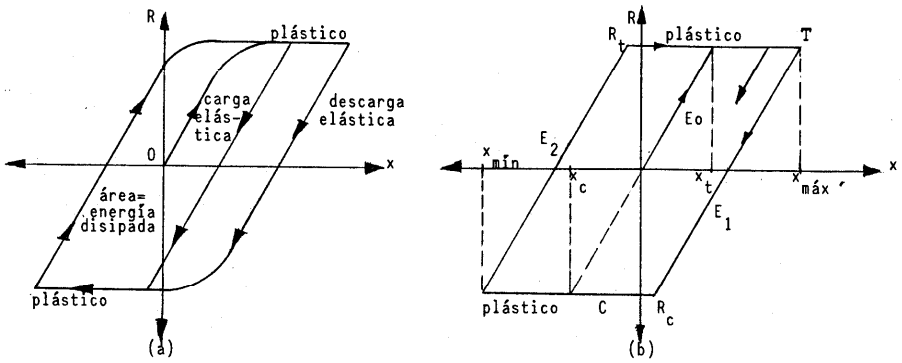


FIG. 6.4 MODELOS ESTRUCTURALES ELASTO-PLASTICOS. (a) COMPORTAMIENTO PLASTICO GENERAL (b) COMPORTAMIENTO ELASTO-PLASTICO.

Cuando el desplazamiento x alcance el valor x_t, la es--- tructura inicia su comportamiento plástico a lo largo de T hasta - que la velocidad cambia de signo; es decir, $\dot{x} < 0$. Al ocurrir ésto el sistema vuelve al régimen elástico sobre la recta E_1 alcanzando un nuevo desplazamiento máximo de fluencia $x_{máx}$ sobre T, que ocu-- rre cuando $\dot{x}=0$. O sea,

$$x_t = x_{máx}$$
$$x_c = x_{máx} - \frac{(R_t - R_c)}{k} \qquad (6.21)$$

Por el contrario, si ahora el sistema es cargado en com- presión hasta que alcance el valor x_c, permanecerá sobre C siempre y cuando $\dot{x} < 0$. Cuando $\dot{x} > 0$, regresamos de nuevo al comportamiento

elástico. Ahora:

$$x_c = x_{mín}$$
$$x_t = x_{mín} + \frac{(R_t - R_c)}{k} \qquad (6.22)$$

donde $x_{mín}$ es el desplazamiento mínimo a lo largo de C y ocurrirá cuando $\dot{x}=0$.

6.6 ALGORITMO PARA LA SOLUCION PASO POR PASO DE SISTEMAS ELASTO---PLASTICOS CON UN SOLO GRADO DE LIBERTAD UTILIZANDO EL METODO DE LA ACELERACION LINEAL.

INICIO Y DATOS DE ENTRADA

1° Establecer los valores para k, m, c, R_t, R_c, y un listado para los valores de t_i y las correspondientes magnitudes de la excitación F_i.

2° Hacer $x_o = 0$ y $\dot{x}_o = 0$

3° Calcular la aceleración inicial

$$\ddot{x}_o = \frac{F(t=0)}{m} \qquad (6.23)$$

4° Seleccionar el incremento de tiempo Δt y calcular las constantes

$$a_1=3/\Delta t,\ a_2=6/\Delta t,\ a_3=\Delta t/2,\ a_4=6/\Delta t^2 \qquad (6.24)$$

5° Calcular los puntos de fluencia

$$x_t = R_t/k$$
$$x_c = R_c/k \qquad (6.25)$$

PARA CADA INTERVALO DE TIEMPO

1° Checar si el sistema permanece en su estado elástico anterior o si ya su comportamiento es plástico, presentándose los siguientes casos:
- comportamiento plástico en tensión
- comportamiento elástico
- comportamiento plástico en compresión

2° Calcular el desplazamiento x y la velocidad $\dot{x}$ al final de cada intervalo tomando en cuenta las siguientes condiciones:

(a) Cuando el sistema es elástico al inicio del intervalo y

$x_c < x < x_t$ ----- comportamiento elástico

$x > x_t$ ----- comportamiento plástico en tensión

$x < x_c$ ----- comportamiento plástico en compresión.

(b) Cuando el sistema es plástico en tensión al inicio del intervalo y

$\dot{x} > 0$ ----- comportamiento plástico en tensión

$\dot{x} < 0$ ----- comportamiento elástico.

(c) Cuando el sistema es plástico en compresión al inicio del intervalo y

$\dot{x} < 0$ ----- comportamiento plástico en compresión

$\dot{x} > 0$ ----- comportamiento elástico.

3° Calcular la rigidez efectiva:

$$k_i^* = k_i + a_4 m + a_1 c_i \tag{6.26}$$

donde k_i es igual a k para comportamiento elástico y es igual a cero para comportamiento plástico.

4° Calcular la fuerza incremental efectiva:

$$\Delta F_i^* = \Delta F_i + (a_2 m + 3c_i)\dot{x}_i + (3m + a_3 c_i)\ddot{x}_i \tag{6.27}$$

5° Calcular el incremento de desplazamiento

$$\Delta x_i = \Delta F_i^* / k_i^* \tag{6.28}$$

6° Calcular el incremento de velocidad

$$\Delta \dot{x}_i = a_1 \Delta x_i - 3\dot{x}_i - a_3 \ddot{x}_i \tag{6.29}$$

7° Calcular el desplazamiento y la velocidad al final del intervalo de tiempo

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \tag{6.30}$$

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta \dot{x}_i \tag{6.31}$$

8° Calcular la aceleración $\ddot{x}_{i+1}$ al final del intervalo de tiempo usando la ecuación de equilibrio dinámico:

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{1}{m}(F(t_{i+1})-c_{i+1}\dot{x}_{i+1}-R) \qquad (6.32)$$

en la cual

$R = R_t-(x_t-x_{i+1})k$ si ocurre comportamiento elástico

$R = R_t$ si ocurre comportamiento plástico en tensión

$R = R_c$ si ocurre comportamiento plástico en compresión.

Para ilustrar la aplicación del método de integración paso por paso descrito anteriormente, consideremos el sistema de un grado de libertad de la Fig. 6.5 con comportamiento elastoplástico sujeto a una carga como la mostrada en la Fig. 6.5b. Para este ejemplo, asumimos que el coeficiente de amortiguamiento permanece constante (ε=0.087). De aquí que la no linearidad del sistema provendrá de los cambios en la rigidez.

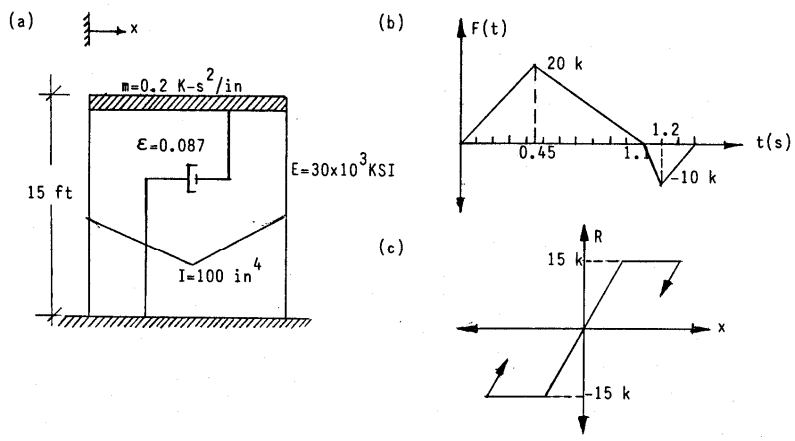


FIG. 6.5 MARCO CON COMPORTAMIENTO ELASTOPLASTICO SUJETO A CARGA DINAMICA (a) MARCO, (b) CARGA, (c) COMPORTAMIENTO ELASTOPLASTICO

La rigidez del sistema durante el comportamiento elástico es

$$k = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12x30x10^3x2x100}{(15x12)^3} = 12.35 \text{ Kips/in}$$

y el coeficiente de amortiguamiento:

$$c = \varepsilon c_{cr} = (0.087)(2)\sqrt{0.2x12.35} = 0.27 \text{ Kips-s/in}$$

El desplazamiento y la velocidad iniciales son $x_o=\dot{x}_o=0$. La aceleración inicial es

$$\ddot{x}_o = F(0)/k = 0$$

Los desplazamientos de fluencia son

$$x_t = R_t/k = 15/12.35 = 1.215 \text{ in}$$

y

$$x_c = -1.215 \text{ in}$$

El período natural es $T=2\pi\sqrt{m/k} = 0.8$ seg (para el sistema elástico). Por conveniencia numérica, seleccionamos $\Delta t=0.1$ seg. La rigidez efectiva de la ec. (6.26) es

$$k_i^* = k_i+\frac{6}{(0.1)^2}(0.2)+\frac{3}{(0.1)}(0.27),$$

$$k_i^* = k_i+128.22 \qquad (6.33)$$

donde

$k_i = k = 12.35$ para comportamiento elástico y

$k_i = 0$ para comportamiento plástico.

La carga incremental efectiva de la ec. (6.27) es

$$\Delta F_i^* = \Delta F_i+(a_2m+3c_i)\dot{x}_i+(3m+a_3c_i)\ddot{x}_i$$

$$\Delta F_i^* = \Delta F_i+12.822\dot{x}_i+0.6137\ddot{x}_i \qquad (6.34)$$

El incremento de velocidad dado por la ec. (6.29) se convierte en:

$$\Delta\dot{x}_i = 30\Delta x_i-3\dot{x}_i-0.05\ddot{x}_i \qquad (6.35)$$

Los cálculos necesarios pueden ordenarse convenientemente como se verá en la tabla 6.1. En este ejemplo con comportamiento elastoplástico, la respuesta cambia abruptamente en los puntos donde se inicia o termina la fluencia. Para obtener una mayor exactitud, es deseable subdividir el intervalo de tiempo en la cercanía de los cambios de estado. Este refinamiento del método no ha sido usado en el presente análisis. La rigidez calculada al inicio de cada intervalo se ha supuesto constante durante él.

t	F	x	COD	$\dot{x}$	R	$\ddot{x}$	k	k*	F	F*	x	$\dot{x}$
0.00	0.000	0.0000	0	0.0000	0.000	0.000	12.35	140.57	4.444	4.444	0.0316	0.9485
0.10	4.444	0.0316	0	0.9485	0.390	18.972	12.35	140.57	4.444	28.249	0.2010	2.2359
0.20	8.888	0.2326	0	3.1844	2.871	25.723	12.35	140.57	4.444	61.050	0.4343	2.1930
0.30	13.333	0.6669	0	5.3760	8.233	18.134	12.35	140.57	4.444	84.510	0.6012	1.0000
0.40	17.777	1.2681	1	6.3768	15.000	5.152	0.00	128.22	0.685	85.609	0.6677	0.6422
0.50	18.462	1.9358	1	7.0190	15.000	7.691	0.00	128.22	- 3.077	91.641	0.7147	-0.0001
0.60	15.358	2.6505	1	7.0189	15.000	- 7.693	0.00	128.22	- 3.077	82.199	0.6409	-1.4400
0.70	12.308	3.2916	1	5.5791	15.000	-21.105	0.00	128.22	- 3.077	55.506	0.4329	-2.6950
0.80	9.231	3.7244	1	2.8840	15.000	-32.797	0.00	128.22	- 3.077	13.773	0.1074	-3.7890
0.90	6.154	3.8319	0	-0.9054	15.000	-42.990	12.35	140.57	- 3.077	- 41.069	-0.2922	-3.8990
1.00	3.077	3.5397	0	-4.8048	11.390	-34.998	12.35	140.57	- 3.077	- 86.162	-0.6130	-2.2250
1.10	0.000	2.9268	0	-7.0295	3.825	- 9.497	12.35	140.57	-10.000	-105.960	-0.7538	-1.0510
1.20	-10.000	2.1729	0	-8.0806	- 5.481	-11.525	12.35	140.57	5.000	-105.680	-0.7518	2.2630
1.30	- 5.000	1.4211	0	-5.8177	-14.760	56.784	12.35	140.57	5.000	- 34.746	-0.2472	7.1980
1.40	0.000	1.1739	-1	1.3860	-15.000	73.109	0.00	128.22	0.000	62.568	0.4880	6.8420
1.50	0.000	1.6619	0	8.2227	-15.000	63.735	12.35	140.57	0.000	144.550	1.0283	2.9950

TABLA 6.1 RESPUESTA NO LINEAL

6.7 PROBLEMAS RESUELTOS.

P.6.1. El marco mostrado en la Fig. P.6.1, es tal que -- sus dos columnas tienen un comportamiento elasto-plástico perfecto en la curva carga-desplazamiento, según se indica en la gráfica adjunta. El marco se somete al pulso de carga rectangular indicado también en la Fig. P.6.1. En t=0 el marco se encuentra en reposo.

a) Utilice el método de la Aceleración Promedio, de a--- cuerdo al algoritmo desarrollado, para calcular la respuesta dinámica en el intervalo desde t=0 hasta t=0.55 seg. Suponga que el amortiguamiento es nulo.

b) Repetir el problema anterior usando el método de la Aceleración Lineal y un Δt=0.025 seg.

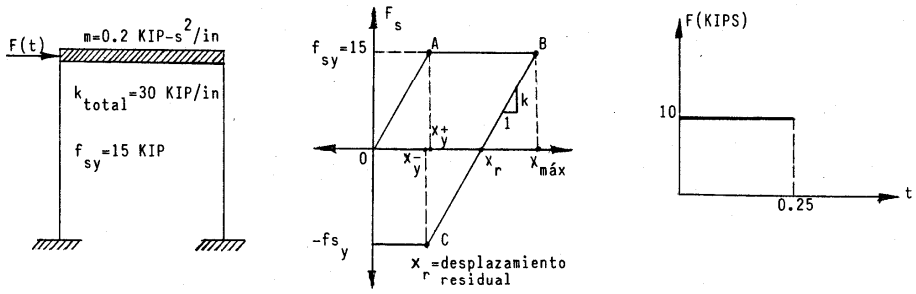


FIG. P.6.1

SOLUCION:

a):

1° Datos: $x_o=0$, $\dot{x}_o=0$

$p = \sqrt{30/0.2} = 12.25\ s^{-1}$

$T = 2\pi/12.25 = 0.5129$ s

$T/10 = 0.0513$ entonces Δt=0.05 seg

2° $\ddot{x}_o = F_o/m = 10/0.2 = 50\ in/s^2$

3° $k_i^* = k_i + 4m/(\Delta t_i)^2 = k_i + 320$

4° $\Delta F_i^* = \Delta F_i + (4m/\Delta t_i)\dot{x}_i + 2m\ddot{x}_i$

$= \Delta F_i + 16\dot{x}_i + 0.4\ddot{x}_i$

5° $\Delta x_i = \Delta F_i^*/k_i^*$

6° $\Delta\dot{x}_i = 40\Delta x_i - 2\dot{x}_i$

7° $x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$

8° $\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta\dot{x}_i$

9° $\ddot{x}_{i+1} = 5(F_{i+1} - Fs_{i+1})$

10° $x_y^+ = f_{sy}/k = 15/30 = 0.5$ in

x_m = desplazamiento cuando $\dot{x} = 0$

$x_r = x_m - x_y^+ = x_m - 0.5$

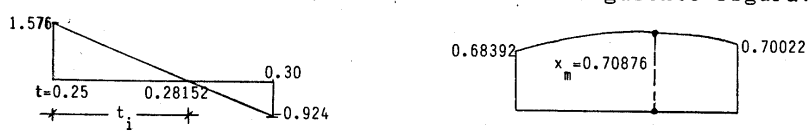
11° $F_{si} = kx_i$ de O-A

$= f_{sy}$ de A-B

$= k(x_m - x_i)$ de B-C

Para mayor facilidad, desarrollaremos la repetición sistemática de los pasos 3° al 9° en forma tabular (Tabla P.6.1)

En esta tabla podemos observar que entre i=5 e i=6 se -- presenta un cambio de signo en el valor de la velocidad; es decir, entre ellos dos existe un valor para el cual $\dot{x}_i=0$ y tiene lugar el desplazamiento máximo x_m. Para encontrar el valor x_m utilizaremos simples relaciones geométricas, pues sabemos que la velocidad tiene un comportamiento lineal, como se ve en la siguiente figura:



$$t_i = \frac{0.05x1.576}{2.5} = 0.0315$$

$x_m = 0.68392 + (½)(0.28152-0.25)(1.576) = 0.70876$ in

RESPUESTA

i	t_i	F_i	F_{si}	$\ddot{x}_i$	ΔF_i	ΔF^*_i	k^*_i	Δx_i	$\Delta \dot{x}_i$	$\dot{x}_i$	$\ddot{x}_i$
0	0.00	10	0.0000	50.0000	0	20.0000	350	0.05714	2.2856	0.00000	0.0000
1	0.05	10	1.7142	41.4290	0	53.1412	350	0.15183	1.5020	0.05714	2.2856
2	0.10	10	6.2691	18.6545	0	68.0634	350	0.19447	0.2036	0.20897	3.7876
3	0.15	10	12.1032	-10.5160	0	59.6528	350	0.17043	-1.1652	0.40344	3.9912
4	0.20	10	15.0000	-25.0000	0	35.2160	320	0.11005	-1.2500	0.57387	2.8260
5	0.25	10	15.0000	-25.0000	-10	5.2160	320	0.01630	-2.5000	0.68392	1.5760
6	0.30	0	0.2562	- 1.2810	0	-15.2964	350	-0.04370	0.1000	0.70022	-0.9240
7	0.35	0	1.5672	- 7.8360	0	-16.3184	350	-0.04662	-0.2168	0.65652	-0.8240
8	0.40	0	2.9658	-14.8290	0	-22.5844	350	-0.06453	-0.4996	0.60990	-1.0408
9	0.45	0	4.9017	-24.5085	0	-34.4498	350	-0.09843	-0.8564	0.54537	-1.5404
10	0.50	0	7.8546	-39.2730	0	-54.0580	350	-0.15445	-1.3844	0.44694	-2.3968
11	0.55	0	12.4881	-62.4405	0	-85.4754	350	-0.24420	-2.2056	0.29249	-3.7812

TABLA P.6.1a

b):

1° Datos: $x_o=0$, $\dot{x}_o=0$, $\Delta t=0.025$ seg

2° $\ddot{x}_o = 50$ in/s^2

3° $k_i^* = k_i + 6(0.2)/(0.025)^2 = k_i+1920$

4° $\Delta F_i^* = \Delta F_i + 0.2(240\dot{x}_i+3\ddot{x}_i)$
$= \Delta F_i+48\dot{x}_i+0.6\ddot{x}_i$

5° $\Delta x_i = \Delta F_i^*/k_i^*$

6° $\Delta\dot{x}_i = (3/0.025)\Delta x_i-3\dot{x}_i-(0.025/2)\ddot{x}_i$
$= 120\Delta x_i-3\dot{x}_i-0.0125\ddot{x}_i$

7° $x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$

8° $\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta\dot{x}_i$

9° $\ddot{x}_{i+1} = 5(F_{i+1}-F_{s(i+1)})$

10° $x_y^+=0$ 0.5 in

$x_r=x_m-x_y^+$

11° $F_{si} = kx_i$ de O-A

$= F_{sy}$ de A-B

$=k(x_m-x_i)$ de B-C

Al igual que en el inciso anterior, el desarrollo se tabulará en la tabla P.6.1b.

i	t_i	F_i	F_{si}	$\ddot{x}_i$	ΔF_i	ΔF^*_i	k^*_i	Δx_i	$\Delta \dot{x}_i$	x_i	$\dot{x}_i$
0	0.000	10	0.0000	50.0000	0	30.0000	1950	0.01538	1.22060	0.00000	0.00000
1	0.025	10	0.4614	47.6930	0	87.2046	1950	0.04472	1.10840	0.01538	1.22060
2	0.050	10	1.8030	40.9850	0	136.3830	1950	0.06994	0.89349	0.06010	2.32900
3	0.075	10	3.9012	30.4940	0	172.9764	1950	0.08871	0.59653	0.13004	3.22250
4	0.100	10	6.5625	17.1875	0	193.6259	1950	0.09930	0.24407	0.21875	3.81903
5	0.125	10	9.5415	2.2925	0	196.4043	1950	0.10072	-0.13156	0.31805	4.06310
6	0.150	10	12.5631	- 12.8155	0	181.0227	1950	0.09283	-0.49471	0.41877	3.93150
7	0.175	10	15.0000	- 25.0000	0	149.9664	1920	0.07811	-0.62470	0.51160	3.43680
8	0.200	10	15.0000	- 25.0000	0	119.9808	1920	0.06249	-0.62500	0.58971	2.81210
9	0.225	10	15.0000	- 25.0000	0	89.9808	1920	0.04687	-0.62440	0.65220	2.18710
10	0.250	10	15.0000	- 25.0000	-10	50.0096	1920	0.02605	-1.24960	0.69907	1.56270
11	0.275	0	15.0000	- 75.0000	0	- 29.9712	1920	-0.01561	-1.87500	0.72512	0.31310
12	0.300	0	0.4683	- 2.3415	0	- 76.3761	1950	-0.03917	0.01457	0.70951	-1.56190
13	0.325	0	1.6434	- 8.2170	0	- 79.2006	1950	-0.04062	-0.12979	0.67034	-1.54730
14	0.350	0	2.8620	- 14.3100	0	- 89.0868	1950	-0.04569	-0.27263	0.62972	-1.67710
15	0.375	0	4.2327	- 21.1640	0	-106.2840	1950	-0.05450	-0.42635	0.58403	-1.94970
16	0.400	0	5.8677	- 29.3385	0	-131.6559	1950	-0.06752	-0.60737	0.52953	-2.37610
17	0.425	0	7.8933	- 39.4665	0	-166.8879	1950	-0.08558	-0.82577	0.46201	-2.98350
18	0.450	0	10.4607	- 52.3035	0	-214.2285	1950	-0.10986	-1.10151	0.37643	-3.80930
19	0.475	0	13.7565	- 68.7825	0	-276.9879	1950	-0.14204	-1.45260	0.26657	-4.91080
20	0.500	0	18.0180	- 90.0900	0	-359.4972	1950	-0.18436	-1.90687	0.12452	-6.36340
21	0.525	0	23.5488	-117.7440	0	-467.6208	1950	-0.23981	-2.49450	-0.05984	-8.27030
22	0.550	0	15.0000		0		1920			-0.29960	-10.76480

TABLA P.6.1b

$x_m = 0.72512$ in

P.6.2. Calcule el desplazamiento horizontal de la trabe del marco de la Fig. P.6.2 en el intervalo de tiempo que va de 0.0 a 0.96 segundos y grafíquelos. Usar el método de la Aceleración - Lineal.

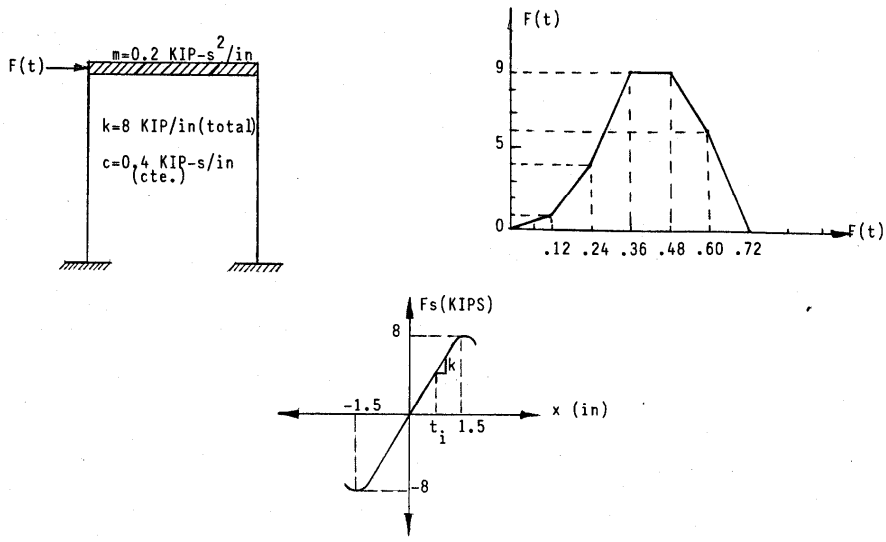


FIG. P.6.2

SOLUCION:

1° Datos: $x_o = 0$, $\dot{x}_o = 0$

$p = \sqrt{8/0.2} = 6.3245$ $\qquad n = 0.4/(2x0.2) = 1$

$p_d = \sqrt{(6.32)^2-(1)^2} = 6.24\ s^{-1}$

$T_d = 2\pi/6.24 = 1.0069$ seg

$t \leq 0.10$ entonces tomamos $\Delta t = 0.08$ seg por conveniencia numérica.

2° $\ddot{x}_o = 0$

3° $k_i^* = k_i + 6(0.2)/(0.08)^2 + 3(0.4)/0.08$

$= k_i + 202.5$

4° $\Delta F_i^* = \Delta F_i + 0.2(6/0.08\ \dot{x}_i + 3\ddot{x}_i) + 0.4(3\dot{x}_i + 0.08/2\ \ddot{x}_i)$

$= \Delta F_i + 16.2\dot{x}_i + 0.62\ddot{x}_i$

5° $\Delta x_i = \Delta F_i^*/k_i^*$

6° $\Delta\dot{x}_i = 37.5\Delta x_i - 3\dot{x}_i - 0.04\ddot{x}_i$

7° $x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$

8° $\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta\dot{x}_i$

9° $\ddot{x}_{i+1} = 5(F_{i+1} - F_{D(i+1)} - F_{S(i+1)}$

Los cálculos efectuados se muestran convenientemente en la tabla P.6.2

i	t_i	F_i	F_{si}	F_{Di}	$\ddot{x}_i$	ΔF_i	ΔF^*_i	k_i	k^*_i	Δx_i	$\Delta \dot{x}_i$	x_i	$\dot{x}_i$
0	0.00	0.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.667	0.6670	0.00	202.50	0.00329	0.12352	0.00000	0.00000
1	0.08	0.667	0.0264	0.0013	3.1965	1.333	5.3158	8.00	210.50	0.02525	0.44846	0.00329	0.12352
2	0.16	2.000	0.2283	0.0114	8.8015	2.000	16.7230	8.00	210.50	0.07944	0.91100	0.02854	0.57198
3	0.24	4.000	0.8624	0.0432	15.4720	3.333	36.9499	7.99	210.49	0.17554	1.51493	0.10798	1.48298
4	0.32	7.333	2.2413	0.1134	24.8915	1.667	65.6659	7.91	210.41	0.31208	1.71361	0.28352	2.99791
5	0.40	9.000	4.5155	0.2382	21.2315	0.000	89.4902	7.58	210.08	0.42598	0.99043	0.59561	4.71152
6	0.48	9.000	6.9146	0.4086	8.3840	-2.000	95.5697	6.77	209.27	0.45668	-0.31571	1.02159	5.70195
7	0.56	7.000	8.0142	0.5913	- 8.0275	-3.000	79.2800	5.42	207.92	0.38130	-1.53887	1.47827	5.38624
8	0.64	4.000	8.4462	0.7438	-25.9500	-4.000	42.2384	0.00	202.50	0.20858	-2.68236	1.85957	3.84957
9	0.72	0.000	6.1069	0.8273	-34.6710	0.000	- 2.6229	0.00	202.50	-0.01295	-2.59382	2.06815	1.16501
10	0.80	0.000	6.1982	0.8221	-35.1015	0.000	-40.9095	0.00	202.50	-0.22178	-2.62629	2.05520	-1.42880
11	0.88	0.000	7.3951	0.7334	-40.6425	0.000	-90.8908	0.00	202.50	-0.44884	-3.04053	1.83342	-4.05509
12	0.96	0.000				0.000						1.38458	-7.09562

TABLA P.6.2

7

"EXCITACION ARMONICA DE LOS SISTEMAS DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD"

Consideremos la Fig. 7.1, que nos muestra un motor de peso W, suspendido de un resorte y restringido al desplazamiento solo en la dirección vertical.

Este sistema tiene una frecuencia natural angular $p=\sqrt{k/m}$. Supongamos ahora que el motor es puesto en funcionamiento con una velocidad angular constante w y que su rotor está fuera de balance como se indica en la Fig. 7.1, mediante una masa excéntrica en A. Este ligero desbalance creará una fuerza rotante centrífuga P, la cual a su vez provocará vibraciones forzadas del sistema. Así, además de las fuerzas de resorte y de gravedad, tenemos ahora la componente vertical de esta fuerza P; de tal forma que la ecuación de movimiento para el sistema puede expresarse como

$$\frac{W}{g}\ddot{x} = W - (W+kx) + P\,\text{sen}wt$$

$$m\ddot{x} + kx = P\ \text{sen}wt \qquad (7.1)$$

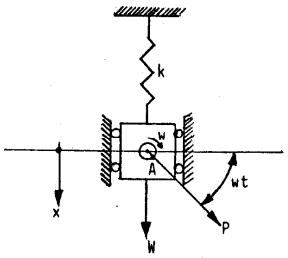


FIG. 7.1

7.1 EXCITACION ARMONICA.

Al término de la derecha en la ec. (7.1) se le denomina FUNCION ARMONICA FORZANTE, o EXCITACION ARMONICA. Así pues, en este capítulo estudiaremos el comportamiento de estructuras idealizadas como sistemas de un grado de libertad bajo excitaciones armónicas; es decir, estructuras sometidas a fuerzas o bien desplazamientos de los apoyos cuyas magnitudes se representan mediante funciones del tiempo seno o coseno.

Este tipo de fuerzas o desplazamientos armónicos producen uno de los movimientos más interesantes en el estudio de las vibraciones.

7.2 ECUACION DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS NO AMORTIGUADOS EXCITADOS ARMONICAMENTE.

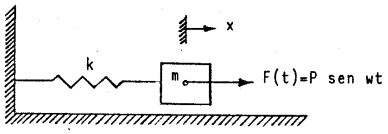


FIG. 7.2 SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD NO AMORTIGUADO EXCITADO ARMONICAMENTE.

Si la ec. (7.1) es dividida por m, recordando además que $p^2=k/m$, obtenemos

$$\ddot{x} + p^2x = \frac{P}{m} \text{ sen } wt$$

Definiendo a $q=P/m$, la ecuación anterior se convierte en

$$\ddot{x} + p^2x = q \text{ sen } wt \tag{7.2}$$

La ec. (7.2) es llamada la ECUACION DIFERENCIAL DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS NO AMORTIGUADOS, EXCITADOS ARMONICAMENTE; y su solución es de la forma

$$x = x_h + x_p \tag{7.3}$$

donde x_h es la solución de la ecuación homogénea correspondiente; es decir, la solución que satisface la ec. (7.2) con el miembro derecho igual a cero, ésto es

$$\ddot{x} + p^2x = 0,$$

que como hemos visto anteriormente, es de la forma

$$x_h = C_1 \cos pt + C_2 \text{ sen } pt \tag{7.4}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales.

Ahora bien, x_p es la solución particular que satisface la ecuación diferencial no homogénea ec. (7.2). Tomando en cuenta la naturaleza de la excitación, esta solución particular puede obtenerse suponiendo que el desplazamiento x es proporcional a ----- sen wt, es decir

$$x_p = C_3 \text{ sen } wt \tag{7.5}$$

y su segunda derivada respecto a t

$$\ddot{x}_p = -w^2C_3\text{sen } wt \tag{7.6}$$

Así, sustituyendo las ecs. (7.5) y (7.6) en la ec. (7.2), tenemos

$$-w^2C_3\text{sen } wt + p^2C_3\text{sen } wt = q \text{ sen } wt$$

que cancelando factores comunes se convierte en

$$C_3(p^2-w^2) = q$$

de tal forma que el valor de C_3 en la ec.(7.5) será igual a

$$C_3 = \frac{q}{p^2-w^2} \tag{7.7}$$

Así, la solución particular ec. (7.5) se expresa finalmente como

$$x_p = \frac{q}{p^2-w^2} \text{ sen } wt \tag{7.8}$$

Sustituyendo (7.4) y (7.8) en la ec. (7.3), obtenemos la expresión para el desplazamiento total

$$x = C_1\cos pt + C_2\text{sen } pt + \frac{q}{p^2-w^2} \text{ sen } wt \tag{7.9}$$

donde C_1 y C_2 se determinarán a partir de las condiciones inicia-- les:

$$x(t=0) = x_o$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_o$$

De esta manera, en t=0

$$x_o = C_1 \tag{7.10}$$

$$\dot{x}_o = pC_2 + \frac{wq}{p^2-w^2}$$

$$C_2 = \dot{x}_o/p - \frac{wq/p}{p^2-w^2} \tag{7.11}$$

Entonces, usando los valores de C_1 y C_2 dados por las -- ecs. (7.10) y (7.11), la ec. (7.9) se escribe como

$$x = \underbrace{x_o\cos pt + \left[\dot{x}_o/p - \frac{wq/p}{p^2-w^2}\right]\text{sen } pt}_{\text{RESPUESTA TRANSITORIA}} + \underbrace{\frac{q}{p^2-w^2} \text{ sen } wt}_{\text{RESPUESTA ESTACIONARIA}} \tag{7.12}$$

En la práctica, y ya se ha comentado con anterioridad, - las fuerzas de amortiguamiento siempre están presentes en el siste

ma causando la desaparición paulatina del movimiento o vibración; es decir, los términos de vibración libre en la ec. (7.12) se desvanecen eventualmente. Por esta razón estos términos representan la PARTE TRANSITORIA DE LA RESPUESTA DINAMICA. El término de frecuencia de la fuerza excitadora representará entonces la PARTE ESTACIONARIA DE LA RESPUESTA.

7.3 FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA Y CONDICION DE RESONANCIA.

Consideremos ahora solo la parte estacionaria de la respuesta, ésto es

$$x_p = \frac{q}{p^2-w^2} \text{ sen } wt$$

Si multiplicamos y dividimos este término por p^2 tenemos

$$x_p = q/p^2 \frac{p^2}{p^2-w^2} \text{ sen } wt$$

y recordando que $q = P/m$ y $p^2 = k/m$

$$x_p = \frac{P}{k} \text{ sen } wt \left[\frac{1}{1-(w^2/p^2)}\right] \tag{7.13}$$

En esta ecuación, el factor **P/k** representa el desplazamiento producido por la fuerza excitadora **P** considerando que actúa estáticamente. El otro factor $1/(1-(w^2/p^2))$ es quién toma en cuenta el carácter dinámico de la fuerza aplicada. Al valor absoluto de esta expresión se le conoce generalmente como FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA

$$\beta = \left|\frac{1}{1-(w^2/p^2)}\right| \tag{7.14}$$

Así, de la ec. (7.14), podemos ver que β depende de la RELACION DE FRECUENCIAS w/p obtenida al dividir la frecuencia de la fuerza excitadora entre la frecuencia natural en vibraciones libres del sistema. En la Fig. 7.3 se han graficado los valores del factor de amplificación dinámica β, para varios valores de la relación de frecuencias w/p de un sistema no amortiguado.

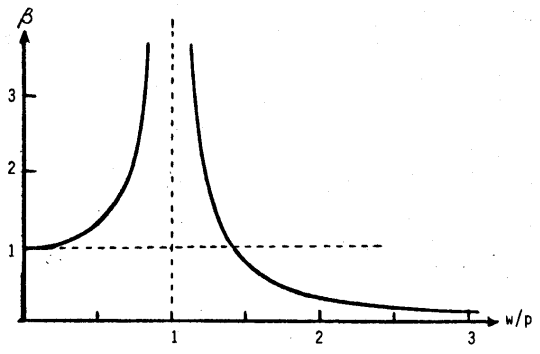


FIG. 7.3 FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA

Refiriéndonos a esta Fig. 7.3, podemos observar que para valores cercanos a cero de la relación w/p, es decir, para casos - donde la frecuencia de la excitación es mucho menor que la frecuencia natural del sistema en vibraciones libres, el valor del factor de amplificación β es aproximadamente 1. En esta situación, los - desplazamientos originados por la acción de la fuerza, son casi -- los mismos que en el caso de una aplicación estática de P.

Cuando la relación w/p se aproxima a 1, el factor de amplificación β, y en consecuencia la amplitud de vibración forzada; se incrementan rápidamente acercándose a infinito cuando w = p. Es decir, cuando la frecuencia de la excitación coincide exactamente con la frecuencia de las vibraciones libres del sistema, los des-- plazamientos son enormes. A este comportamiento se le conoce como CONDICION DE RESONANCIA y provocará serios problemas en una estructura sobre todo si su duración es larga.

El valor infinito obtenido para la amplitud de las vibraciones forzadas, indica que si la fuerza pulsante actúa sobre la - estructura siempre en el tiempo y dirección oportunos, la amplitud de dichas vibraciones se incrementa indefinidamente; siempre y -- cuando no exista disipación de energía. En la práctica, hemos visto que siempre tenemos presente disipación de energía debido al a-

mortiguamiento; su efecto sobre la amplitud de vibración, lo discutiremos más adelante.

Por último, cuando la frecuencia w de la excitación crece más allá de la frecuencia de vibración libre del sistema p, el factor de amplificación se vuelve otra vez finito; disminuyendo su valor absoluto al incrementarse la relación w/p y aproximándose a cero cuando dicha relación se hace muy grande. En otras palabras, cuando una excitación de alta frecuencia actúa sobre el sistema, produce vibraciones de amplitud muy pequeña; y en muchos de los casos podemos considerar que la estructura permanece estacionaria.

Si consideramos ahora el signo de la expresión:

$$\frac{1}{1-(w^2/p^2)} ;$$

en todos los casos donde $w < p$, la expresión es positiva y el desplazamiento es en la misma dirección de la fuerza excitadora actuante. Por el contrario, cuando $w > p$, dicha expresión es negativa y el desplazamiento de la masa que representa a la estructura es en dirección opuesta a la de la excitación. Cuando se trata de el primer caso hablamos de que la vibración está EN FASE con la excitación; mientras que en el segundo, decimos que la respuesta está FUERA DE FASE respecto a la fuerza.

Pasemos ahora a un análisis más detallado del fenómeno de resonancia. Utilizaremos para ello la ec. (7.12) con las siguientes condiciones iniciales:

$$x(t=0) = x_o = 0$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_o = 0$$

de tal manera que esta ecuación se reduce a

$$x = \frac{q}{p^2-w^2}(\text{sen } wt - w/p \text{ sen } pt)$$

y multiplicando y dividiendo al mismo tiempo por p, tenemos

$$x = \frac{q/p}{p^2-w^2} (p \text{ sen } wt - w \text{ sen } pt)$$

que es igual a

$$x = \frac{q/p}{p^2-w^2}\left[\frac{p+w}{2}(\text{sen } wt-\text{sen } pt)+\frac{p-w}{2}(\text{sen } wt+\text{sen } pt)\right] \qquad (7.15)$$

Como mencionamos anteriormente, cuando ocurre la condición de resonancia, los valores de w y p prácticamente coinciden. Debido a ello, definimos lo siguiente:

$$p-w = 2e, \quad w-p = -2e$$

donde e es una cantidad pequeñísima. De esta forma el factor

$$\frac{q/p}{p^2-w^2} = \frac{q/p}{(p+w)(p-w)} = \frac{q/p}{4ep}$$, porque también podemos afirmar

que $p+w = 2p$, ya que $p \cong w$

Sustituyendo esta expresión en la ec. (7.15) y utilizando las siguientes identidades trigonométricas:

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{ sen } \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \text{ sen } \frac{A-B}{2} \cdot \cos \frac{A+B}{2}$$

tomando A=wt y B=pt, tenemos que

$$x = \frac{q/p}{4ep}\left[(p+w)\text{sen}\frac{(w-p)t}{2} \cos\frac{(w+p)t}{2}+(p-w)\text{sen}\frac{(w+p)t}{2} \cos\frac{(w-p)t}{2}\right]$$

$$x = \frac{q/p}{4ep} (-2p\text{sen } et \cos pt + 2e\text{sen } pt \cos et)$$

multiplicando y dividiendo al mismo tiempo por 2ep,

$$x = q/2p\left[\frac{-\text{sen } et \cos pt}{e} + \frac{\text{sen } pt \cos et}{p}\right]$$

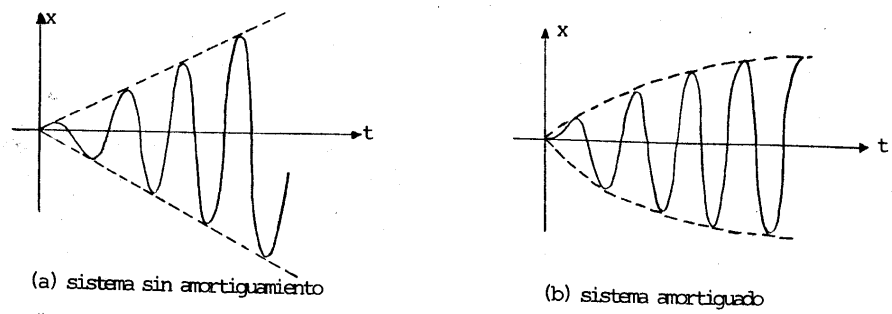
y como e es un número muy pequeño ($e \cong 0$)

$$x = q/2p[-\cos pt\ (et/e) + \text{sen } pt\ (1/p)]$$

finalmente

$$x = q/2p(-t\cos pt + \frac{\text{sen } pt}{p}) \qquad (7.16)$$

La representación gráfica de la ec. (7.16) sigue más o menos el comportamiento mostrado en la Fig. 7.4(a).



(a) sistema sin amortiguamiento

(b) sistema amortiguado

FIG. 7.4 FENOMENO DE RESONANCIA

7.4 RESPUESTA DINAMICA PARA MOVIMIENTO ARMONICO DEL APOYO.

Existen casos en donde la cimentación o apoyo de la estructura está sujeta a movimientos que varían con el tiempo. Tal es el caso de estructuras sujetas a desplazamientos del suelo causados por terremotos u otras excitaciones como explosiones o efectos dinámicos de maquinaria. En todos ellos, los movimientos del apoyo deben ser considerados en el análisis de la respuesta dinámica.

La Fig. 7.5 ilustra una estructura idealizada como un sistema masa-resorte sujeto a la acción de un MOVIMIENTO ARMONICO DEL APOYO. Utilizando el diagrama de cuerpo libre mostrado en la Fig. 7.5b, podemos establecer la ecuación de movimiento como

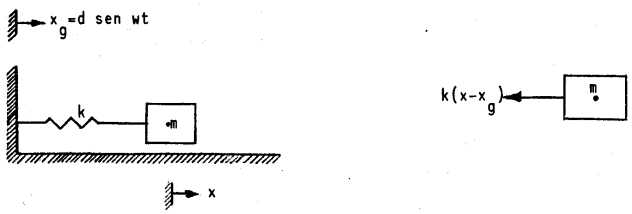
$$m\ddot{x} = -k(x - x_g)$$

$$m\ddot{x} + kx = kx_g$$

y sustituyendo la expresión para x_g

$$m\ddot{x} + kx = kd \text{ sen } wt \qquad (7.17)$$

Puede verse que la ec. (7.17) es similar a la ec.(7.1) con P= kd . Dividiendo por m la ec. (7.17) y recordando la definición de p^2, -



(a) (b)

FIG. 7.5 (a) SISTEMA SOMETIDO A MOVIMIENTO ARMONICO DEL APOYO, (b) DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

tenemos

$$\ddot{x} + p^2 x = q_g \text{sen } wt \tag{7.18}$$

donde $q_g = kd/m$, y que es matemáticamente la misma ec. (7.2). De esta manera, podemos concluir que producir un movimiento armónico simple al extremo izquierdo del resorte d sen wt, es equivalente a la aplicación directa de una excitación (kd)sen wt; y así, todas las conclusiones previas atribuídas a la solución de la ec. (7.2), son válidas también en este caso.

Sobre estas bases, concluimos finalmente que las vibraciones forzadas de la parte estacionaria estarán definidas por la ecuación

$$x_p = d \text{ sen } wt\left(\frac{1}{1-w^2/p^2}\right) \tag{7.19}$$

El término d en la ecuación (7.19) representa el movimiento de la masa cuando el desplazamiento del apoyo ocurre muy lentamente ("estáticamente"), y el factor $1/(1 - w^2/p^2)$ justifica el hecho de que la frecuencia del movimiento del apoyo sea distinta de cero.

En algunas ocasiones, es más conveniente tratar con aceleraciones del terreno que con desplazamientos; debido a que existen instrumentos que nos pueden proporcionar información sobre el movimiento, utilizando la aceleración.

Así pues, reexaminemos el problema de movimiento del apoyo o del terreno especificando una ACELERACION ARMONICA DEL TERRE

NO como se indica en la Fig. 7.6.

Supongamos que el extremo izquierdo del resorte está sujeto a los efectos de una aceleración armónica definida por la ecuación

$$\ddot{x}_g = a \text{ sen } wt \tag{7.20}$$

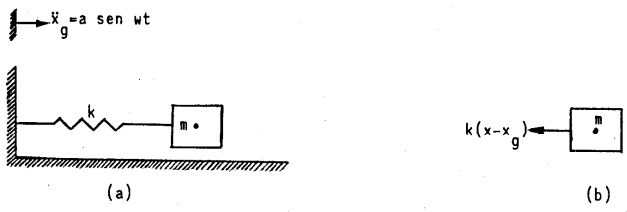


FIG. 7.6. (a) SISTEMA SOMETIDO A ACELERACION ARMONICA DEL APOYO, (b) DIAGRAMA DE C. LIBRE

Del diagrama de cuerpo libre, Fig. 7.6b, podemos establecer

$$m\ddot{x} + k(x - x_g) = 0 \tag{7.21}$$

ahora, definamos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} x^* &= x - x_g \\ \ddot{x}^* &= \ddot{x} - \ddot{x}_g \end{aligned} \tag{7.22}$$

conocidas como el desplazamiento y aceleración relativas, respectivamente.

Así, utilizando las expresiones (7.22) dentro de la ec. (7.21) tenemos

$$m(\ddot{x}^* + \ddot{x}_g) + kx^* = 0$$

$$m\ddot{x}^* + kx^* = -m\ddot{x}_g$$

y conociendo la expresión para $\ddot{x}_g$, ec. (7.20)

$$m\ddot{x}^* + kx^* = -ma \text{ sen } wt \tag{7.23}$$

que es equivalente a resolver la ec. (7.1) $m\ddot{x} + kx = P$ sen wt, donde P es ahora igual a -ma. Utilizando los mismos artificios del caso anterior, definiendo $q_g^* = -a$, la ec. (7.23) se convierte en:

$$\ddot{x}^* + p^2 x^* = q_g^* \text{ sen } wt \qquad (7.24)$$

Y de nuevo, concluimos que la respuesta del sistema causada por una aceleración armónica del apoyo, equivale a la producida por la aplicación de una excitación armónica igual a -ma sen wt. En este caso, la parte estacionaria de la respuesta, en términos de desplazamiento relativo es

$$x_p^* = (-ma/k \text{ sen } wt)(1/(1-w^2/p^2)) \qquad (7.25)$$

7.5 RESPUESTA DE SISTEMAS AMORTIGUADOS DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD EXCITADOS ARMONICAMENTE.

La Fig. 7.7 nos muestra el modelo de un sistema amortiguado de un grado de libertad, sometido a la acción de una fuerza excitadora Q cos wt.

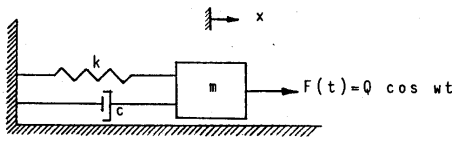


FIG. 7.7 SISTEMA AMORTIGUADO DE UN GRADO DE LIBERTAD EXCITADO ARMONICAMENTE.

Bajo estas condiciones, la ecuación de movimiento para el sistema se escribe como

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + Q \cos wt$$

o bien

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Q \cos wt$$

Dividiendo la anterior ecuación por m, y recordando las definiciones

$$p^2 = k/m, \quad n = c/2m, \quad q = Q/m$$

tenemos

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = q \cos wt \qquad (7.26)$$

esta ecuación (7.26) es llamada la ECUACION DIFERENCIAL DE MOVI--- MIENTO PARA SISTEMAS AMORTIGUADOS EXCITADOS ARMONICAMENTE. Su solución, al igual que la solución de la ec. (7.2), se compone de -- dos partes:

$$x = x_h + x_p \tag{7.27}$$

donde x_h es la solución que satisface la ec. homogénea

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = 0$$

y es de la forma

$$x_h = e^{-nt}(C_1 \cos p_d t + C_2 \operatorname{sen} p_d t) \tag{7.28}$$

La ec. (7.28) representa la PARTE TRANSITORIA DE LA RESPUESTA DINAMICA. Por otro lado, x_p es la solución particular que satisface - la ecuación (7.26). Dicha solución particular, puede suponerse de la siguiente manera:

$$x_p = N \operatorname{sen} wt + M \cos wt \tag{7.29}$$

con sus derivadas primera y segunda:

$$\dot{x}_p = wN \cos wt - wM \operatorname{sen} wt \tag{7.30}$$

$$\ddot{x}_p = -w^2N \operatorname{sen} wt - w^2M \cos wt \tag{7.31}$$

donde M y N son constantes. Para determinarlas, sustituímos las - ecs. (7.29), (7.30) y (7.31) en la ec. (7.26) y obtenemos

$$-w^2N \operatorname{sen} wt - w^2M \cos wt + 2n(wN \cos wt - wM \operatorname{sen} wt)$$
$$+ p^2(N \operatorname{sen} wt + M \cos wt) = q \cos wt$$

la cual, agrupando términos puede reescribirse como

$$(-w^2M + 2nwN + p^2M - q)\cos wt$$
$$+(-w^2N - 2nwM + p^2N)\operatorname{sen} wt = 0$$

o bien,

$$\alpha_1 \cos wt + \alpha_2 \operatorname{sen} wt = 0 \tag{7.32}$$

donde $\alpha_1 = -w^2M + 2nwN + p^2M - q$

$\alpha_2 = -w^2N - 2nwM + p^2N$

La ec. (7.32) se satisface para todo t, solo si α_1 y α_2 son igual a cero. Así, para calcular M y N tenemos dos ecuaciones algebraicas lineales

$$\begin{aligned} -w^2M + 2nwN + p^2M &= q \\ -w^2N - 2nwM + p^2N &= 0 \end{aligned} \tag{7.33}$$

Resolviendo el sistema representado por las ecs. (7.33) para N y M obtenemos

$$M = \frac{q(p^2-w^2)}{(p^2-w^2)^2+4n^2w^2} \tag{7.34}$$

$$N = \frac{q(2nw)}{(p^2-w^2)^2+4n^2w^2} \tag{7.35}$$

y al sustituir (7.34) y (7.35) en la ec. (7.29) podemos obtener la solución particular de la ec. (7.26).

Así pues, la expresión para la respuesta total del sistema se obtiene sumando la solución general ec. (7.28) y la solución particular ec. (7.29), es decir:

$$x = e^{-nt}(C_1\cos p_dt + C_2\operatorname{sen} p_dt)+M\cos wt+N\operatorname{sen} wt \tag{7.36}$$

y su primera derivada será

$$\begin{aligned} \dot{x} = {} & e^{-nt}((-nC_1+C_2p_d)\cos p_dt + (-nC_2-C_1p_d)\operatorname{sen} p_dt) \\ & -Mw\operatorname{sen} wt + Nw\cos wt \end{aligned} \tag{7.37}$$

Solo nos resta conocer C_1 y C_2. Para encontrar sus valores, sustituímos en las ecs. (7.36) y (7.37) las condiciones iniciales

$$x(t=0) = x_o$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_o$$

obteniendo

$$\begin{aligned} C_1 &= x_o - M \\ C_2 &= \frac{\dot{x}_o + n(x_o-M) - Nw}{p_d} \end{aligned} \tag{7.38}$$

Los primeros dos términos en la ec. (7.36) representan -

las VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS y los segundos las VIBRACIONES FORZADAS AMORTIGUADAS del sistema. Las vibraciones libres tendrán un período $T_d = 2\pi/p_d$ y las vibraciones forzadas: $T = 2\pi/w$ que es igual al período de la excitación que las produce. En esta misma ec. (7.36) podemos observar que debido al factor e^{-nt}, las vibraciones libres cesarán gradualmente quedando solo la parte de vibraciones forzadas que se mantendrán por la acción de la fuerza excitadora.

Estudiemos un poco más a fondo dichas vibraciones forzadas. La ec. (7.29) puede escribirse en la forma equivalente del ángulo de fase, utilizando para ello el triángulo de la Fig. 7.8.

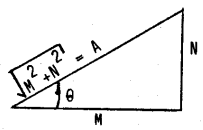


FIG. 7.8

entonces

$$x_p = A(\cos wt\ (M/A) + \text{sen}\ wt\ (N/A))$$

pero

$$\text{sen}\ \theta = N/A \text{ y } \cos\theta = M/A$$

de tal forma que

$$x_p = A(\cos wt \cos\theta + \text{sen}\ wt\ \text{sen}\ \theta)$$

que equivale a

$$x_p = A \cos(wt-\theta) \tag{7.39}$$

Así, de la ec. (7.39) vemos que la parte estacionaria de la respuesta de un sistema amortiguado excitado armónicamente, resulta en un movimiento armónico simple con una amplitud constante A, un ángulo de fase θ y un período $T = 2\pi/w$. El valor de A queda expresado como

$$A = \sqrt{M^2 + N^2} = q/(\sqrt{(p^2-w^2)^2+4n^2w^2})$$

o bien

$$A = \frac{q/p^2}{\sqrt{(1-w^2/p^2)^2+4n^2w^2/p^4}} \tag{7.40}$$

y

$$\theta = \tan^{-1} N/M = \tan^{-1}\left(\frac{2nw}{p^2-w^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2nw/p^2}{1-w^2/p^2}\right) \tag{7.41}$$

Ahora, si recordamos los valores de p^2 y q, definidos al principio de esta sección, e introduciendo la notación

$\mathcal{E} = c/c_{cr} = n/p$ para la relación de amortiguamiento, y

$r = w/p$ para la relación de frecuencias,

la ec. (7.39) puede escribirse como

$$x_p = \frac{Q}{k}\,\beta\cos(wt-\theta) \tag{7.42}$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\mathcal{E}r)^2}} \tag{7.43}$$

$$\theta = \tan^{-1}(2\mathcal{E}r/(1-r^2)) \tag{7.44}$$

La ec. (7.43) es llamada EL FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA PARA EL CASO AMORTIGUADO.

7.6 EFECTO DE LAS RELACIONES DE AMORTIGUAMIENTO Y FRECUENCIA SOBRE LA AMPLITUD Y FASE DE LA RESPUESTA ESTACIONARIA.

De la ec. (7.42) podemos afirmar que la amplitud de la parte estacionaria de la vibración, se obtiene multiplicando el desplazamiento debido a carga estática

$$x_{st} = Q/k$$

por el factor de amplificación expresado por la ec. (7.43). Este factor depende no solo de la relación de frecuencias $r = w/p$, sino también de la relación de amortiguamiento $\mathcal{E} = n/p$.

El efecto de estas relaciones puede apreciarse en la Fig. 7.9, donde se ha graficado el valor de β contra la relación de frecuencias r, para varios valores de la relación de amortiguamiento.

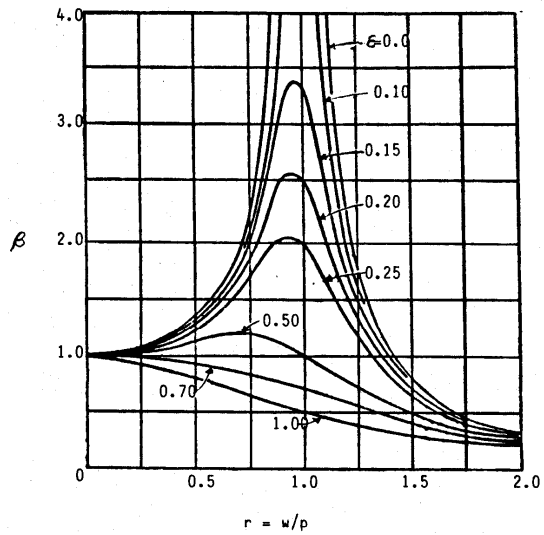


FIG. 7.9

En esta figura observamos que cuando la frecuencia angular w es -- muy pequeña comparada con la frecuencia angular natural p, el va-- lor de β es muy cercano a la unidad; es decir, el desplazamiento - del sistema es aproximadamente el que se produciría por la aplica- ción estática de la excitación Q cos wt.

Por el contrario, si w es grande comparada con p; ésto - es, cuando la frecuencia de la fuerza aplicada es mucho mayor que la frecuencia natural del sistema, el factor β tiende a cero. Es- to significa que una excitación de alta frecuencia prácticamente - no produce vibraciones en un sistema con una frecuencia natural -- muy baja. En estos casos extremos, también podemos notar que el a mortiguamiento tiene un efecto secundario sobre el valor de β , pu diéndose despreciar su influencia y utilizar las ecuaciones de la sección 7.3 para el caso no amortiguado.

Ahora bien, a medida que el valor de w se acerca a p; es

decir, a medida que r se aproxima a la unidad, el factor de amplificación dinámica β crece rápidamente y su valor cerca de la resonancia será muy sensible a variaciones en la relación de amortiguamiento ε. También podemos notar en esta Fig. 7.9 que los valores máximos de β ocurren para valores de r ligeramente menores que uno. Para encontrar este valor de w/p para el cual β es máximo, derivamos la ec. (7.43) con respecto a w/p e igualamos a cero, ésto es,

$$r = \sqrt{1 - 2\varepsilon^2} \tag{7.45}$$

Para relaciones de amortiguamiento muy pequeñas, el valor máximo de β ocurre muy cerca de la condición de resonancia, y es permitido tomar este valor de β bajo resonancia como el máximo. Así, en estos casos la amplitud máxima es aproximadamente:

$$A_{máx} = \frac{Q}{k}\beta_{res} = \frac{Q}{k}\frac{1}{2\varepsilon}$$

y recordando que $p^2 = k/m$, $2n = c/m$ y $\varepsilon = n/p$, tenemos

$$A_{máx} = \frac{Q}{p^2 m}\frac{1}{2n/p} = Q/cp, \text{ pero como } p \cong w$$

$$A_{máx} = Q/cw \tag{7.46}$$

De toda esta anterior discusión, concluímos que mientras que el amortiguamiento tiene un efecto menor sobre la respuesta de el sistema, en las regiones alejadas antes o después de la resonancia, es de gran importancia cuando nos encontramos cerca de ella; y por ningún motivo deberá pasarse por alto pues obtendríamos resultados poco o sin ningún significado.

Consideremos ahora la relación de fase entre las vibraciones de la parte estacionaria y la fuerza excitadora que las produce; es decir, el efecto de la expresión θ dada por la ec. (7.44) en la ec. (7.42). Como la excitación aplicada al sistema varía de acuerdo a cos wt y las vibraciones forzadas de la parte estacionaria de acuerdo a cos(wt-θ), podemos afirmar que la respuesta se retrasa respecto a la función forzante por el ángulo θ.

La ec. (7.44) muestra que el valor de θ, al igual que el de β, depende de las relaciones de amortiguamiento y de frecuen---

cias. Las curvas de la Fig. 7.10 nos ilustran la variación del ángulo de fase θ respecto a la relación de frecuencias w/p, para varios valores de la relación n/p. cuando no existe amortiguamiento, las vibraciones forzadas están en fase (θ=0) con la excitación que las produce para todos los valores de w/p menores que 1; y estan - medio ciclo desfasadas ($\theta=\pi$) para todos los valores de w/p mayores de 1. Además, en la resonancia (w=p) el ángulo de fase es indeterminado.

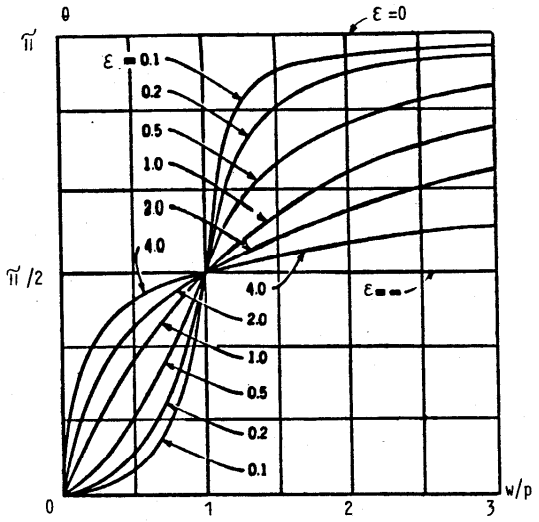


FIG. 7.10

Cuando si está presente el amortiguamiento, existirá un cambio continuo de θ de acuerdo al incremento de la relación w/p.

De nuevo, independientemente de la cantidad de amortiguamiento, $\theta = \pi/2$ bajo resonancia; es decir, cuando w=p las vibraciones forzadas se retrasan de la excitación por ¼ de ciclo.

Por último, para valores de la relación de frecuencias - w/p alejados antes o después de la condición de resonancia, una relación de amortiguamiento pequeña tiene solo efectos secundarios - sobre el ángulo de fase. En otras palabras, muy por debajo de la condición de resonancia el ángulo θ es prácticamente cero; mien---

tras que muy por sobre ella es prácticamente π. Así, los efectos del amortiguamiento sobre el ángulo de fase pueden ignorarse siempre y cuando no nos encontremos en las cercanías de la condición de resonancia y la relación de amortiguamiento es pequeña ($\varepsilon \leqslant 0.2$).

7.7 METODOS PARA LA EVALUACION DE LA RELACION DE AMORTIGUAMIENTO.

METODO DE LA RESONANCIA

Hemos visto que la curva exponencial para vibraciones libres amortiguadas nos permite la evaluación del amortiguamiento de sistemas con un grado de libertad, calculando simplemente el decremento logarítmico con la ecuación $\pounds = 2\pi\varepsilon$. Existe otra técnica para determinar el amortiguamiento, que se basa en observaciones de la parte estacionaria de la respuesta armónica, y que requiere de la aplicación de excitaciones armónicas con un rango de frecuencias cercano a la condición de resonancia. Además, dichas fuerzas armónicas deberán poseer frecuencias espaciadas muy cercanamente, de tal manera que podamos graficar una curva de respuestas; es decir, amplitudes de desplazamiento contra frecuencias aplicadas.

La Fig. 7.11 nos muestra una curva típica para una estructura amortiguada moderadamente. Entonces, de la ec. (7.43) puede verse que, en la resonancia el factor de amplificación dinámica es

$$\beta = 1/2\varepsilon \tag{7.47}$$

y despejando para ε tenemos

$$\varepsilon = 1/2\beta \ , \ \beta(r=1) \tag{7.48}$$

En la práctica, la relación de amortiguamiento ε está determinada por el factor de amplificación dinámica evaluado para la amplitud máxima, es decir:

$$\varepsilon = 1/2\beta m \tag{7.49}$$

donde

$$\beta m = x_m/x_{st}$$

y x_m es la amplitud máxima. La inexactitud cometida al utilizar la ec. (7.48) para evaluar el amortiguamiento, no es significativa en estructuras ordinarias. Solo requiere de equipos sencillos para hacer vibrar el sistema cerca de la condición de resonancia; sin embargo, el evaluar el desplazamiento estático $x_{st}=Q/k$ pudiera presentar problemas debido a que es difícil aplicar estáticamente una carga a la estructura.

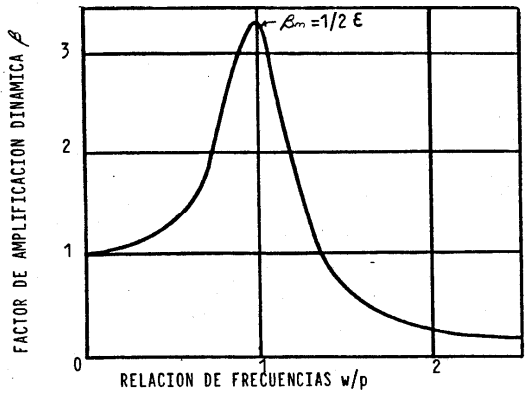


FIG. 7.11 CURVA DE RESPUESTAS PARA UN SISTEMA MODERADAMENTE AMORTIGUADO.

METODO DEL ANCHO DE BANDA

Como sabemos, el perfil de una curva de respuesta dependerá de la cantidad de amortiguamiento presente en el sistema; en particular, el ANCHO DE BANDA, ésto es, la diferencia entre dos frecuencias correspondientes a la misma amplitud de respuesta, está relacionada con el amortiguamiento en el sistema.

La Fig. 7.12 muestra una curva típica de amplitudes obtenida experimentalmente para una estructura moderadamente amortiguada. Este método consiste en medir el ancho de banda a $1/\sqrt{2}$ de la cresta de amplitudes, como se ve en esta figura. las frecuencias correspondientes a este ancho de banda, f_1 y f_2, son llamadas pun-

tos de MEDIA-FUERZA.

Los valores de las frecuencias para este ancho de banda pueden determinarse haciendo la amplitud de respuesta en la ec. -- (7.42) igual a $1/\sqrt{2}$ veces la amplitud de resonancia dada por la ec. (7.47), ésto es

$$\frac{Q}{k}\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{Q}{k}\frac{1}{2\varepsilon}$$

o bien

$$\frac{x_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, x_{st}/2\varepsilon$$

Resolviendo la anterior expresión para r, tenemos

$$r^2 = 1 - 2\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2}$$

y si despreciamos el valor de ε^2 dentro del radical:

$$r_1^2 \cong 1 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon$$

$$r_2^2 \cong 1 - 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon$$

$$r_1 \cong 1 - \varepsilon - \varepsilon^2$$

$$r_2 \cong 1 + \varepsilon - \varepsilon^2$$

Finalmente, la relación de amortiguamiento ε estará dada aproximadamente por la mitad de la diferencia entre estas relacioens de frecuencia de la fuerza-media

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(r_2 - r_1)$$

y como $r=w/p=\bar{f}/f$ y $f=(f_1+f_2)/2$; donde $\bar{f}$ es la frecuencia de la excitación,

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,\frac{w_2 - w_1}{p} = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} \qquad (7.50)$$

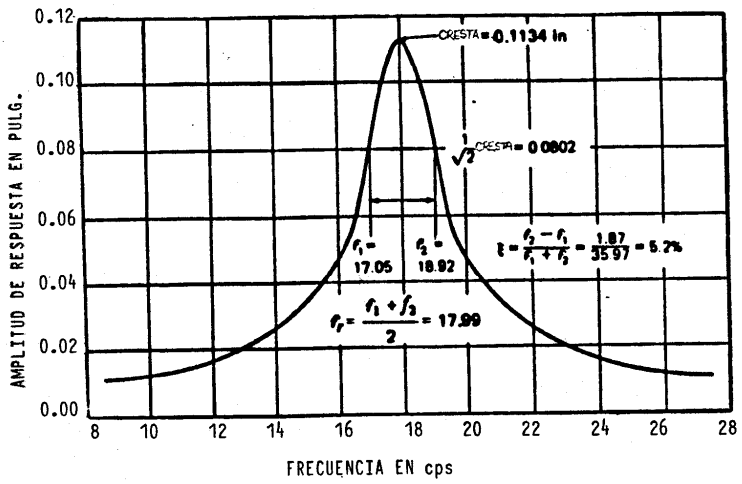


FIG. 7.12 CURVA EXPERIMENTAL DE RESPUESTA PARA UN SISTEMA AMORTIGUADO CON UN GRADO DE LIBERTAD

7.8 RESPUESTA DINAMICA AMORTIGUADA PARA MOVIMIENTO ARMONICO DEL APOYO.

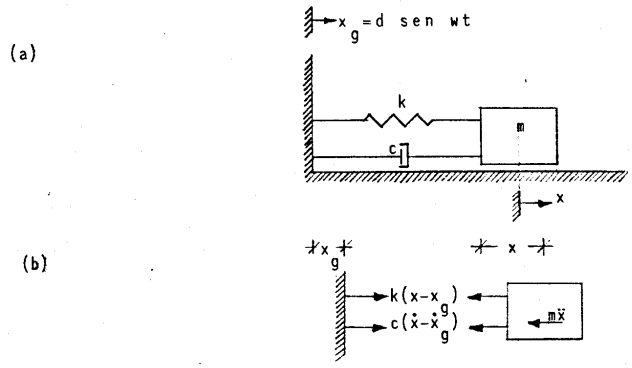


FIG. 7.13 (a) SISTEMA AMORTIGUADO CON MOVIMIENTO ARMONICO EN EL APOYO (b) DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Consideremos el sistema mostrado en la Fig. 7.13 sujeto a un movimiento armónico del apoyo dado por la expresión

$$x_g = d \text{ sen } wt \tag{7.51}$$

donde d es la amplitud máxima y w es la frecuencia del movimiento en el apoyo. La ecuación diferencial de movimiento se obtiene igualando a cero la suma de fuerzas en el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 7.13b:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x}-\dot{x}_g) + k(x-x_g) = 0 \tag{7.52}$$

Sustituyendo la ec. (7.51) y su primera derivada en la ec.(7.52), reordenando términos:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kd \text{ sen } wt + cwd \cos wt$$

que en función del ángulo de fase puede reescribirse como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_o \text{ sen}(wt+\emptyset) \tag{7.53}$$

donde

$$F_o = d\sqrt{k^2+(cw)^2} = dk\sqrt{1+(2r\varepsilon)^2} \tag{7.54}$$

y

$$\tan \emptyset = cw/k = 2r\varepsilon \tag{7.55}$$

Es obvio que la ec. (7.53) es la ecuación diferencial para el sistema excitado en este caso, por la fuerza armónica $F_o$sen(wt+$\emptyset$). En consecuencia, la parte estacionaria de la respuesta de esta ec. (7.53) es de la forma dada por la ec. (7.42) agregando el ángulo $\emptyset$ al argumento de la función armónica, ésto es

$$x_p = \frac{F_o}{k}\beta \text{ sen}(wt+\emptyset-\theta) \tag{7.56}$$

que con la ec. (7.54) y el valor de β dado por la ec. (7.43) puede también expresarse como:

$$\frac{x_p}{d} = \frac{\sqrt{1+(2r\varepsilon)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\varepsilon r)^2}} \text{ sen}(wt+\emptyset-\theta) \tag{7.57}$$

Esta ecuación (7.57) es la expresión para la trasmisión relativa del movimiento del apoyo al sistema. Este es un problema

importante para el aislamiento vibracional en el cual el equipo debe protegerse de vibraciones perjudiciales de la estructura soportante. El grado de aislamiento relativo es conocido como TRASMISIBILIDAD y se define como la relación de la amplitud x de la estructura y la amplitud d, del movimiento del apoyo. De la ec. (7.57), la trasmisibilidad T_r estará dada por

$$T_r = \frac{x}{d} = \frac{\sqrt{1+(2r\varepsilon)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2r\varepsilon)^2}} \tag{7.58}$$

En la Fig. 7.14 se muestra una gráfica de la trasmisibilidad como función de las relaciones de frecuencia y amortiguamiento. Estas curvas son similares a las de la Fig. 7.9 que representan frecuencias de respuesta del sistema amortiguado. La diferencia estriba en que todas las curvas de la Fig. 7.14 pasan por el mismo punto a una relación de frecuencias $r = \sqrt{2}$. Puede verse en esta misma figura, que el amortiguamiento tiende a reducir la efectividad del aislamiento vibracional para frecuencias mayores que esta relación, ésto es para valores de r más grandes que $\sqrt{2}$.

La ec. (7.56) nos proporciona la respuesta absoluta del sistema amortiguado, sujeto a un movimiento armónico de su base. Como una alternativa, podemos resolver la ecuación diferencial de movimiento, ec. (7.52), en términos del movimiento relativo entre la masa m y el apoyo dado por

$$u = x - x_g \tag{7.59}$$

que sustituído en la ec. (7.52) nos da

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{x}_g \tag{7.60}$$

donde el término $-m\ddot{x}_g$ puede interpretarse como la fuerza efectiva actuando sobre la masa del sistema, cuyo desplazamiento está indicado por la coordenada u. Usando la ec. (7.51) para obtener $\ddot{x}_g$ y sustituyendo en la ec. (7.60) su resultado,

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = mdw^2 \operatorname{sen} wt \tag{7.61}$$

De nuevo, la ec. (7.61) es de la misma forma que la ecuación ----- $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Q \cos wt$, con el miembro derecho igual a $mdw^2 \operatorname{sen} wt$.

Entonces, la parte estacionaria de la respuesta en términos de movimiento relativo está dada por

$$u_p = \frac{mdw^2}{k} \frac{\operatorname{sen}(wt-\theta)}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2r\varepsilon)^2}} \tag{7.62}$$

o bien, recordando que $\frac{w^2}{k/m} = \frac{w^2}{p^2} = r^2$

$$\frac{u_p}{d} = \frac{r^2 \operatorname{sen}(wt-\theta)}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2r\varepsilon)^2}} \tag{7.63}$$

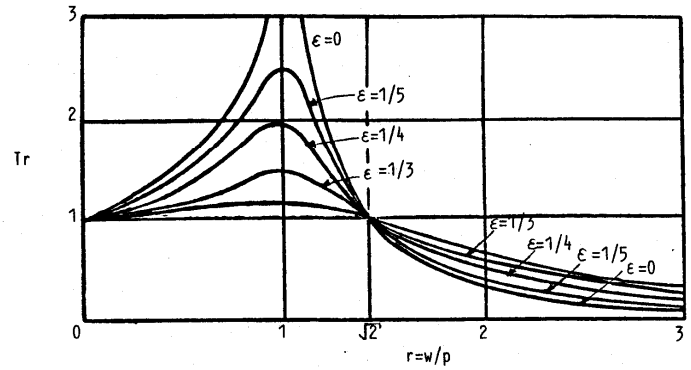


FIG. 7.14 TRASMISIBILIDAD-RELACION DE FRECUENCIAS PARA AISLAMIENTO VIBRACIONAL.

7.9 FUERZA TRASMITIDA A LA CIMENTACION POR UN SISTEMA AMORTIGUADO EXCITADO ARMONICAMENTE.

En la sección anterior, determinamos la respuesta de la estructura para un movimiento armónico de su cimentación. Ahora consideraremos un problema similar de aislamiento vibracional; el problema, sin embargo, es encontrar la fuerza trasmitida a la cimentación. Consideremos de nuevo el sistema amortiguado con una fuerza armónica $F(t) = Q \cos wt$ actuando sobre su masa, como el de la Fig. 7.7. La ecuación diferencial de movimiento es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Q \cos wt$$

con la solución de la parte estacionaria

$$x_p = A \cos(wt-\theta)$$

donde

$$A = \frac{Q/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2r\varepsilon)^2}}$$

y

$$\tan \theta = 2r\varepsilon/(1-r^2)$$

La fuerza trasmitida al apoyo a través de los resortes es kx y a - través del elemento amortiguador es $c\dot{x}$. Así, la fuerza total trasmitida F_t es

$$F_t = kx + c\dot{x} \tag{7.64}$$

Derivando la ec. (7.39) y sustituyéndola en la ec. (7.64) tenemos

$$F_t = A(k \cos(wt-\theta) - cw \operatorname{sen}(wt-\theta))$$

o

$$F_t = A\sqrt{k^2+c^2w^2} \cos(wt-\theta+\alpha) \tag{7.65}$$

donde

$$\tan \alpha = cw/k = 2\varepsilon r \tag{7.66}$$

Entonces, sustituyendo el valor de A en la ec. (7.65), la fuerza - máxima A_t trasmitida a la cimentación es

$$A_t = A\sqrt{k^2+c^2w^2} = \frac{Qk\sqrt{1+(c^2w^2/k^2)}}{k\sqrt{(1-r^2)+(2r\varepsilon)^2}}$$

$$A_t = Q\sqrt{\frac{1+(2r\varepsilon)^2}{(1-r^2)^2+(2r\varepsilon)^2}} \tag{7.67}$$

En este caso, la trasmisibilidad T_r se define como la relación entre la amplitud de la fuerza trasmitida a la cimentación y la amplitud de la fuerza aplicada. Así, de la ec. (7.67)

$$T_r = \frac{A_t}{Q} = \sqrt{\frac{1 + (2r\varepsilon)^2}{(1-r^2)^2+(2r\varepsilon)^2}} \tag{7.68}$$

Es interesante notar, que tanto la ec. (7.58) para la trasmisibilidad de la cimentación a la estructura, como la ec. (7.68) para la trasmisibilidad de la fuerza aplicada a la cimentación; están da--

das exactamente por la misma función. De aquí que las curvas de la Fig. 7.14 representen ambos tipos de trasmisibilidad.

7.10 INSTRUMENTOS SISMICOS.

Cuando un sistema del tipo mostrado en la Fig. 7.15 es usado con el propósito de medir vibraciones, normalmente es registrado el desplazamiento relativo entre la masa y la base. Dicho instrumento es llamado SISMOGRAFO y puede diseñarse para medir el desplazamiento o la aceleración de la base. La amplitud máxima relativa, U/d del sismógrafo de la Fig. 7.15, para movimiento armónico de la base está dada de la ec. (7.63) por

$$\frac{U}{d} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2r\varepsilon)^2}} \qquad (7.69)$$

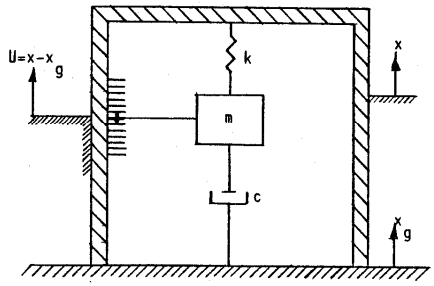


FIG. 7.15 MODELO DE SISMOGRAFO

La Fig. 7.16 muestra una gráfica de la ec.(7.69) como una función de las relaciones de frecuencia y amortiguamiento. Puede apreciarse que la respuesta es esencialmente constante para relaciones de frecuencia r>1 y de amortiguamiento ε=0.5. Por lo tanto, la respuesta de un instrumento apropiadamente amortiguado para

este tipo de relaciones, es esencialmente proporcional a la amplitud de los desplazamientos de la base para frecuencias altas del movimiento de la misma. El rango de aplicabilidad del instrumento se incrementa reduciendo la frecuencia natural, es decir, reduciendo la rigidez del resorte o incrementando la masa.

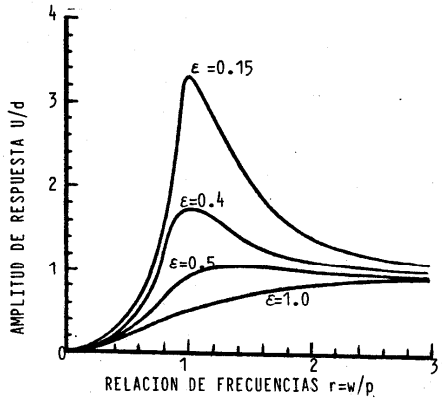


FIG. 7.16 RESPUESTA DE SISMOGRAFO PARA MOVIMIENTO ARMONICO DE LA BASE.

Ahora consideremos la respuesta del mismo instrumento para una aceleración armónica de la base $\ddot{x}_g = d \text{ sen } wt$. La ecuación de movimiento de este sistema se obtiene de la ec. (7.60) como

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -md \text{ sen } wt \tag{7.70}$$

La parte estacionaria de la respuesta expresada por el factor de amplificación dinámica, está dada de la ec. (7.43) por

$$\beta = \frac{U}{m\ddot{d}/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2r\varepsilon)^2}} \tag{7.71}$$

Esta expresión está representada gráficamente en la Fig. 7.9. En este caso, para una relación de amortiguamiento $\varepsilon=0.7$, el valor de la respuesta es casi constante en el rango de frecuencias

$0 < r < 0.6$. Entonces de la ec. (7.71), es claro que la respuesta indicada por este instrumento será directamente proporcional a la amplitud de la aceleración de la base para frecuencias superiores a 6/10 de la frecuencia natural, aproximadamente. Su rango de aplicación se incrementará aumentando la frecuencia natural, ésto es, incrementando la rigidez del resorte o disminuyendo la masa.

7.11 PROBLEMAS RESUELTOS.

P.7.1 Un motor eléctrico de peso W=1000 lb está montado sobre una viga simplemente apoyada, como se muestra en la Fig. P.7.1. El desbalance en el rotor es w'e=1 lb plg. Determine la amplitud de la parte estacionaria del movimiento vertical del motor, para una velocidad de 900 rpm. Suponga que el amortiguamiento del sistema es el 10% del amortiguamiento crítico y desprecie la masa de la viga.

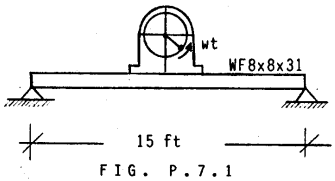


FIG. P.7.1

SOLUCION:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{1000 \text{ lb}}{32.2\text{x}12 \text{ in/s}^2} = 2.588 \text{ lb s}^2\text{/in}$$

$$k = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48(30\text{x}10^6 \text{ lb/in}^2)(109.7 \text{ in}^4)}{(15\text{x}12 \text{ in})^3} = 27\ 086.42 \frac{\text{lb}}{\text{in}}$$

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{27\ 086.42 \text{ lb/in}}{2.588 \text{ lb s}^2\text{/in}}} = 102.30 \text{ rad/s}$$

$$w = \frac{\text{rpm}(2\pi)}{60 \text{ s}} = \frac{900(2\pi)}{60} = 94.248 \text{ rad/s}$$

$$r = \frac{w}{p} = \frac{94.248}{102.30} = 0.9213$$

$$Q = m'e_o w^2 = \frac{w'}{g} ew^2 = \frac{1 \text{ lb in}(94.248 \text{ rad/s})^2}{32.2\text{x}12 \text{ in/s}^2} = 22.988 \text{ lb}$$

Sustituyendo estos valores en la ec. (7.42) tenemos:

$$x = \frac{Q/k}{(1-r^2)^2+(2r\varepsilon)^2} = \frac{(22.988 \text{ lb}/27\ 086.42 \text{ lb/in}}{\sqrt{(1-0.9213^2)^2+(2\text{x}0.1\text{x}0.9213)^2}}$$

$$x = 0.0036 \text{ in}$$ RESPUESTA

P.7.2 Determine la máxima fuerza trasmitida a los apoyos de la viga del problema P.7.1.

SOLUCION:

De la ec. (7.67)

$$A_t = Q\sqrt{\frac{1+(2r\varepsilon)^2}{(1-r^2)^2+(2r\varepsilon)^2}}$$

Utilizando el valor de Q obtenido en el problema anterior, tenemos

$$A_t = 22.988 \text{ lb}\sqrt{\frac{1+(2\text{x}0.9213\text{x}0.10)^2}{(1-0.9213^2)^2+(2\text{x}0.9213\text{x}0.10)^2}}$$

$$A_t = 98.066 \text{ lb}$$ RESPUESTA

P.7.3 Determinar la amplitud máxima de la parte estacionaria para el movimiento horizontal del marco de acero de la Fig. P.7.3. Suponga que la viga es infinitamente rígida y desprecie la masa de las columnas y el amortiguamiento.

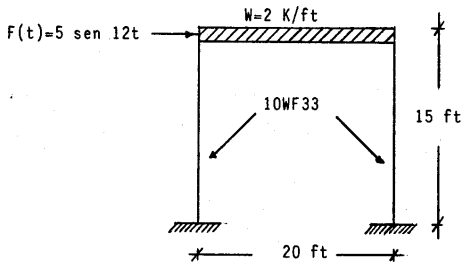


FIG. P.7.3

SOLUCION:

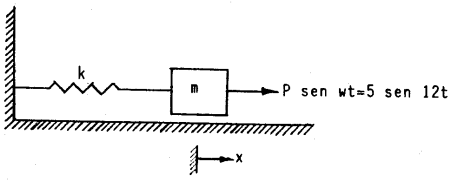
De la Fig. P.7.3 tenemos los siguientes datos:

$I(10WF33) = 170.90\ in^4$

$P = 5.0$ Kips

$w = 12$ rad/s

El marco puede modelarse como un sistema masa-resorte sometido a la acción de una excitación armónica:



De la ec. (7.13), la amplitud de la parte estacionaria está dada por la expresión

$$\frac{P}{k}\frac{1}{1-w^2/p^2} = \frac{P}{k(1-r^2)}$$

De esta forma

$$m = WL/g = \frac{(2000\ lb/ft)(20\ ft)}{32.2x12\ in/s^2} = 103.52\ lb\ s^2/in$$

$$k = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12(30x10^6\ lb/in^2)(2x170.9\ in^4)}{(15x12\ in)^3} = 21\ 098.76\ \frac{lb}{in}$$

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{21\ 098.76\ lb/in}{103.52\ lb\ s^2/in}} = 14.276\ rad/s$$

$$r = \frac{w}{p} = 12/14.276 = 0.8405$$

y finalmente

$$x = \frac{5\ 000\ lb}{21\ 098.76\ lb/in(1-0.8405^2)}$$

$$x = 0.8073\ in$$

RESPUESTA

P.7.4 Resolver el problema P.7.3 suponiendo que el amortiguamiento en el sistema es del 8% del amortiguamiento crítico.

SOLUCION:

En este caso utilizaremos de la ec. (7.42), la expresión

$$x_p = \frac{Q}{k}\beta = \frac{Q/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2r\varepsilon)^2}}$$

Utilizando un valor de $\varepsilon = 0.08$. Así,

$$x = \frac{5\ 000\ \text{lb}/21\ 098.76\ \text{lb/in}}{\sqrt{(1-0.8405^2)^2+(2\text{x}0.8405\text{x}0.08)^2}}$$

$x = 0.734$ in RESPUESTA

P.7.5 Para el problema anterior, determine: (a) la máxima fuerza trasmitida a la cimentación, (b) la trasmisibilidad.

SOLUCION:

(a) De la ec. (7.67), $A_t = Q\sqrt{\dfrac{1+(2r\varepsilon)^2}{(1-r^2)^2+(2r\varepsilon)^2}}$

$$A_t = 5\ 000\ \text{lb}\sqrt{\frac{1+(2\text{x}0.8405\text{x}0.08)^2}{(1-0.8405^2)^2+(2\text{x}0.8405\text{x}0.08)^2}}$$

$A_t = 15\ 624.23$ lb $= 15.624$ Kips RESPUESTA

(b) De la ec. (7.68), $T_r = A_t/Q$

$T_r = 15\ 624.23$ lb/5 000 lb

$T_r = 3.1248$ RESPUESTA

P.7.6 Un delicado instrumento ha sido montado en un resorte del piso de un laboratorio de prueba, donde se ha determinado que las vibraciones verticales del piso son movimientos armónicos de amplitud 0.1 in a 10 cps. El instrumento pesa 100 lb. Determinar la rigidez del resorte aislado requerida para reducir la amplitud del movimiento vertical del instrumento a 0.001 in. Desprecie el amortiguamiento.

SOLUCION:

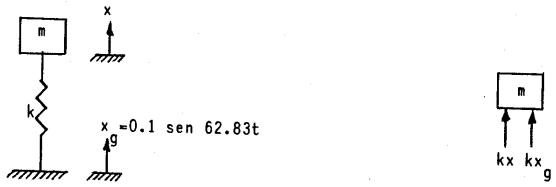
Para los movimientos verticales del piso:

$$\bar{T} = 1/\bar{f} = 1/10 = 0.1$$

y $$w = 2\pi/\bar{T} = 2\pi/0.1 = 62.83 \text{ rad/s}$$

entonces, la ecuación que describe estos movimientos armónicos es

$$x(t) = 0.1 \text{ sen } 62.83\ t$$



$$m = \frac{100 \text{ lb}}{32.2\text{x}12 \text{ in/s}^2} = 0.2588 \text{ lb s}^2\text{/in}$$

La ecuación que proporciona la respuesta causada por un movimiento armónico del terreno es la ec. (7.19):

$$x_p = d \text{ sen } wt\left(\frac{1}{1-w^2/p^2}\right) = d \text{ sen } wt\left(\frac{1}{1-w^2 m/k}\right)$$

Sustituyendo en ella los valores para d, w y m; en los términos -- que representan la amplitud del movimiento, e igualándolos a la amplitud deseada, tenemos

$$0.001 \text{ in} = \frac{d}{1-w^2 m/k}$$

$$1-w^2 m/k = d/0.001 = 0.1/0.001 = 100$$

despejando k

$$k = w^2 m/101$$

$$k = \frac{(62.83 \text{ s}^{-1})^2 (0.2588 \text{ lb s}^2\text{/in})}{101}$$

$$k = 10.115 \text{ lb/in}$$

RESPUESTA

P.7.7 Considere el tanque elevado de la Fig. P.7.7, sujeto a movimientos del terreno producidos por el paso de un tren cercano a la torre. El movimiento del terreno se idealiza como una aceleración armónica en la cimentación de la torre, con una amplitud de 0.1 a una frecuencia de 25 cps. Determine el movimiento de la torre relativo al movimiento de la cimentación. Suponga un amortiguamiento efectivo del 10% del amortiguamiento crítico del sistema.

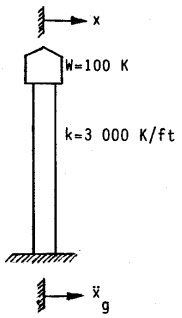


FIG. P.7.7

SOLUCION:

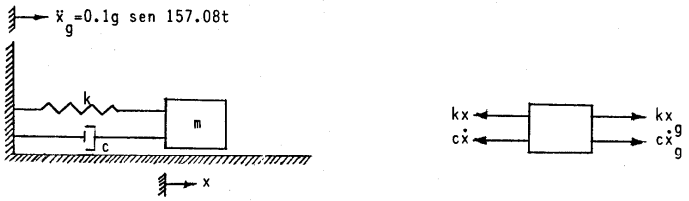
Para la aceleración armónica:

$$w = 2\pi\bar{f} = 2\pi(25) = 157.08 \text{ rad/s}$$

de tal forma que la ecuación para $\ddot{x}_g$ es

$$\ddot{x}_g = 0.1g \text{ sen } 157.08t$$

El sistema de la Fig. P.7.7 puede representarse por el siguiente sistema masa-resorte:



Al igual que en la sección 7.8, podemos establecer la ecuación de

movimiento en coordenadas relativas como:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{x}_g$$

donde $u = x - x_g$

así,

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m(0.1g \text{ sen } 157.08t)$$

cuya solución es de la forma dada por la ec. (7.62) como

$$u = m(0.1g)/k \frac{\text{sen}(wt-\theta)}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2r\varepsilon)^2}}$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{100 \text{ K}}{32.2\text{x}12 \text{ in/s}^2} = 0.2588 \text{ K s}^2\text{/in}$$

$$k = 3\ 000 \text{ K/ft} = 3\ 000/12 \text{ K/in} = 250 \text{ K/in}$$

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{250 \text{ K/in}}{0.2588 \text{ K s}^2\text{/in}}} = 31.08 \text{ s}^{-1}$$

$$r = \frac{w}{p} = 157.08/31.08 = 5.054$$

$$\varepsilon = 0.10$$

$$\theta = \tan^{-1} 2r/(1-r^2) = \tan^{-1}\frac{(2)(5.054)(0.10)}{1-(5.054)^2} = -0.0412$$

entonces

$$u = \frac{(0.2588)(0.1)(32.2\text{x}12)}{250\sqrt{(1-5.054^2)^2+(2\text{x}5.054\text{x}0.1)^2}} \text{sen}(157.08t+0.0412)$$

$$u = 0.00163 \text{ sen}(157.08t+0.0412)$$ RESPUESTA

<u>P.7.8</u> Determinar la trasmisibilidad en el problema P.7.7.

SOLUCION:

La trasmisiblilidad está dada por la ec. (7.58) como

$$T_r = \sqrt{\frac{1+(2r\varepsilon)^2}{(1-r^2)^2+(2r\varepsilon)^2}}$$

con $r = 5.054$, $\varepsilon = 0.10$;

$$T_r = \sqrt{\frac{1+(2x5.054x0.10)^2}{(1-5.054^2)^2+(2x5.054x0.10)^2}}$$

$T_r = 0.0579$ RESPUESTA

8

"EXCITACION DINAMICA GENERAL DE LOS SISTEMAS DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD"

En el capítulo anterior estudiamos la respuesta de los sistemas de un grado de libertad con carga armónica (fuerza excitadora periódica). Aunque este tipo de carga es importante, las estructuras reales estan frecuentemente sujetas a cargas las cuales no son armónicas. En el presente capítulo estudiaremos la respuesta de los sistemas de un grado de libertad para un tipo general de fuerza. Veremos que la respuesta puede obtenerse en términos de una integral, la cual para muchas funciones simples de carga puede evaluarse analíticamente. Para el caso general, sin embargo, será necesario recurrir a un procedimiento numérico de integración.

8.1 CARGA IMPULSIVA E INTEGRAL DE DUHAMEL PARA SISTEMAS NO AMORTIGUADOS Y AMORTIGUADOS.

Una carga impulsiva es una carga que se aplica durante -

un corto tiempo de duración. El impulso correspondiente a este tipo de carga se define como el producto de la fuerza y el tiempo de duración. Consideremos que un sistema de un grado de libertad está sujeto a una carga impulsiva $F(\tau)$ (ver Fig. 8.1a). El impulso resultante en un tiempo τ durante el intervalo $d\tau$, está representado por el área sombreada mostrada en la Fig. 8.2b y es igual a --- $F(\tau)d\tau$. Este impulso actuando sobre el cuerpo de masa m, produce un cambio en la velocidad el cual puede ser determinado con la Segunda Ley de Movimiento de Newton, como

$$m \frac{d\dot{x}}{d\tau} = F(\tau)$$

Reacomodando términos:

$$d\dot{x} = \frac{F(\tau)}{m} d\tau \tag{8.1}$$

donde $F(\tau)d\tau$ es el impulso y $d\dot{x}$ es el incremento de velocidad. Este incremento de velocidad puede considerarse que es una velocidad inicial de la masa en el tiempo τ. Ahora consideremos este impulso $F(\tau)d\tau$ actuando sobre la estructura representada por el oscilador sin amortiguamiento, Fig. 8.1a.

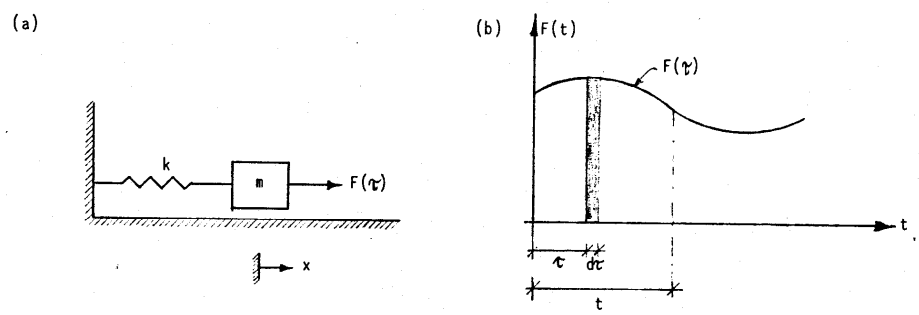


FIG. 8.1 SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD SUJETO A UNA CARGA IMPULSIVA

En el tiempo τ el oscilador experimentará un cambio de velocidad dado por la ec. (8.1). Si por el momento suponemos que el despla-

zamiento y la velocidad en t = 0 son nulos, y que la única excitación sobre el sistema es el incremento de la velocidad dado por la ec. (8.1), es como si estudiáramos la respuesta no amortiguada de un oscilador al que en ese instante de tiempo se le da una velocidad inicial. Así que podemos utilizar la ec. (3.13) suponiendo -- que es válida para $t \geq \tau$, obteniendo:

$$dx(t) = \frac{F(\tau)d\tau}{mp} \text{ sen } p(t-\tau) \tag{8.2}$$

La historia de carga puede entonces considerarse como una serie de impulsos cortos en incrementos sucesivos de tiempo $d\tau$, cada uno de los cuales produce su propia respuesta diferencial en el tiempo t de la forma dada por la ec. (8.2). Por lo tanto, concluímos que el desplazamiento total en el tiempo t debido a la acción continua de la fuerza $F(\tau)$ está dado por la sumatoria o integral de los desplazamientos diferenciales dx(t) desde el tiempo -- t = 0 hasta el tiempo t, es decir,

$$x(t) = \frac{1}{mp}\int_0^t F(\tau) \text{ sen } p(t-\tau)d\tau \tag{8.3}$$

La integral en esta ecuación es conocida como la INTE--- GRAL DE DUHAMEL. La ec. (8.3) representa el desplazamiento total provocado por la fuerza excitadora $F(\tau)$ actuando sobre el oscila-- dor sin amortiguador; incluye tanto a la parte estacionaria como a la transitoria del movimiento. Si la función $F(\tau)$ no puede expresarse analíticamente, la integral de la ec. (8.3) puede evaluarse en forma aproximada por un método numérico. Para incluir el efecto del desplazamiento inicial x_o y la velocidad inicial $\dot{x}_o$ en t=0, solo es necesario añadir a la ec. (8.3) la solución dada por la -- ec. (3.13) para los efectos debidos a las condiciones iniciales. - Así, el desplazamiento total de un sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento sujeto a una carga arbitraria está dado por:

$$x(t) = x_o \cos pt + \frac{\dot{x}_o}{p} \text{sen } pt + \frac{1}{mp}\int_0^t F(\tau) \text{sen } p(t-\tau)d\tau \tag{8.4}$$

La respuesta de un sistema amortiguado expresado por la

integral de Duhamel se obtiene de una manera enteramente equivalente al caso no amortiguado, excepto que la velocidad inicial, ec. - (8.1) debida al impulso $F(\tau)d\tau$ debe sustituirse en la ecuación de vibraciones libres amortiguadas. Puesto que $x_o = 0$, $\dot{x}_o = F(\tau)d\tau/m$ y sustituyendo t por $t-\tau$ en la ec. (4.18) se obtiene:

$$dx(t) = e^{-\varepsilon p(t-\tau)}\frac{F(\tau)d\tau}{mp_d}\text{sen } p_d(t-\tau) \tag{8.5}$$

Integrando esta respuesta diferencial en el intervalo de carga, se obtiene

$$x(t) = \frac{1}{mp_d}\int_0^t F(\tau)e^{-\varepsilon p(t-\tau)}\text{sen } p_d(t-\tau)d\tau \tag{8.6}$$

Si ahora consideramos que el desplazamiento y la velocidad iniciales son x_o y $\dot{x}_o$, la respuesta total de un sistema de un grado de libertad amortiguado en términos de la integral de Duhamel está dado por:

$$x(t) = e^{-nt}(x_o \cos p_d t + \frac{\dot{x}_o+nx_o}{p_d}\text{ sen } p_d t)$$

$$+\frac{1}{mp_d}\int_0^t F(\tau)e^{-\varepsilon p(t-\tau)}\text{sen } p_d(t-\tau)d\tau \tag{8.7}$$

8.2 RESPUESTA DE UN SISTEMA NO AMORTIGUADO ANTE PULSOS DE CARGA CONSTANTES, RECTANGULARES Y TRIANGULARES.

En esta sección aplicaremos la ec. (8.4) para algunas funciones forzantes simples para las cuales es posible obtener la integración explícita.

8.2.1 CARGA CONSTANTE

Consideremos el caso de una fuerza constante de magnitud F_o aplicada súbitamente al oscilador sin amortiguamiento en el tiempo t = 0, como se muestra en la Fig. 8.2. Esta condición de carga dinámica es llamada función pulsante. Si las condiciones iniciales son nulas y aplicamos la ec. (8.4) a este caso, obtenemos

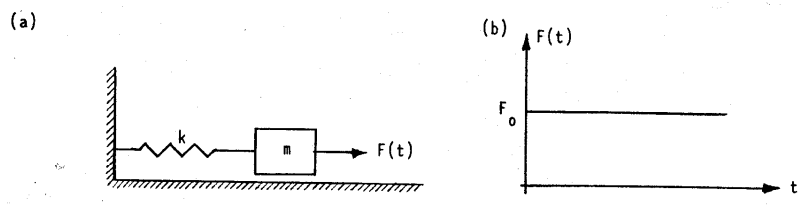


FIG. 8.2 SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD SUJETO A UNA CARGA CONSTANTE

$$x(t) = \frac{1}{mp}\int_0^t F_o \operatorname{sen} p(t-\tau)d\tau$$

Integrando:

$$x(t) = \frac{F_o}{mp^2}\Big|\cos p(t-\tau)\Big|_0^t$$

$$x(t) = \frac{F_o}{k}(1-\cos pt) = x_{st}(1-\cos pt) \qquad (8.8)$$

donde $x_{st} = F_o/k$. La respuesta para dicha carga constante aplicada súbitamente se muestra en la Fig. 8.3. Como se observará, esta solución es muy similar a la solución para vibración libre del oscilador sin amortiguador, con la diferencia de que el eje de coordenadas t se ha desplazado una cantidad igual a x_{st}. También deberá notarse que el desplazamiento máximo $2x_{st}$ es exactamente el doble del desplazamiento producido por la fuerza F_o si se aplica estáticamente. Hemos encontrado un elemental pero importante resultado: "el desplazamiento máximo de un sistema elástico lineal para una fuerza constante aplicada súbitamente es dos veces el desplazamiento causado por la misma fuerza aplicada estáticamente (lentamente)". Este resultado para el desplazamiento es válido también para las fuerzas y esfuerzos internos en la estructura.

8.2.2 CARGA RECTANGULAR

En el caso discutido anteriormente, la fuerza F_o actúa -

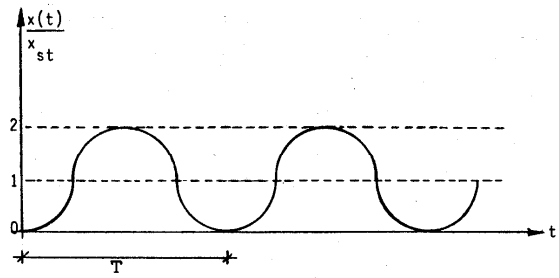


FIG. 8.3 RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD SUJETO A UNA CARGA CONSTANTE

por un tiempo indefinido. Si dicha fuerza F_o actúa por un período de tiempo t_d como se muestra en la Fig. 8.4, se obtiene el impulso rectangular. Durante el tiempo cuando la fuerza es distinta de cero, la respuesta del sistema es la misma que la dada por la ec. (8.8) y en este tiempo el desplazamiento y la velocidad son:

$$x_d = \frac{F_o}{k}(1-\cos pt_d)$$

$$\dot{x}_d = \frac{F_o}{k}(p \operatorname{sen} pt_d)$$

La respuesta subsecuente para t_d se obtiene aplicando la ec. (3.13) para vibraciones libres, tomando como condiciones iniciales el desplazamiento y la velocidad en t_d. Reemplazando t por $t-t_d$ y x_o por x_d, $\dot{x}_o$ por $\dot{x}_d$ se obtiene:

$$x(t) = \frac{F_o}{k}(1-\cos pt_d)\cos p(t-t_d) + \frac{F_o}{k}\operatorname{sen} pt_d \operatorname{sen} p(t-t_d)$$

la cual puede reducirse a la siguiente expresión:

$$x(t) = \frac{F_o}{k}(\cos p(t-t_d) - \cos pt), \quad t_d \leq t \qquad (8.9)$$

Puede obtenerse el mismo resultado considerando que el -

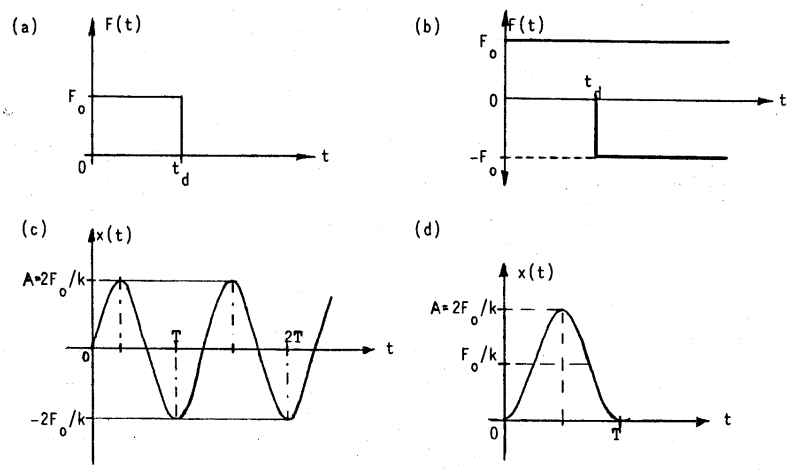


FIG. 8.4 CARGA RECTANGULAR

impulso rectangular de la Fig. 8.4a consiste de dos funciones pulsantes, como se muestra en la Fig. 8.4b, la primera función pulsante (de magnitud F_o) comienza en $t = 0$, mientras que la segunda (de magnitud $-F_o$) comienza en $t = t_d$.

La amplitud de la vibración libre subsecuente al impulso rectangular está dado por:

$$A = \frac{F_o}{k}\sqrt{2(1-\cos pt_d)} = \frac{2F_o}{k}\,\mathrm{sen}\left(\frac{pt_d}{2}\right)$$

$$A = \frac{2F_o}{k}\,\mathrm{sen}(\pi t_d/T) \qquad (8.10)$$

Como puede observarse, la amplitud de vibración libre depende de la relación t_d/T, donde T es el período natural del sistema. Tomando la duración del impulso rectangular como $t_d = T/2$, obtenemos que la amplitud es $2F_o/k$, y la respuesta es como se muestra en la Fig. 8.4c. En este caso la fuerza F_o actúa a lo largo del desplazamiento de O a A y hace un trabajo positivo sobre el --

sistema. Después de quitar la fuerza en la posición extrema, el sistema (sin amortiguamiento) retiene esta energía; y tenemos vibraciones libres resultantes del desplazamiento inicial $2F_o/k$ en $t = t_d$.

Considerando otro caso especial, especifiquemos la duración del impulso como $t_d = T$. De la ec. (8.10) se obtiene que la amplitud $A = 0$ y la respuesta es como la Fig. 8.4d. En este caso, la fuerza constante F_o hace un trabajo positivo de 0 a A y una cantidad igual de trabajo negativo de A a 0. Por lo tanto, el trabajo neto es cero, y el sistema permanece en reposo cuando se retira la fuerza.

Ahora, definiremos al Factor de Carga Dinámica (DLF) como el desplazamiento para cualquier tiempo t dividido por el desplazamiento estático x_{st}. Escribiendo las ecs. (8.8) y (8.9) en términos del Factor de Carga Dinámica, se obtiene:

$$\begin{aligned} DLF &= 1 - \cos pt &&, t \leq t_d \\ DLF &= \cos p(t-t_d) - \cos pt &&, t \geq t_d \end{aligned} \qquad (8.11)$$

Es conveniente expresar el tiempo como un parámetro de dimensiones pequeñas usando la frecuencia natural en términos del período natural ($p = 2\pi/T$), así las ecs. (8.11) pueden escribirse,

$$\begin{aligned} DLF &= 1 - \cos 2\pi\frac{t}{T} &&, t \leq t_d \\ DLF &= \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{t_d}{T}\right) - \cos 2\pi\frac{t}{T} &&, t \geq t_d \end{aligned} \qquad (8.12)$$

El Factor de Carga Dinámico máximo $(DLF)_{máx}$ se obtiene maximizando la ec. (8.12) y es representado gráficamente en la Fig. 8.5. Se observa de esta figura que el $(DLF)_{máx}$ para cargas de duración $t_d/T \geq 0.5$ es el mismo como si la duración de carga fuese infinita.

La carta que se muestra en la Fig. 8.5 se denomina GRAFICA DE RESPUESTA ESPECTRAL y dá la respuesta máxima de un sistema de un grado de libertad para una función de carga dada. Para propósitos de diseño, estas cartas son extremadamente útiles. Las --

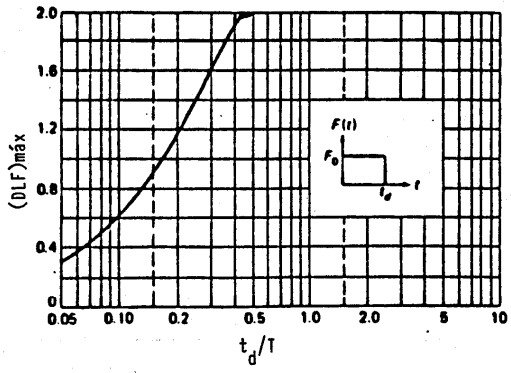


FIG. 8.5 $DLF_{máx}$ PARA UN OSCILADOR NO AMORTIGUADO ACTUANDO BAJO UNA FUERZA RECTANGULAR

cartas de respuesta espectral para cargas impulsivas de corta duración están hechas para sistemas no amortiguados; debido a que para cargas de corta duración el amortiguamiento no tiene un efecto significativo en la respuesta del sistema, el $DLF_{máx}$ usualmente corresponde al primer pico de la respuesta y la cantidad de amortiguamiento normalmente presente en estructuras no es suficiente para disminuir este valor.

8.2.3 CARGA TRIANGULAR

Consideremos ahora un sistema representado por un oscilador no amortiguado inicialmente en reposo y sujeto a una fuerza F(t) la cual tiene un valor inicial F_o que decrece linealmente hasta cero en un tiempo t_d, (Fig. 8.6).

La respuesta puede calcularse por la ec. (8.4) en dos intervalos. Para el primer intervalo $\tau \leq t_d$, la fuerza está dada por

$$F(\tau) = F_o(1 - \tau/t_d)$$

y las condiciones iniciales son nulas; sustituyendo estos valores

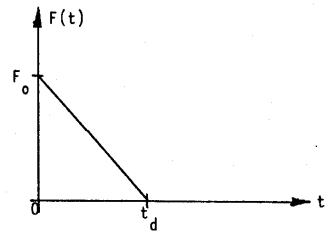


FIG. 8.6 CARGA TRIANGULAR

en la ec. (8.4) e integrando tenemos,

$$x(t) = \frac{F_o}{k}(1-\cos pt) + \frac{F_o}{kt_d}\left(\frac{\text{sen } pt-t}{p}\right) \tag{8.13}$$

En términos del factor dinámico de carga:

$$DLF = \frac{x(t)}{x_{st}} = 1-\cos pt+\frac{\text{sen } pt}{pt_d}-\frac{t}{t_d}, \quad t \leq t_d \tag{8.14}$$

Estas ecuaciones definen la respuesta antes del tiempo - t_d. Para el segundo intervalo ($\tau \geq t_d$), obtenemos de la ec. (8.14) el desplazamiento y la velocidad para un tiempo t_d,

$$x_d = \frac{F_o}{k}\left(\frac{\text{sen } pt_d}{pt_d} - \cos pt_d\right)$$

y

$$\dot{x}_d = \frac{F_o}{k}\left(p \text{ sen } pt_d + \frac{\cos pt_d}{t_d} - \frac{1}{t_d}\right) \tag{8.15}$$

Estos valores pueden considerarse como condiciones iniciales para el tiempo $t = t_d$, para el segundo intervalo. Sustituyendo en la ec. (3.13) t por $t-t_d$ y x_o y $\dot{x}_o$ respectivamente, por - x_d y $\dot{x}_d$, y sabiendo que $F(\tau)=0$ en ese intervalo, obtenemos la respuesta como:

$$x(t) = \frac{F_o}{kpt_d}\left(\text{sen } pt - \text{sen } p(t-t_d)\right) - \frac{F_o}{k}\cos pt$$

y dividiendo por x_{st},

$$DLF = \frac{1}{pt_d}\left(\text{sen } pt - \text{sen } p(t-t_d)\right) - \cos pt \qquad (8.16)$$

En términos de parámetros adimensionales, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$DLF = \frac{1}{\frac{2\pi t_d}{T}}\left(\text{sen } 2\pi\frac{t}{T} - \text{sen } 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{t_d}{T}\right)\right) - \cos 2\pi\frac{t}{T} \qquad (8.17)$$

La representación gráfica del $DLF_{máx}$ en función de la relación t_d/T para el oscilador no amortiguado está dada por la Fig. 8.7. Como debería esperarse, el factor dinámico de carga máximo se acerca a dos cuando t_d/T tiende a infinito.

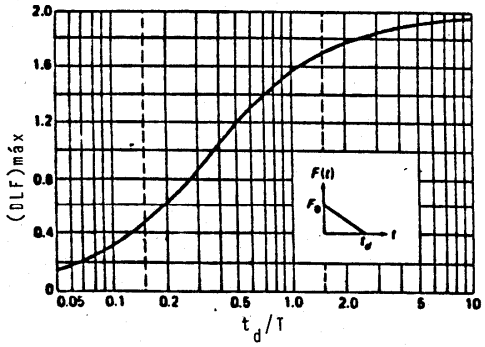


FIG. 8.7 DLFmáx PARA EL OSCILADOR AMORTIGUADO QUE ACTUA BAJO UNA FUERZA TRIANGULAR

Aunque en esta sección estudiamos la respuesta de un oscilador no amortiguado solo para cargas impulsivas simples, rectangular y triangular, cabe hacer notar que existen gráficas de respuesta espectral para otros tipos de cargas impulsivas. A continuación determinaremos la respuesta para funciones de fuerza las -

cuales no permiten una solución analítica de la Integral de Duhamel. En estos casos es necesario recurrir a la evaluación numérica de la Integral de Duhamel a fin de obtener la respuesta del sistema.

8.3 EVALUACION NUMERICA DE LA INTEGRAL DE DUHAMEL.

- SISTEMAS NO AMORTIGUADOS -

En muchos casos prácticos, la función de la carga aplicada es conocida solo de datos experimentales; tal es el caso del movimiento sísmico, donde la respuesta debe evaluarse por un método numérico. Para este propósito, aplicaremos en la integral de Duhamel ec. (8.4), la siguiente identidad trigonométrica:

$$\text{sen } p(t-\tau) = \text{sen } pt \cos p\tau - \cos pt \text{ sen } p\tau$$

y suponiendo condiciones iniciales nulas, se obtiene:

$$x(t) = \text{sen } pt \frac{1}{mp}\int_0^t F(\tau)\cos p\tau d\tau - \cos pt \frac{1}{mp}\int_0^t F(\tau)\text{sen } p\tau d\tau$$

o

$$x(t) = (A(t)\text{sen } pt - B(t) \cos pt)/mp \tag{8.18}$$

donde:

$$A(t) = \int_0^t F(\tau)\cos p\tau d\tau$$
$$B(t) = \int_0^t F(\tau)\text{sen } p\tau d\tau \tag{8.19}$$

El cálculo de la integral de Duhamel requiere de la evaluación de las integrales A(t) y B(t) numéricamente. Existen varias técnicas para el cálculo de estas integrales, en las cuales la integral es reemplazada por una sumatoria adecuada de la función bajo la integral y evaluada por conveniencia a N incrementos de tiempo, Δt. Los métodos más usuales son la Regla Trapezoidal y la Regla de Simpson.

Consideremos la integral de una función $I(\tau)$:

$$A(t) = \int_0^t I(\tau)d\tau$$

La operación elementaria requerida por la Regla Trapezoidal es,

$$A(t) = \Delta\tau\,\tfrac{1}{2}(I_0+2I_1+2I_2+ \dots +2I_{n-1}+I_n) \qquad (8.20)$$

y por la Regla de Simpson

$$A(t) = \Delta\tau\,1/3(I_0+4I_1+2I_2+ \dots +4I_{n-1}+I_n) \qquad (8.21)$$

donde $n = t/\Delta t$. La respuesta obtenida es aproximada, ya que estas reglas se basan en la sustitución de la función $I(\tau)$ para una función lineal segmentada para la Regla Trapezoidal o una función parabólica segmentada para la Regla de Simpson.

Otra alternativa aproximada para la evaluación de la Integral de Duhamel se basa en obtener la solución analítica exacta de la Integral para funciones de carga las cuales se suponen que estan dadas por una sucesión de líneas rectas. Este método no presenta aproximaciones numéricas en la integración para evitar los errores inherentes la redondeo, debido a que es un método exacto. La función forzante en este caso se aproxima por una función lineal segmentada como se muestra en la Fig. 8.8 y puede expresarse como,

$$F(\tau) = F(t_{i-1}) + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}(\tau-t_{i-1}), \quad t_{i-1} \leq \tau \leq t_i \qquad (8.22)$$

donde: $\Delta F_i = F(t_i) - F(t_{i-1})$ y $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

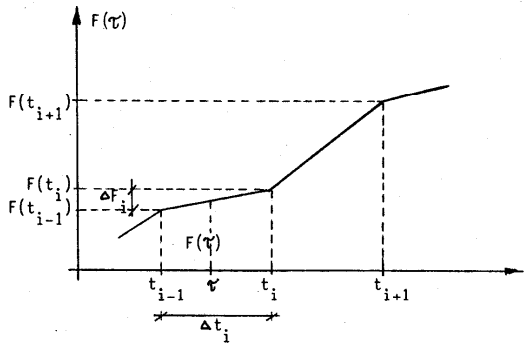


FIG. 8.8 FUNCION DE CARGA LINEAL SEGMENTADA

Para proveer una historia completa de la respuesta, es conveniente expresar las integrales de la ec. (8.19) en forma incremental, es decir,

$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau)\cos p\tau d\tau \tag{8.23}$$

$$B(t_i) = B(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau)\operatorname{sen} p\tau d\tau \tag{8.24}$$

donde $A(t_i)$ y $B(t_i)$ representan los valores de las integrales de las ecs. (8.19) para el tiempo t_i.

Sustituyendo la ec. (8.22) en la ec. (8.23) e integrando se obtiene,

$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + (F(t_{i-1}) - t_{i-1}\frac{\Delta F_i}{\Delta t_i})(\operatorname{sen} pt_i - \operatorname{sen} pt_{i-1})/p + \frac{\Delta F_i}{p^2 \Delta t_i}(\cos pt_i - \cos pt_{i-1} + p(t_i \operatorname{sen} pt_i - t_{i-1}\operatorname{sen} pt_{i-1})) \tag{8.25}$$

Análogamente, de la ec. (8.24) se obtiene:

$$B(t_i) = B(t_{i-1}) + (F(t_{i-1}) - t_{i-1}\frac{\Delta F_i}{\Delta t_i})(\cos pt_{i-1} - \cos pt_i)/p + \frac{\Delta F_i}{p^2 \Delta t_i}(\operatorname{sen} pt_i - \operatorname{sen} pt_{i-1} - p(t_i \cos pt_i - t_{i-1}\cos pt_{i-1})) \tag{8.26}$$

Las ecs. (8.25) y (8.26) son fórmulas recurrentes para la evaluación de las integrales de la ec. (8.19) para cualquier tiempo $t = t_i$.

8.4 EVALUACION NUMERICA DE LA INTEGRAL DE DUHAMEL.

-SISTEMAS AMORTIGUADOS-

Para la evaluación numérica de los sistemas amortiguados procederemos como en el caso no amortiguado. Aplicando la misma identidad trigonométrica a la ec. (8.6) puede escribirse como:

$$x(t) = (A_d(t)\text{sen } p_d t - B_d(t)\cos p_d t)\frac{e^{-\varepsilon p t}}{m p_d} \tag{8.27}$$

donde:

$$A_d(t_i) = A_d(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) e^{\varepsilon p \tau} \cos p_d \tau \, d\tau \tag{8.28}$$

$$B_d(t_i) = B_d(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) e^{\varepsilon p \tau} \text{sen } p_d \tau \, d\tau \tag{8.29}$$

La expresión resultante de la sustitución de la función de carga lineal segmentada, ec. (8.22), en las ecs. (8.28) y (8.29) requiere de la evaluación de las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\varepsilon p \tau} \cos p_d \tau \, d\tau$$

$$= \frac{e^{\varepsilon p \tau}}{(\varepsilon p)^2 + p_d^2} (\varepsilon p \cos p_d \tau + p_d \text{sen } p_d \tau) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \tag{8.30}$$

$$I_2 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\varepsilon p \tau} \text{sen } p_d \tau \, d\tau$$

$$= \frac{e^{\varepsilon p \tau}}{(\varepsilon p)^2 + p_d^2} (\varepsilon p \text{ sen } p_d \tau - p_d \cos p_d \tau) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \tag{8.31}$$

$$I_3 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \tau e^{\varepsilon p \tau} \text{sen } p_d \tau \, d\tau$$

$$= \tau - \frac{\varepsilon p}{(\varepsilon p)^2 + p_d^2} I_2 + \frac{p_d}{(\varepsilon p)^2 + p_d^2} I_1 \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \tag{8.32}$$

$$I_4 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \tau e^{\varepsilon p \tau} \cos p_d \tau \, d\tau \tag{8.33}$$

$$= \left(\tau - \frac{\varepsilon p}{(\varepsilon p)^2 + p_d^2} \right) I_1 - \frac{p_d}{(\varepsilon p)^2 + p_d^2} I_2 \Big|_{t_{i-1}}^{t_1}$$

En términos de estas integrales, $A_d(t_i)$ y $B_d(t_i)$ pueden evaluarse de:

$$A_d(t_i) = A_d(t_{i-1}) + \left(F(t_{i-1}) - t_{i-1}\frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}\right) I_1 + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} I_4 \qquad (8.34)$$

$$B_d(t_i) = B_d(t_{i-1}) + \left(F(t_{i-1}) - t_{i-1}\frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}\right) I_2 + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} I_3 \qquad (8.35)$$

Finalmente, la sustitución de las ecs. (8.34) y (8.35) en la ec. - (8.27) da el desplazamiento para el tiempo t_i como,

$$x(t_i) = \frac{e^{-\varepsilon p t_i}}{m p_d}(A_d(t_i)\text{sen } p_d t_i - B_d(t_i)\cos p_d t_i) \qquad (8.36)$$

8.5 MOVIMIENTO ARBITRARIO DEL APOYO.

Como se ha comentado con anterioridad, en ciertos problemas prácticos, la respuesta de un sistema es causada por movimiento del apoyo en lugar de una fuerza excitadora aplicada directamente. En el capítulo 7 fueron discutidas las vibraciones forzadas - causadas por desplazamientos o aceleraciones armónicas del apoyo, para sistemas amortiguados y no amortiguados. Ahora nos encargaremos de casos donde los movimientos del apoyo son funciones arbitrarias del tiempo.

Consideremos el sistema amortiguado de un grado de libertad de la Fig. 8.9 y el desplazamiento del terreno x_g dado como una función del tiempo no armónica. La ecuación del movimiento para este caso es:

$$m\ddot{x} = -c(\dot{x} - \dot{x}_g) - k(x - x_g) \qquad (8.37)$$

reordenando:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kx_g + c\dot{x}_g \qquad (8.38)$$

Si la expresión para x_g puede ser derivada respecto al - tiempo, tenemos dos funciones forzantes analíticas del lado derecho de la ec. (8.38). La primera de estas equivale a una excitación de magnitud kx_g aplicada directamente al sistema, mientras -- que la segunda es una fuerza similar de magnitud $c\dot{x}_g$. Dividiendo ambos lados de la ec. (8.38) por m, obtenemos:

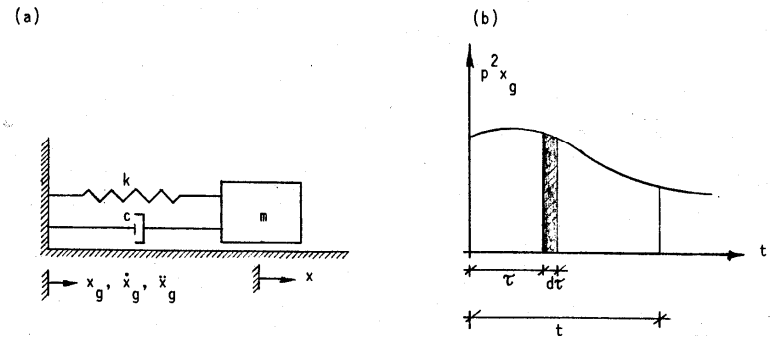


FIG. 8.9 SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD AMORTIGUADO CON MOVIMIENTO ARBITRARIO DEL APOYO.

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = p^2x_g + 2n\dot{x}_g \tag{8.39}$$

La solución de esta ecuación diferencial se obtiene de una manera similar al de una función forzante aplicada. Sin embargo, en este caso el impulso consta de dos partes, y la expresión para el incremento de velocidad en τ debida al impulso es:

$$d\dot{x} = (p^2x_g + 2n\dot{x}_g)d\tau$$

El primer término de la ecuación anterior está representado por la franja sombreada de la Fig. 8.9b. En cualquier tiempo posterior t, el incremento en el desplazamiento es

$$dx = e^{-n(t-\tau)}\frac{1}{p_d}(p^2x_g+2n\dot{x}_g)\text{sen } p_d(t-\tau)d\tau$$

Debido al efecto continuo del movimiento del apoyo, el desplazamiento total de la masa es:

$$x(t) = \frac{e^{-nt}}{p_d}\int_0^t e^{n\tau}(p^2x_g+2n\dot{x}_g)\text{sen } p_d(t-\tau)d\tau \tag{8.40}$$

La cual es una expresión algo mas complicada de la integral de Duhamel ec. 8.6, vista anteriormente.

Si se desprecia el amortiguamiento, tenemos que n=0 y --

$p_d=p$; y la ec. (8.40) se simplifica,

$$x(t) = \frac{1}{p}\int_0^t p^2 x_g \operatorname{sen} p(t-\tau)d\tau = p\int_0^t x_g \operatorname{sen} p(t-\tau)d\tau \qquad (8.41)$$

el primer término de la cual es matemáticamente el mismo de la ec. (8.3).

Consideremos ahora, el caso de la aceleración del terreno, $\ddot{x}_g$. Como fue hecho en el capítulo anterior para vibraciones forzadas, usaremos el siguiente cambio de coordenadas:

$$x^* = x-x_g$$

$$\dot{x}^* = \dot{x}-\dot{x}_g$$

$$\ddot{x}^* = \ddot{x}-\ddot{x}_g$$

donde el símbolo x^* denota el desplazamiento relativo de la masa con respecto al terreno. Sustituyendo $x-x_g$, $\dot{x}-\dot{x}_g$ y $\ddot{x}$, de acuerdo a las ecuaciones anteriores, en la ec. (8.37) y reordenando se obtiene:

$$m\ddot{x}^* + c\dot{x}^* + kx^* = -m\ddot{x}_g$$

El término del lado derecho de esta ecuación, es equivalente a una fuerza excitadora de magnitud $-m\ddot{x}_g$ aplicada directamente a la masa. Si a la ecuación anterior se le divide por m, puede reescribirse como,

$$\ddot{x}^* + 2n\dot{x}^* + p^2x^* = -\ddot{x}_g \qquad (8.42)$$

donde $-\ddot{x}_g$ representa la función forzante en coordenadas relativas debido a la aceleración del terreno.

La ec. (8.42) es matemáticamente la misma que la ecuación para un sistema sujeto a una fuerza excitadora arbitraria y podemos concluir que la respuesta del sistema en coordenadas relativas sigue el patrón similar de los casos previos. Hasta aquí, la integral de Duhamel para la respuesta amortiguada relativa al terreno es

$$x^*(t) = \frac{-e^{-nt}}{p_d}\int_0^t e^{n\tau}\ddot{x}_g \operatorname{sen} p_d(t-\tau)d\tau \qquad (8.43)$$

Si se desprecia el amortiguamiento, la ec. (8.43) se reduce a,

$$x^*(t) = -\frac{1}{p}\int_0^t \ddot{x}_g \operatorname{sen} p(t-\tau)d\tau \qquad (8.44)$$

La respuesta absoluta del sistema puede ser calculada si existen las condiciones iniciales de desplazamiento del terreno y velocidad.

8.6 PROBLEMAS RESUELTOS.

P.8.1 Determinar la respuesta de un sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento sujeto a una fuerza de incremento lineal conocida como función rampa, dada por la Fig. P.8.1a. La relación de incremento de la fuerza Q por unidad de tiempo es £Q.

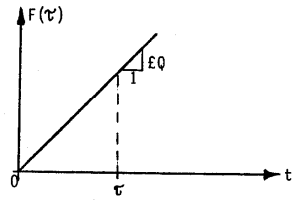


FIG. P.8.1a

SOLUCION:

La solución forzante de este ejemplo, expresada en términos de £Q y t , es simplemente

$$F(\tau) = £Q\tau \qquad (a)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ec. (8.3)

$$x(t) = \frac{£Q}{mp}\int_0^t \tau \operatorname{sen} p(t-\tau)d\tau \qquad (b)$$

Integrando por partes:

$$\int_0^t \tau \operatorname{sen} p(t-\tau)d\tau = uv - \int vdu$$

$$u = \tau\ ,\ du = d\tau$$

$$dv = \text{sen } p(t-\tau)d\tau, \quad v = \frac{1}{p} \cos p(t-\tau)$$

entonces,

$$uv - \int vdu = \frac{\tau}{p} \cos p(t-\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{p^2}\int_0^t -p \cos p(t-\tau)d\tau$$

$$= \left|\frac{\tau}{p} \cos p(t-\tau) + \frac{1}{p^2} \text{ sen } p(t-\tau)\right|_0^t$$

$$= \frac{t}{p} - \frac{1}{p^2} \text{ sen } pt \qquad \text{(c)}$$

Sustituyendo la ec. (c) en la ec. (b),

$$x(t) = \frac{£Q}{mp}\left(\frac{t}{p} - \frac{1}{p^2} \text{ sen } pt\right) = \frac{£Q}{mp^2}\left(t - \frac{1}{p} \text{ sen } pt\right)$$

$$x(t) = \frac{£Q}{k}\left(t - \frac{1}{p} \text{ sen } pt\right) \qquad \text{(d)}$$

RESPUESTA

De este resultado se observa que la respuesta para una función rampa consiste de la suma de un desplazamiento estàtico que se incrementa linealmente £Qt/k y una vibración libre de amplitud £Q/kp como se muestra en la Fig. P.8.1b.

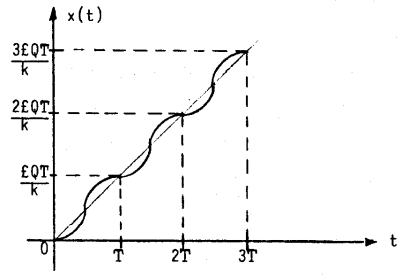


FIG. P.8.1b

La velocidad en cualquier tiempo t, está dada por la primera derivada de la ec. (d) con respecto a t, es decir

$$\dot{x}(t) = \frac{£Q}{k}(1 - \cos pt) = \frac{£Q}{k}(1 - \cos 2\pi t/T) \qquad \text{(e)}$$

RESPUESTA

La velocidad es cero en t = 0, T, 2T, 3T, etc., puesto que la pendiente es cero para estos tiempos. Además, la velocidad es siempre positiva y su valor máximo es de $2\pounds Q/k$ para t = T/2, 3T/2, 5T/2, etc.

P.8.2. Determinar la respuesta de un sistema de un grado de libertad no amortiguado sujeto a la función forzante de la Fig. P.8.2. Considerar condiciones iniciales nulas.

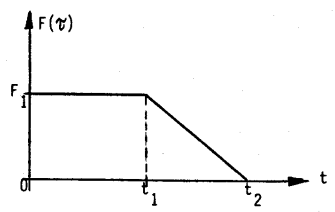


FIG. P.8.2

SOLUCION:

Según la Fig. P.8.2, la fuerza forzante en cada intervalo de tiempo es

$$F(\tau) = F_1 \qquad \text{para } 0 \leq t \leq t_1$$

$$F(\tau) = F_1 - \frac{F_1}{t_2 - t_1}(\tau - t_1) \qquad \text{para } t_1 \leq t \leq t_2 \qquad \text{(a)}$$

$$F(\tau) = 0 \qquad \text{para } t_2 \leq t$$

Aplicando la integral de Duhamel, ec. (8.4):

INTERVALO $0 \leq t \leq t_1$

$$x(t) = \frac{1}{mp}\int_0^t F_1 \operatorname{sen} p(t-\tau)\, d\tau = \frac{F_1}{mp}\int_0^t \operatorname{sen} p(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = \frac{F_1}{mp^2}\Big|\cos p(t-\tau)\Big|_0^t$$

$$x(t) = F_1/mp^2(1 - \cos pt), \text{ para } 0 \leq t \leq t_1 \qquad \text{RESPUESTA}$$

INTERVALO $t_1 \leq t \leq t_2$

$$x(t) = \frac{1}{mp}\int_0^{t_1} F_1 \operatorname{sen} p(t-\tau)\, d\tau +$$

$$\frac{1}{mp}\int_{t_1}^{t} \left(F_1 - \frac{F_1}{t_2-t_1}(\tau-t_1)\right) \operatorname{sen} p(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = \frac{F_1}{mp}\left[\int_0^{t_1} \operatorname{sen} p(t-\tau)\, d\tau + \int_{t_1}^{t} \operatorname{sen} p(t-\tau)\, d\tau - \right.$$

$$\left. \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t} \tau \operatorname{sen} p(t-\tau)\, d\tau + \frac{t_1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t} \operatorname{sen} p(t-\tau)\, d\tau\right]$$

Recordando que:

$$\int \operatorname{sen} p(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{p} \cos p(t-\tau)$$

$$\int \tau \operatorname{sen} p(t-\tau)\, d\tau = \frac{\tau}{p} \cos p(t-\tau) + \frac{1}{p^2} \operatorname{sen} p(t-\tau)$$

y sustituyendo estos valores en la ecuación anterior:

$$x(t) = \frac{F_1}{mp^2}\left[\cos p(t-\tau)\Big|_0^{t_1} + \cos p(t-\tau)\Big|_{t_1}^{t} - \right.$$

$$\left(\frac{1}{t_2-t_1}\right)\left|\cos p(t-\tau) + \frac{1}{p} \operatorname{sen} p(t-\tau)\right|_{t_1}^{t} +$$

$$\left.\left(\frac{t_1}{t_2-t_1}\right)\left|\cos p(t-\tau)\right|_{t_1}^{t}\right]$$

$$x(t) = \frac{F_1}{mp^2}\left[\cos p(t-t_1) - \cos pt + 1 - \cos p(t-t_1) - \right.$$

$$\left(\frac{1}{t_2-t_1}\right)\left(t - t_1 \cos p(t-t_1) - \frac{1}{p} \operatorname{sen} p(t-t_1)\right) +$$

$$\left.\left(\frac{t_1}{t_2-t_1}\right)\left(1 - \cos p(t-t_1)\right)\right]$$

Simplificando, se obtiene:

$$x(t) = \frac{F_1}{mp^2}\left[1 - \cos pt + \frac{t_1-t}{t_2-t_1} + \frac{1}{p(t_2-t_1)} \operatorname{sen} p(t-t_1)\right]$$

RESPUESTA

INTERVALO $t_2 \leq t$

$$x(t)=\frac{1}{mp}\int_0^{t_1} F_1 \operatorname{sen} p(t-\tau)d\tau +$$

$$\frac{1}{mp}\int_{t_1}^{t_2}\left(F_1 - \frac{F_1}{t_2-t_1}(\tau - t_1)\right)\operatorname{sen} p(t-\tau)d\tau$$

$$x(t) = \frac{F_1}{mp}\left[\int_0^{t_1} \operatorname{sen} p(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sen} p(t-\tau)d\tau - \right.$$

$$\left. \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} \tau \operatorname{sen} p(t-\tau)d\tau + \frac{t_1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sen} p(t-\tau)d\tau\right]$$

De donde resolviendo las integrales y reacomodando términos se obtiene:

$$x(t) = \frac{F_1}{k^2}\left[-\cos pt + \frac{1}{p(t_2-t_1)}(\operatorname{sen} p(t-t_1) - \operatorname{sen} p(t-t_2))\right]$$

RESPUESTA

P.8.3. Determinar la respuesta de un sistema de un grado de libertad no amortiguado sujeto a la aceleración del apoyo dado por la función trigonométrica $\ddot{x}_g = a(1-\operatorname{sen} \pi t/2t_1)$.

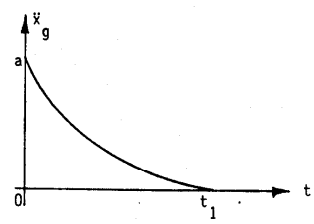


FIG. P.8.3

SOLUCION:

La frecuencia de la fuerza es $w = \pi/2t_1$, y sustituyendo este valor en la ecuación de la aceleración se obtiene:

$$\ddot{x}_g = a(1 - \text{sen } wt) \qquad (a)$$

La respuesta del sistema está dada por la ec. (8.44), y sustituyendo $\ddot{x}_g$ tenemos:

$$x^*(t) = -\frac{1}{p}\int a(1 - \text{sen } w\tau)\ \text{sen } p(t-\tau)d\tau \qquad (b)$$

INTERVALO $0 \leq t \leq t_1$

$$x^*(t) = -\frac{1}{p}\int_0^t a(1-\text{sen } w\tau)\ \text{sen } p(t-\tau)d\tau \qquad (c)$$

$$x^*(t) = -\frac{a}{p}\int_0^t \text{sen } p(t-\tau)d\tau + \frac{a}{p}\int_0^t \text{sen } w\tau\ \text{sen } p(t-\tau)d\tau$$

$$x^*(t) = -\frac{a}{p^2}\Big|\cos p(t-\tau)\Big|_0^t + \frac{a}{p}\int_0^t \text{sen } w\tau \text{sen } p(t-\tau)d\tau \qquad (d)$$

Evaluaremos por separado la integral de la ec. (d). Para ello, aplicaremos la siguiente identidad trigonométrica:

$$\text{sen } A \text{ sen } B = \tfrac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)),$$

Obteniendo:

$$\int_0^t \text{sen } w\tau \text{ sen } p(t-\tau)d\tau =$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^t(\cos(w\tau-p(t-\tau)) - \cos(w\tau+p(t-\tau)))d\tau =$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^t(\cos((w+p)\tau-pt)-\cos((w-p)\tau+pt))dt =$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^t \cos((w+p)\tau-pt)dt - \tfrac{1}{2}\int_0^t \cos((w-p)\tau+pt)dt =$$

$$\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{w+p}\text{ sen}((w+p)\tau-pt) - \frac{1}{w-p}\text{ sen}((w-p)\tau+pt)\right]_0^t = \qquad (e)$$

$$\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{w+p}(\text{sen } wt-\text{sen}(-pt)) - \frac{1}{w-p}(\text{sen } wt-\text{sen } pt)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{-2p}{w^2-p^2}\ \text{sen}\ wt + \frac{2w}{w^2-p^2}\ \text{sen}\ pt\right] =$$

$$\frac{1}{p}\left(\frac{1}{1-w^2/p^2}\right)\text{sen}\ wt - \frac{w}{p^2}\left(\frac{1}{1-w^2/p^2}\right)\text{sen}\ pt$$

Y sustituyendo el factor de amplificación dinámica:

$$\beta = \frac{1}{1-w^2/p^2}, \text{se obtiene}$$

$$\int_0^t \text{sen}\ w\tau\ \text{sen}\ p(t-\tau)d\tau = \frac{\beta}{p}(\text{sen}\ wt - \frac{w}{p}\ \text{sen}\ pt) \qquad (f)$$

Sustituyendo la ec. (f) en la ec. (d):

$$x^*(t) = -\frac{a}{p^2}\left[1 - \cos pt + \beta(\frac{w}{p}\ \text{sen}\ pt - \text{sen}\ wt)\right],\ 0 \leq t \leq t_1$$

RESPUESTA

INTERVALO $t \geq t_1$

$$x^*(t) = -\frac{1}{p}\int_0^{t_1} a(1-\text{sen}\ w\tau)\ \text{sen}\ p(t-\tau)d\tau \qquad (h)$$

$$x^*(t) = -\frac{a}{p^2}\left[\cos p(t-\tau)\right]_0^{t_1} + \frac{a}{p}\int_0^{t_1} \text{sen}\ w\tau\ \text{sen}\ p(t-\tau)d\tau \qquad (i)$$

Análogamente, evaluando por separado la integral de la ec. (i) y con la ayuda de la ec. (e) se obtiene:

$$\int_0^{t_1} \text{sen}\ w\tau\ \text{sen}\ p(t-\tau)d\tau =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{w+p}\ \text{sen}((w+p)\tau-pt) - \frac{1}{w-p}\ \text{sen}((w-p)\tau+pt)\right]_0^{t_1} =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{w+p}\left(\text{sen}((w+p)t_1-pt)-\text{sen}\ (-pt)\right) - \frac{1}{w-p}\left(\text{sen}((w-p)t_1+pt)-\text{sen}\ pt\right)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{w+p}\ \text{sen}((w+p)t_1-pt) - \frac{1}{w-p}\ \text{sen}((w-p)t_1+pt) + \frac{2w}{w^2-p^2}\ \text{sen}\ pt\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{w+p}\,\text{sen}(wt_1-p(t-t_1)) - \frac{1}{w-p}\,\text{sen}(wt_1+p(t-t_1))+\right.$$

$$\left.\frac{2w}{w^2-p^2}\,\text{sen}\,pt\right]$$

Aplicando las siguientes identidades trigonométricas:

$$\text{sen}\,(A+B) = \text{sen}\,A\cos B + \cos A\,\text{sen}\,B$$

$$\text{sen}\,(A-B) = \text{sen}\,A\cos B - \cos A\,\text{sen}\,B$$

se obtiene:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{w+p}(\text{sen}\,wt_1\cos p(t-t_1) - \cos wt_1\,\text{sen}\,p(t-t_1)) -\right.$$

$$\frac{1}{w-p}(\text{sen}\,wt_1\cos p(t-t_1) + \cos wt_1\,\text{sen}\,p(t-t_1)) +$$

$$\left.\frac{2w}{w^2-p^2}\,\text{sen}\,pt\right]$$

Como:

$$w = \pi/2t_1,\ \text{entonces}\ wt_1 = \pi/2$$

Sustituyendo este valor en la ec. anterior, se obtiene:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{w+p} - \frac{1}{w-p}\right)\cos p(t-t_1) + \frac{2w}{w^2-p^2}\,\text{sen}\,pt\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{-2p}{w^2-p^2}\cos p(t-t_1) + \frac{2w}{w^2-p^2}\,\text{sen}\,pt\right] =$$

$$\frac{1}{p(1-(w^2/p^2))}\cos p(t-t_1) - \frac{w}{p^2(1-(w^2/p^2))}\,\text{sen}\,pt$$

En términos del factor de amplificación dinámica,

$$\int_0^{t_1}\text{sen}\,w\tau\,\text{sen}\,p(t-\tau)d\tau = \frac{\beta}{p}\left[\cos p(t-t_1) - \frac{w}{p}\,\text{sen}\,pt\right]_{(j)}$$

Sustituyendo la ec. (j) en la ec. (i):

$$x^*(t) = -\frac{a}{p^2}\left[\cos p(t-t_1) - \cos pt\right] +$$

$$\frac{a\beta}{p^2}\left[(\cos p(t-t_1) - \frac{w}{p}\,\text{sen}\,pt)\right]$$

$$x^*(t) = -\frac{a}{p^2}\left[\left(\cos p(t-t_1)-\cos pt+\beta\left(\frac{w}{p}\text{ sen } pt-\cos p(t-t_1)\right)\right)\right]$$

$t \geq t_1$

SOLUCION

P.8.4. Determine la respuesta dinámica de una torre sujeta a una ráfaga de viento (carga). La idealización de la estructura y la carga se muestran en la Fig. P.8.4. Despreciar el amortiguamiento.

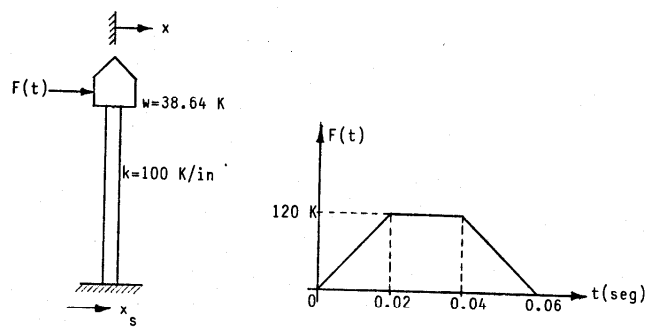


FIG. P.8.4

SOLUCION:

Para este sistema:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{38.64x1000}{32.2x12} = 100.0\ \frac{lb\text{-}s^2}{in}$$

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100,000}{100}} = 31.62\ s^{-1}$$

Debido a que la carga está dada por una función lineal segmentada, la respuesta se obtiene con la integral de Duhamel, ecs. (8.18) y los coeficientes A(t) y B(t) se determinarán con las ecs. (8.25) y (8.26).

Los cálculos necesarios se presentan en forma tabular para varios intervalos de tiempo (Tabla 8.1). Las integrales de las ecs. (8.23) y (8.24) son denominadas ΔA y ΔB en la tabla, puesto que:

$$\Delta A = A(t_i) - A(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau)\cos p\tau d\tau$$

y $\Delta B = B(t_i) - B(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau)\text{sen } p\tau d\tau$

Sustituyendo valores numéricos en la ec. (8.25) y (8.26) para ----
t = 0.02 seg :

$$A(t=0.02) = \frac{120\ 000.00}{(31.62)^2(0.02)}(\cos(0.6324)-\cos(0)+ 31.62(0.02)\text{sen}(0.6324))$$

$$A(t=0.02) = 1082.66$$

$$B(t=0.02) = \frac{120\ 000.00}{(31.62)^2(0.02)}(\text{sen}(0.6324)-31.62(0.02)\cos(0.6324))$$

$$B(t=0.02) = 485.97$$

Para t = 0.04 seg :

$$A(t=0.04) = 1082.66+120\ 000\frac{(\text{sen}(1.2648)-\text{sen}(0.6324))}{31.62}$$

$$A(t=0.04) = 2458.24$$

$$B(t=0.04) = 485.97+120\ 000\frac{(\cos(0.6324)-\cos(1.2648))}{31.62}$$

$$B(t=0.04) = 2403.87$$

Para t = 0.06 seg :

$$A(t=0.06) = 2458.24+(120\ 000-0.04(-120\ 000/0.02))x (\text{sen}(1.8972)-\text{sen}(1.2648))/31.62 + \frac{(-120\ 000)}{(31.62)^2(0.02)}(\cos(1.8972)-\cos(1.2648)+ 31.62(0.06\text{sen } 1.8972-0.04\text{sen } 1.2648))$$

$$A(t=0.06) = 2\ 571.41$$

$$B(t=0.06) = 2403.87+(120\ 000-0.04(-120\ 000/0.02))x (\cos(1.2648)-\cos(1.8972))/31.62 + \frac{(-120\ 000)}{(31.61)^2(0.02)}(\text{sen}(1.8972)-\text{sen}(1.2648)- 31.62(0.06\cos 1.8972-0.04\cos 1.2638))$$

$$B(t=0.06) = 3585.19$$

Sustituyendo los valos de A(t) y B(t) en la ec. (8.18), se obtienen los desplazamientos:

$$x(t=0.02) = \frac{(1082.66\text{sen}(0.6324)-485.97\cos(0.6324))}{(100)(31.62)}$$

$x(t=0.02) = 0.0784$ in RESPUESTA

$$x(t=0.04) = \frac{(2458.24\text{sen}(1.2648)-2403.87\cos(1.2648))}{(100)(31.62)}$$

$x(t=0.04) = 0.5123$ in RESPUESTA

$$x(t=0.06) = \frac{(2571.41\text{sen}(1.8972)-3585.19\cos(1.8972))}{(100)(31.62)}$$

$x(t=0.06) = 1.1338$ in RESPUESTA

Puesto que la terminación de la ráfaga es en t=0.060 seg los valores de A y B permanecen constantes despues de ese tiempo. Consecuentemente, las vibraciones libres siguientes se obtienen -- sustituyendo los valores de A y B evaluados para t=0.06 seg en la ec. (8.18), es decir:

$$x(t) = 0.8132\text{sen } 31.62t - 13.1338\cos 31.62t$$

para $t \geq 0.060$ seg.

t	F(τ)	pt	ΔA(t)	A(t)	ΔB(t)	B(t)	x(t)
0.00	0	0	0	0	0	0	0
0.02	120	0.6324	1082.66	1082.66	485.97	485.97	0.0784
0.04	120	1.2648	1375.58	2458.24	1917.90	2403.87	0.5123
0.06	0	1.8972	113.17	2571.41	1181.32	3585.19	1.1338
0.08	0	2.5296	0	2571.41	0	3585.19	1.3952
0.10	0	3.1620	0	2571.41	0	3583.19	1.1170

TABLA 8.1 CALCULO NUMERICO DE LA RESPUESTA

9

"SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD"

En todos los capítulos anteriores, analizamos y obtuvimos la respuesta dinámica para estructuras modeladas como sistemas de un grado de libertad. Solo si la estructura toma una única forma durante su movimiento, el modelo de un grado de libertad proporciona la respuesta dinámica exacta. En otras circunstancias, cuando la estructura toma más de una posible forma durante el movimiento, la solución obtenida de un modelo de un grado será una aproximación al comportamiento dinámico real.

Las estructuras no siempre pueden ser descritas por un modelo de un grado y, en general, tienen que ser representadas por modelos de varios grados. En realidad, las estructuras son modelos continuos y como tales, poseen un número infinito de grados de libertad. Los métodos analíticos existentes que describen el comportamiento dinámico de las estructuras continuas (propiedades uniformes y geometría regular), son bastante complejos, debido a que

requieren análisis matemático considerable, como la solución de ecuaciones diferenciales parciales y además son aplicables solo a estructuras reales simples.

9.1 EDIFICIO DE CORTANTE DE VARIOS PISOS.

Consideraremos uno de los más instructivos y prácticos tipos de estructuras, el cual envuelve muchos grados de libertad: EL EDIFICIO DE CORTANTE DE VARIOS PISOS, el cual puede ser definido como una estructura en la cual no existe rotación de una sección horizontal a nivel de los pisos. A este respecto, el edificio desplazado tendrá muchas de las características de una viga en cantiliver que es desplazada solo por fuerzas de corte; de aquí el nombre de edificio de cortante. Para llevar a cabo dicha deflexión en un edificio, debemos suponer que: (1) la masa total de la estructura está concentrada a nivel de los pisos; (2) las trabes sobre los pisos son infinitamente rígidas comparadas con las columnas; y (3) la deformación de la estructura es independiente de las fuerzas axiales presentes en las columnas. La primera suposición transforma el problema de una estructura con un número infinito de grados de libertad (debido a la masa distribuida) a una estructura de varios grados de libertad con masas concentradas a nivel de los pisos. Así, una estructura de tres pisos modelada como un edificio de cortante(Fig. 9.1a) tendrá tres grados de libertad, es decir, tres desplazamientos horizontales a nivel de piso. La segunda suposición asegura que las uniones entre trabes y columnas estan fijas contra rotaciones y por último, la tercera nos lleva a la condición de que las trabes rígidas permanecerán horizontales durante el movimiento.

Deberá notarse que el edificio puede tener cualquier número de crujías y que solo por conveniencia representamos el edificio de corte en términos de una. Realmente, podemos idealizar más el edificio como una simple columna (Fig. 9.2a), con masas concentradas a nivel de los pisos, sobreentendiéndose que solo los desplazamientos horizontales son posibles. Otra alternativa es adoptar el sistema masa-resorte mostrado en la Fig. 9.3a para represen

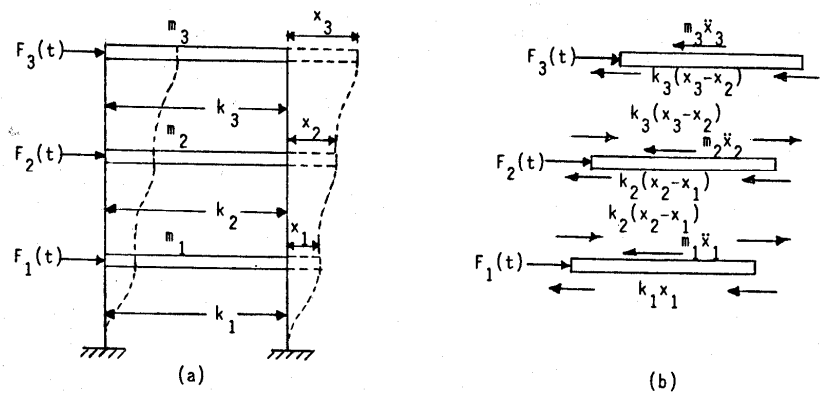


FIG. 9.1 MODELO DE UNA CRUJIA PARA UN EDIFICIO DE CORTE

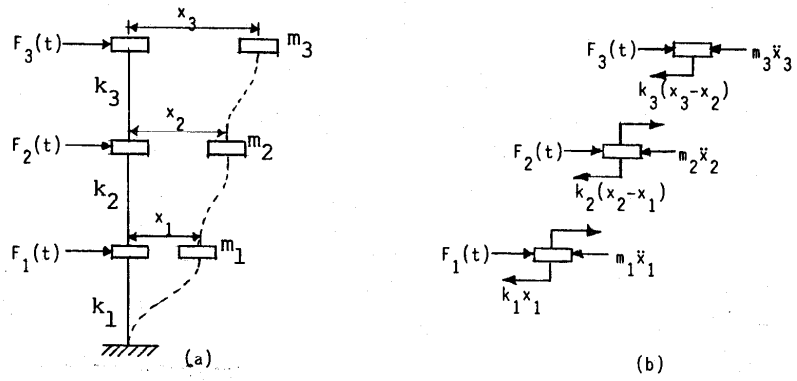


FIG. 9.2 EDIFICIO DE CORTE MODELADO COMO UNA SIMPLE COLUMNA

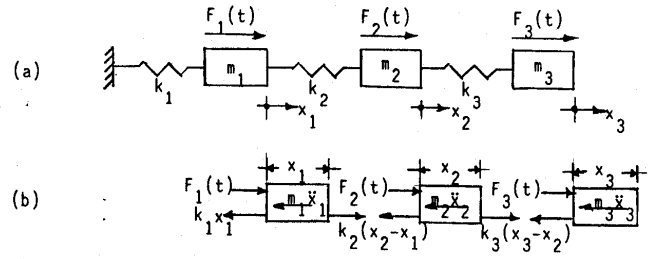


FIG. 9.3 EDIFICIO DE CORTANTE REPRESENTADO COMO MODELO MASA-RESORTE

tar el edificio de corte. En cualquiera de las tres representaciones descritas, el coeficiente de rigidez o constante del resorte - k_i entre dos masas consecutivas es la fuerza requerida para producir un desplazamiento unitario relativo en dos pisos adyacentes.

Para una columna uniforme con los dos extremos fijos contra rotación, la constante del resorte está dada por:

$$k = \frac{12EI}{L^3}$$

y para una columna con un extremo fijo y otro simplemente apoyado:

$$k = \frac{3\ EI}{L^3}$$

donde E es el modulo elástico del material, I el momento de inercia de la sección transversal y L la altura del piso.

Cabe aclarar que las tres representaciones mostradas en las Figs. 9.1 a la 9.3 para el edificio de cortante, son equivalentes.

9.2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.

En esta sección estableceremos las ecuaciones de movimiento de sistemas con grados de libertad lineales y angulares aplicando el equilibrio dinámico de traslación o de rotación.

Iniciaremos con el sistema masa-resorte de dos grados de libertad (edificio de cortante de dos pisos) de la Fig. 9.4a, en el cual las masas solo pueden moverse en la dirección x y no hay fricción u otro tipo de amortiguamiento en el sistema. Como coordenadas que definen el movimiento del sistema, tomaremos los desplazamientos x_1 y x_2 de las masas desde sus posiciones de equilibrio estático (deformaciones nulas de los resortes).

Aplicando la segunda Ley de Newton a los diagramas de cuerpo libre de la Fig. 9.4b obtenemos las ecuaciones de movimiento para m_1 y m_2 como:

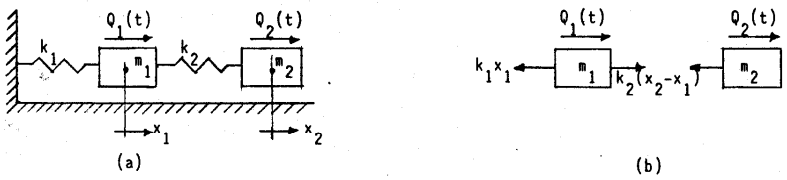


FIG. 9.4 MODELO MASA-RESORTE DE DOS GRADOS DE LIBERTAD.

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_2(x_2-x_1) + Q_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2-x_1) + Q_2(t) \end{aligned} \qquad (a)$$

Reacomodando términos obtenemos:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 &= Q_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 - \qquad k_2x_1 + k_2x_2 &= Q_2(t) \end{aligned} \qquad (9.1)$$

Así, tenemos un sistema de dos ecuaciones simultáneas diferenciales lineales y de segundo orden con coeficientes constantes.

Como un segundo ejemplo consideraremos la masa suspendida por resortes de la Fig. 9.5a. Los tres resortes estan en el mismo plano, y tienen constantes k_1, k_2 y k_3. Se supone que la masa se desplaza solo en el plano de los resortes (plano x-y), por lo que el movimiento puede definirse por las componentes de traslación relativas a la posición de equilibrio x_1 y y_1. Considerando pequeños desplazamientos, las fuerzas en los resortes R_1, R_2 y R_3 ejercidas en la masa (ver Fig. 9.5b) pueden considerarse que tienen la misma inclinación de los resortes en la posición de equilibrio. Con estas suposiciones las ecuaciones de movimiento de la masa son:

$$m\ddot{x}_1 = \sum_{i=1}^{3} R_i \cos \alpha_i + Q_x$$

y

$$m\ddot{y}_1 = \sum_{i=1}^{3} R_i \operatorname{sen} \alpha_i + Q_y \qquad (b)$$

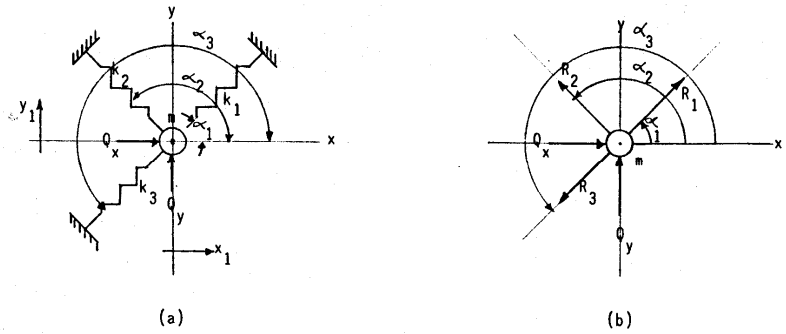


FIG. 9.5

donde:

$$R_i = -k_i(x_1 \cos \alpha_i + y_1 \operatorname{sen} \alpha_i) \qquad (c)$$

Sustituyendo la ec. (c) en las ecs. (b) y reacomodando términos se obtiene:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + \sum_{i=1}^{3} k_i(x_1 \cos^2 \alpha_i + y_1 \operatorname{sen} \alpha_i \cos \alpha_i) &= Q_x \\ m\ddot{y}_1 + \sum_{i=1}^{3} k_i(x_1 \operatorname{sen} \alpha_i \cos \alpha_i + y_1 \operatorname{sen}^2 \alpha_i) &= Q_y \end{aligned} \qquad (9.2)$$

Por último, consideraremos el sistema de la Fig. 9.6 que consiste de dos discos montados en un flecha que está fija en los puntos A y B y restringen la traslación lateral de los puntos C y D. Los tres segmentos de la flecha tienen rigideces rotacionales k_{r1}, k_{r2} y k_{r3}. Los grados de libertad rotacionales de los discos son ϕ_1 y ϕ_2, los momentos polares de inercia de la masa I_1 e I_2 y las fuerzas de torsión aplicadas T_1 y T_2. Para este caso las ecuaciones de movimiento rotacional son:

$$I_1\ddot{\phi}_1 = -k_{r1}\phi_1 + k_{r2}(\phi_2-\phi_1) + T_1$$

$$I_2\ddot{\phi}_2 = -k_{r2}(\phi_2-\phi_1) - k_{r3}\phi_2 + T_2$$

En las cuales reacomodando términos se obtiene:

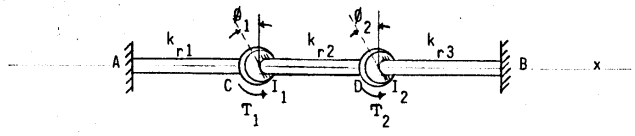


FIG. 9.6

$$
\begin{aligned}
I_1\ddot{\phi}_1 + (k_{r1}+k_{r2})\phi_1 - k_{r2}\phi_2 &= T_1 \\
I_2\ddot{\phi}_2 - k_{r2}\phi_1 + (k_{r2}+k_{r3})\phi_2 &= T_2
\end{aligned}
\tag{9.3}
$$

Dentro de la categoría de "Sistemas de varios grados de libertad" se incluyen todos los sistemas de más de un grado de libertad pero menos de un número infinito de grados de libertad. La configuración de estos sistemas está determinada por un número finito de coordenadas de desplazamiento. Si hay n grados de libertad asociados a las masas, entonces se requieren n ecuaciones diferenciales para describir los movimientos del sistema.

9.3 ECUACIONES DE ACCION: COEFICIENTES DE RIGIDEZ.

Las ecs. (9.1), correspondientes al edificio de cortante de dos grados de libertad pueden reescribirse en forma matricial:

$$
\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \end{bmatrix}
\tag{9.4}
$$

Estas relaciones pueden escribirse en forma más concisa como:

$$
\underset{\sim}{M}\ddot{\underline{x}} + \underset{\sim}{k}\underline{x} = \underline{Q}
\tag{9.5}
$$

donde $\underset{\sim}{M}$ y $\underset{\sim}{k}$ son, respectivamente, la matriz de masa y rigideces; -

para sistemas de n grados de libertad estarán dadas por:

$$\underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \tag{9.6}$$

y $\underline{x}$, $\underline{\ddot{x}}$ y $\underline{Q}$ son, respectivamente, los vectores de desplazamiento, aceleración y fuerza dados por:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\ddot{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ \vdots \\ Q_n(t) \end{bmatrix} \tag{9.7}$$

Debe de tomarse en cuenta que la matriz de masas $\underset{\sim}{M}$ correspondiente al edificio de cortante es una matriz diagonal (los elementos distintos de cero están solo en la diagonal principal), como se ve en el arreglo (9.4).

Ahora, nos concentraremos en la matriz de rigideces $\underset{\sim}{k}$ y el desarrollo de su contenido de una manera organizada. A los elementos de esta matriz se les denomina "coeficientes de rigidez". En general, el coeficiente de rigidez k_{ij} está definido como la fuerza en la coordenada i al dar un desplazamiento unitario en la coordenada j, mientras todas las demás coordenadas se fijan. Las Figs. 9.7a y 9.7b ilustran este proceso para el sistema de la Fig. 9.4. En la Fig. 9.7a se dá un desplazamiento $x_1=1$, mientras $x_2 = 0$. Las fuerzas estáticas requeridas para esta condición son denominadas k_{11} y k_{21}. El símbolo k_{11} representa la fuerza ejercida en la masa 1 al darle un desplazamiento unitario, mientras k_{21} es la fuerza ejercida en la masa 2 al dar un desplazamiento unitario en la masa 1. Los valores correspondientes a k_{11} y k_{21} pueden determinarse en la Fig. 9.7c y son: $k_{11} = k_1+k_2$ y $k_{21} = -k_2$. Como puede observarse se han determinado los elementos de la primera colum

na de $\underset{\sim}{k}$. Siguiendo un procedimiento similar pueden determinarse los términos de la segunda columna de $\underset{\sim}{k}$, dando un desplazamiento unitario $x_2 = 1$, mientras $x_1 = 0$ y con la ayuda de la Fig. 9.7b y 9.7d se determina que $k_{12} = -k_2$ y $k_{22} = k_2$. Para sistemas lineales elásticos con pequeños desplazamientos, la matriz de rigideces es siempre simétrica y en este caso vemos que $k_{12} = k_{21} = -k_2$.

Por otra parte, el término m_{ij} en la matriz de masas, es la fuerza en la coordenada i debida a una aceleración unitaria en j. Esta definición es análoga a la de los coeficientes de rigidez y el procedimiento formal para determinar los coeficientes de $\underset{\sim}{M}$ es similar al descrito previamente para determinar las columnas de $\underset{\sim}{k}$.

Cuando en las ecuaciones de movimiento (ec. (9.5)) aparece la matriz de rigideces $\underset{\sim}{k}$ se les denomina ECUACIONES DE ACCION.

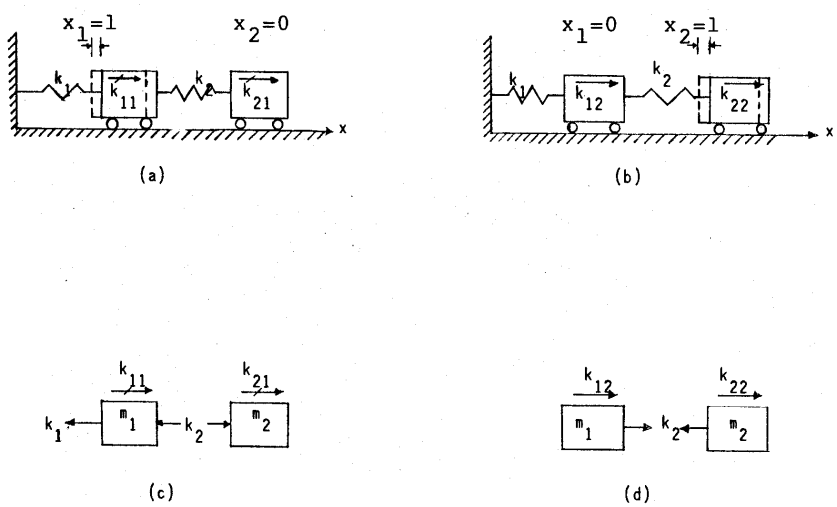


FIG. 9.7

9.4 ECUACIONES DE DESPLAZAMIENTO: COEFICIENTES DE FLEXIBILIDAD.

Una alternativa aproximada en el desarrollo de las ecuaciones de movimiento de una estructura es la utilización de los -- coeficientes de flexibilidad en lugar de los de rigideces. De esta manera, las propiedades elásticas de la estructura estan descritas por los "coeficientes de flexibilidad", los cuales estan definidos como las deflexiones producidas por una carga unitaria aplicada en una de las coordenadas. Específicamente el coeficiente de flexibilidad f_{ij} es definido como el desplazamiento en la coordenada i al aplicar estáticamente una fuerza unitaria en la coordenada j. Las Figs. 9.8a y 9.8b ilustran los coeficientes de flexibilidad correspondientes a una fuerza unitaria aplicada en uno de los pisos del edificio de cortante de dos pisos. Usando estos coéficientes y aplicando el principio de superposición, podremos establecer que el desplazamiento de cualquier coordenada es igual a la suma de los productos de los coeficientes de flexibilidad en esta ordenada multiplicados por la fuerza correspondiente.

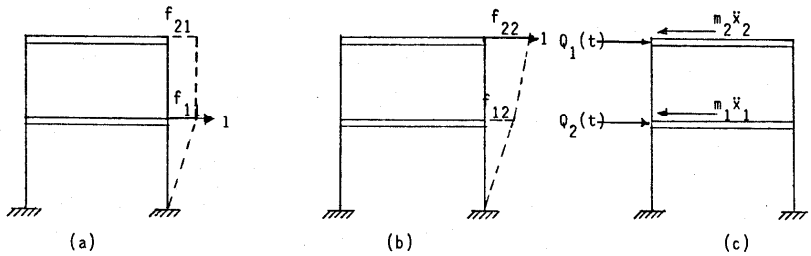


FIG. 9.8 COEFICIENTES DE FLEXIBILIDAD Y FUERZAS EN UN EDIFICIO DE CORTANTE DE DOS PISOS

La Fig. 9.8c muestra las fuerzas actuantes sobre el edificio de cortante. Por consiguiente, los desplazamientos para el edificio de dos pisos pueden ser expresados en términos de los coeficientes de flexibilidad como:

$$x_1 = (Q_1(t)-m_1\ddot{x}_1)f_{11} + (Q_2(t)-m_2\ddot{x}_2)f_{12}$$
$$x_2 = (Q_1(t)-m_1\ddot{x}_1)f21 + (Q_2(t)-m_2\ddot{x}_2)f_{22} \qquad (9.8)$$

Reordenando términos en estas ecuaciones y utilizando notación matricial, obtenemos:

$$\underline{x} = \underset{\sim}{F}\underline{Q} - \underset{\sim}{F}\underset{\sim}{M}\underline{\ddot{x}} \qquad (9.9)$$

donde $\underset{\sim}{F}$ es la matriz de flexibilidades. Para sistemas de n grados de libertad está dada por:

$$\underset{\sim}{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \qquad (9.10)$$

y los demás términos ya se definieron en la sección anterior. A las ecuaciones (9.9) se les denomina ECUACIONES DE DESPLAZAMIENTO.

Las definiciones dadas para coeficientes de rigidez y de flexibilidad estan basadas en consideraciones en las cuales los desplazamientos son producidos por fuerzas estáticas. La relación entre fuerzas y desplazamientos estáticos puede obtenerse igualando a cero el vector aceleración $\underline{\ddot{x}}$ en las ecs. (9.5) y (9.9), obteniéndose:

$$\underset{\sim}{k}\underline{x} = \underline{Q}$$
$$\underset{\sim}{F}\underline{Q} = \underline{x} \qquad (9.11)$$

De estas relaciones puede observarse que la matriz de rigideces $\underset{\sim}{k}$ y la matriz de flexibilidades $\underset{\sim}{F}$ son matrices inversas (en referencia a las mismas coordenadas), es decir,

$$\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{F}^{-1} \text{ ó } \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{k}^{-1}$$

es decir,

$$\underset{\sim}{F} \times \underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{I} \qquad (9.12)$$

donde $\underset{\sim}{I}$ es la matriz identidad.

Consecuentemente, la matriz de flexibilidades $\underset{\sim}{F}$ puede ob

tenerse calculando la inversa de la matriz de rigideces $\underset{\sim}{k}$ o directamente de la definición de coeficiente de flexibilidad. Así, utilizando la relación entre ambas matrices, obtenemos para el edificio de cortante,

$$\underset{\sim}{F} = \begin{bmatrix} 1/k_1 & 1/k_1 \\ 1/k_1 & 1/k_1+1/k_2 \end{bmatrix} \tag{9.13}$$

La extensión de la matriz de flexibilidades para un edificio de dos pisos a cualquier número de pisos es fácil de obtener siguiendo el patrón de la matriz (9.13).

Para sistemas estáticamente determinados, algunas veces es más conveniente trabajar con las ecuaciones de desplazamiento que con las ecuaciones de acción, como veremos en los ejemplos.

9.5 VIBRACIONES LIBRES NO AMORTIGUADAS EN SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.

Cuando se considera vibración libre, la estructura no está sujeta a excitación externa (movimiento del apoyo o fuerza), y su movimiento es gobernado solo por las condiciones iniciales. Existen ocasionalmente circunstancias para las cuales es necesario determinar el movimiento de la estructura bajo condiciones de vibración libre, pero es raro el caso. No obstante, el análisis de la estructura en vibración libre proporciona las más importantes propiedades dinámicas de la estructura, como son: las frecuencias naturales y las formas modales correspondientes.

9.5.1 FRECUENCIAS Y FORMAS MODALES

Para un sistema con n grados de libertad, las ecuaciones de acción para vibraciones libres no amortiguadas se obtienen haciendo el vector de fuerzas igual a cero ($\underline{Q} = \underline{0}$), en el arreglo (9.5). Así, las ecuaciones de acción toman la forma general:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (9.14)$$

O en forma concisa:

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underline{x}} + \underset{\sim}{k}\underline{x} = \underline{0}$$

Ejemplificaremos la solución de este conjunto de ecuaciones homogeneas con el sistema de dos grados de libertad de la Fig. 9.4. Así, el sistema (9.14) se transforma en:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (d)$$

De manera análoga a los sistemas de un grado de libertad, suponemos soluciones armónicas de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{m1} \text{ sen } (pt+\emptyset) \\ x_2 &= x_{m2} \text{ sen } (pt+\emptyset) \end{aligned} \qquad (e)$$

Estas expresiones implican que en un "modo natural de vibración", ambas masas siguen la misma función armónica, y tienen la frecuencia angular p y el ángulo de fase $\emptyset$. Los valores de x_{m1} y x_{m2} representan las amplitudes de los movimientos vibratorios. Sustituyendo las ecs. (e) en las ecs. (d), resultan las siguientes ecuaciones algebraicas, las cuales deberán satisfacerse:

$$\begin{aligned} -p^2 m_{11} x_{m1} + k_{11} x_{m1} + k_{12} x_{m2} &= 0 \\ -p^2 m_{22} x_{m2} + k_{21} x_{m1} + k_{22} x_{m2} &= 0 \end{aligned} \qquad (f)$$

ó

$$\begin{bmatrix} k_{11}-p^2 m_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}-p^2 m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (g)$$

Una posible solución de estas ecuaciones es que $x_{m1}=x_{m2}=0$, lo cual corresponde a la posición de equilibrio estático sin deformación y no dá información acerca de la vibración. Las ecuacio

nes pueden tener soluciones no triviales solo si el determinante de los coeficientes x_{m1} y x_{m2} es igual a cero. Así,

$$\begin{vmatrix} k_{11}-p^2m_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}-p^2m_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (h)$$

La expansión de este determinante resulta en:

$$(k_{11}-p^2m_{11})(k_{22}-p^2m_{22}) - k_{12}^2 = 0$$

ó

$$m_{11}m_{22}(p^2)^2 - (m_{11}k_{22}+m_{22}k_{11})p^2 + k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 0 \qquad (i)$$

Esta expresión, que es cuadrática en p^2, es llamada "ECUACION CARACTERISTICA" (o ecuación de Frecuencia) del sistema, y tiene dos raíces denominadas "VALORES CARACTERISTICOS", determinados por la fórmula:

$$p_{1,2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (j)$$

donde:

$$a = m_{11}m_{22}$$
$$b = -(m_{11}k_{22}+m_{22}k_{11}) \qquad (k)$$
$$c = k_{11}k_{22}-k_{12}^2 = |\underset{\sim}{k}|$$

La expansión del término dentro del radical de la ec. (j), usando las expresiones (k), muestra que es siempre positivo; por lo tanto, ambas raíces p_1^2 y p_2^2 son reales. Además, si el determinante de $\underset{\sim}{k}$ (igual a la constante c) no es negativo, la raíz cuadrada del término será mas pequeña o igual a b. Así, las raíces p_1^2 y p_2^2 son ambas positivas (o cero). La ec. (j) está escrita de tal manera que $p_1<p_2$. Así, la ecuación característica nos lleva a dos frecuencias naturales de vibración que dependen solo de las constantes físicas del sistema.

Sustituyendo los valores característicos p_1^2 y p_2^2 en las ecs. (g), encontramos que no podemos obtener valores reales para x_{m1} y x_{m2}. Sin embargo, con estas ecuaciones podemos desarrollar las siguientes relaciones de amplitudes correspondientes a p_1^2 y p_2^2 respectivamente. Así,

$$r_1 = \frac{x_{m1,1}}{x_{m2,1}} = \frac{-k_{12}}{k_{11}-p_1^2 m_{11}} = \frac{k_{22}-p_1^2 m_{22}}{-k_{21}}$$

$$r_2 = \frac{x_{m1,2}}{x_{m2,2}} = \frac{-k_{12}}{k_{11}-p_2^2 m_{11}} = \frac{k_{22}-p_2^2 m_{22}}{-k_{21}} \qquad (l)$$

El segundo subíndice (1 ó 2) en las amplitudes de las -- ecs. (l) denota los "MODOS NATURALES (O MODOS PRINCIPALES) DE VI-- BRAR" correspondientes a las raíces p_1^2 y p_2^2. El valor más pequeño de frecuencia angular corresponde al primer modo (o "MODO FUNDAMENTAL") y el mayor valor al segundo modo. Usando la frecuencia angular p_1 y la relación de amplitud correspondiente r_1, en las ecs. - (e), tenemos:

$$x_{1,1} = r_1 x_{m2,1} \operatorname{sen}(p_1 t+\emptyset_1)$$

$$x_{2,1} = x_{m2,1} \operatorname{sen}(p_1 t+\emptyset_1) \qquad (m)$$

Estas expresiones describen completamente el primer modo de vibración o modo fundamental. En cualquier tiempo durante di-- cho movimiento, la relación de desplazamiento $x_{1,1}/x_{2,1}$ es la misma que la relación de amplitud r_1. En cada ciclo de vibración, ambas masas pasan dos veces por sus posiciones de equilibrio, y al-- canzan sus posiciones extremas simultáneamente. Nuestro análisis no revela limitación sobre el ángulo de fase; pero por definición de las ecs. (e), debe ser el mismo para ambas masas.

La sustitución de la frecuencia angular mayor p_2 y la correspondiente relación de amplitud r_2 dentro de las ecs. (e), nos lleva a:

$$x_{1,2} = r_2 x_{m2,2} \operatorname{sen}(p_2 t+\emptyset_2)$$

$$x_{2,2} = x_{m2,2} \operatorname{sen}(p_2 t+\emptyset_2) \qquad (n)$$

las cuales describen el segundo modo de vibración. En este caso, la relación de desplazamiento es siempre $x_{1,2}/x_{2,2} = r_2$. La solución general de las ecs. (d) consiste de la suma de los modos principales dados por las ecs. (m) y (n). Así, tenemos:

$$x_1 = x_{1,1} + x_{1,2}$$
$$x_1 = r_1 x_{m2,1} \operatorname{sen}(p_1 t + \emptyset_1) + r_2 x_{m2,2} \operatorname{sen}(p_2 t + \emptyset_2)$$
$$x_2 = x_{2,1} + x_{2,2} \qquad \text{(o)}$$
$$x_2 = x_{m2,1} \operatorname{sen}(p_1 t + \emptyset_1) + x_{m2,2} \operatorname{sen}(p_2 t + \emptyset_2)$$

Estas expresiones contienen cuatro constantes arbitrarias ($x_{m2,1}$, $x_{m2,2}$, $\emptyset_1$ y $\emptyset_2$) que pueden obtenerse satisfaciendo las cuatro condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad de las masas, en $t = 0$.

Las ecs. (o) representan movimientos más complicados que no son periódicos a menos que las frecuencias p_1 y p_2 ocurran al mismo tiempo. El sistema realiza un movimiento armónico puro solo si comienza cuidadosamente en uno de sus modos principales.

En forma análoga, podemos determinar las frecuencias y formas modales de cualquier sistema de dos grados de libertad.

En el caso de sistemas con varios grados de libertad, nacen complicaciones adicionales debido a que el número de términos se incrementa rápidamente con el número de grados de libertad. Por esta razón, las formulaciones matriciales son muy efectivas para el manejo de gran cantidad de términos.

Ahora, obtendremos la solución para el conjunto de ecuaciones homogéneas correspondientes a un sistema de n grados de libertad (ec. (9.14)). Para ello, supondremos que en un modo natural de vibración, todas las masas siguen la función armónica:

$$\underline{x}_i = \underline{x}_{mi} \operatorname{sen}(p_i t + \emptyset_i) \qquad (9.15)$$

en la cual p_i y $\emptyset_i$ son la frecuencia natural y el ángulo de fase del i-ésimo modo, respectivamente. El símbolo $\underline{x}_i$ en la ec. (9.15) denota el vector de desplazamientos, y $\underline{x}_{mi}$ representa el vector de amplitudes. Es decir,

$$\underline{x}_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_i \qquad \underline{x}_{mi} = \begin{bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix}_i \qquad (9.16)$$

Derivando la ec. (9.15) obtenemos los vectores de velocidad y aceleración,

$$\dot{\underline{x}}_i = p_i \, \underline{x}_{mi} \cos(p_i t+\emptyset_i) \tag{9.17}$$

$$\ddot{\underline{x}}_i = -p_i^2 \, \underline{x}_{mi} \, \mathrm{sen}(p_i t+\emptyset_i) \tag{9.18}$$

Sustituyendo las ecs. (9.15) y (9.18) en la ec. (9.14) y reagrupando términos, tenemos:

$$(\underset{\sim}{k}\underline{x}_{mi} - p_i^2 \underset{\sim}{M}\underline{x}_{mi})\mathrm{sen}(p_i t+\emptyset_i) = \underline{0} \tag{9.19}$$

de donde,

$$\underset{\sim}{k}\underline{x}_{mi} - p_i^2 \underset{\sim}{M}\underline{x}_{mi} = \underline{0}$$

ó

$$(\underset{\sim}{k} - p_i^2 \underset{\sim}{M})\underline{x}_{mi} = \underline{0} \tag{9.20}$$

La cual, para el caso general es un arreglo de n sistemas algebráicos homogéneos de ecuaciones lineales con n desplazamientos desconocidos x_{mi} y un parámetro p_i^2. Si definimos:

$$\underset{\sim}{H}_i = \underset{\sim}{k} - p_i^2 \underset{\sim}{M} \tag{9.21}$$

$\underset{\sim}{H}_i$ es denominada "MATRIZ CARACTERISTICA", y sustituyéndola en la ec. (9.19) se obtiene:

$$\underset{\sim}{H}_i \underline{x}_{mi} = \underline{0} \tag{9.22}$$

La formulación de la ec. (9.22) es un problema matemático importante conocido como un "EIGENPROBLEMA". Su solución no trivial, es decir, la solución para la cual no toda $x_{mi}=0$, requiere que el determinante de la matriz característica sea igual a cero; en este caso,

$$|\underset{\sim}{H}_i| = 0 \tag{9.23}$$

ó en forma expandida:

$$|\underset{\sim}{H}_i| = \begin{vmatrix} k_{11}-p_i^2 m_{11} & k_{12}-p_i^2 m_{12} & \cdots & k_{1n}-p_i^2 m_{1n} \\ k_{21}-p_i^2 m_{21} & k_{22}-p_i^2 m_{22} & \cdots & k_{2n}-p_i^2 m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1}-p_i^2 m_{n1} & k_{n2}-p_i^2 m_{n2} & \cdots & k_{nn}-p_i^2 m_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

La expansión de este determinante nos lleva a un polinomio de grado n en p_i^2, el cual deberá ser satisfecho para n valores de p_i^2. Este polinomio es conocido como la "ECUACION CARACTERISTICA" del sistema. Si el polinomio no puede ser factorizado, sus n raíces $p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2$ pueden encontrarse mediante un procedimiento numérico. Al igualar el determinante a cero (ec.(9.23)); dichos valores o raíces, que fueron designados previamente como valores característicos, son también llamados "EIGENVALORES" (el prefijo eigen significa propio en alemán).

Los eigenvalores serán todos reales y positivos o cero. Sin embargo, no son necesariamente distintos.

Los vectores de amplitudes modales, cualquiera de los cuales está representado por $\underline{x}_{mi}$, son llamados "VECTORES CARACTERISTICOS O EIGENVECTORES". Si los eigenvalores de un sistema han sido calculados como las raíces de la ecuación característica (ec. (9.23)), los eigenvectores pueden evaluarse por las ecuaciones algebraicas homogeneas (ec. (9.22)). Ya que hay n valores característicos, habrá también n vectores modales correspondientes. Para un eigenvalor distinto (no una raíz repetida), n-1 de las amplitudes en el eigenvector pueden expresarse en términos de la amplitud residual resolviendo n-1 ecuaciones simultáneas. Sin embargo, estos cálculos tan extensos no son necesarios si la definición formal para la inversa de $\underset{\sim}{H}_i$ es considerada como sigue:

$$\underset{\sim}{H}_i^{-1} = \frac{\underset{\sim}{H}_i^a}{|\underset{\sim}{H}_i|} = \frac{(\underset{\sim}{H}_i^c)^T}{|\underset{\sim}{H}_i|} \qquad (9.24)$$

El símbolo $\underset{\sim}{H}_i^a$ en la ecuación anterior, denota la "MATRIZ ADJUNTA DE $\underset{\sim}{H}_i$", la cual se define como la traspuesta de la "MATRIZ

DE COFACTORES $\underset{\sim}{H}_i^c$". Por supuesto, al inversa de $\underset{\sim}{H}_i$ no existe en -- realidad, ya que el determinante $|\underset{\sim}{H}_i|$ es cero (ver ec. (9.23)); pero, para el propósito de esta discusión, sin embargo, podemos reescribir la ec. (9.23) como:

$$\underset{\sim}{H}_i \underset{\sim}{H}_i^a = |\underset{\sim}{H}_i| \underset{\sim}{I} = 0 \tag{9.25}$$

Comparando la ec. (9.25) con la ec. (9.22), concluímos - que el eigenvector $\underline{x}_{mi}$ es proporcional a cualquier columna distinta de cero de la matriz adjunta $\underset{\sim}{H}_i^a$. Ya que el eigenvector puede - ser escalado arbitrariamente, puede ser tomado ya sea igual a una columna o normalizado. Para normalizar un eigenvector, basta con dividir cada una de las amplitudes entre la amplitud de la primera masa.

Otra forma de determinar los eigenvectores es utilizando las ecuaciones de desplazamiento en lugar de las ecuaciones de acción; para ello hay que aplicar un procedimiento similar al utilizado en las ecuaciones de acción.

9.5.2 COORDENADAS PRINCIPALES Y NORMALES

Para examinar ciertas relaciones inherentes entre los modos principales de vibración, consideremos los modos i y j del problema de eigenvalores para las ecuaciones de acción (ver ec.(9.19)) como sigue:

$$\underset{\sim}{k}\, \underline{x}_{mi} = p_i^2\, \underset{\sim}{M}\, \underline{x}_{mi} \qquad \text{(modo i)} \tag{9.26}$$

$$\underset{\sim}{k}\, \underline{x}_{mj} = p_j^2\, \underset{\sim}{M}\, \underline{x}_{mj} \qquad \text{(modo j)} \tag{9.27}$$

La premultiplicación de la ec. (9.26) por $\underline{x}_{mj}^T$ y la pos-- multiplicación de la traspuesta de la segunda por $\underline{x}_{mi}$ produce:

$$\underline{x}_{mj}^T\, \underset{\sim}{k}\, \underline{x}_{mi} = p_i^2\, \underline{x}_{mj}^T\, \underset{\sim}{M}\, \underline{x}_{mi} \tag{9.28}$$

$$\underline{x}_{mj}^T\, \underset{\sim}{k}\, \underline{x}_{mi} = p_j^2\, \underline{x}_{mj}^T\, \underset{\sim}{M}\, \underline{x}_{mi} \tag{9.29}$$

Los lados izquierdos de las ecs. (9.28) y (9.29) son i-- guales, así, la sustracción de la segunda ecuación a la primera --

trae como consecuencia la relación:

$$(p_i^2 - p_j^2)\underline{x}_{mj}^T \underset{\sim}{M} \underline{x}_{mi} = 0 \tag{9.30}$$

Por otro lado, si dividimos ambos lados de la ec. (9.28) por p_i^2 y ambos lados de la ec. (9.29) por p_j^2, los lados derechos se vuelven iguales. Entonces su resta da:

$$\left(\frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{p_j^2}\right)\underline{x}_{mj}^T \underset{\sim}{k} \underline{x}_{mi} = 0 \tag{9.31}$$

Para satisfacer las ecs. (9.30) y (9.31) cuando $i \neq j$ y los eigenvalores son distintos ($p_i^2 \neq p_j^2$), se deben tener las siguientes relaciones:

$$\underline{x}_{mj}^T \underset{\sim}{M} \underline{x}_{mi} = \underline{x}_{mi}^T \underset{\sim}{M} \underline{x}_{mj} = 0 \tag{9.32}$$

y

$$\underline{x}_{mj}^T \underset{\sim}{k} \underline{x}_{mi} = \underline{x}_{mi}^T \underset{\sim}{k} \underline{x}_{mj} = 0 \tag{9.33}$$

Estas expresiones representan las "RELACIONES DE ORTOGONALIDAD" entre los modos principales de vibración. De la ec. (9.32) vemos que los eigenvectores son ortogonales con respecto a $\underset{\sim}{M}$, y la ec. (9.33) muestra que tambien son ortogonales con respecto a $\underset{\sim}{k}$.

Para el caso de $i = j$, las ecs. (9.30) y (9.31) dan:

$$\underline{x}_{mi}^T \underset{\sim}{M} \underline{x}_{mi} = M_{pi}, \quad M_{pi} > 0 \tag{9.34}$$

y

$$\underline{x}_{mi}^T \underset{\sim}{k} \underline{x}_{mi} = k_{pi}, \quad k_{pi} > 0 \tag{9.35}$$

donde M_{pi} y k_{pi} son constantes que dependen de cómo el eigenvector $\underline{x}_{mi}$ esté normalizado. Colocaremos todos los eigenvectores columna en una "MATRIZ MODAL" de nxn, de la forma:

$$\underset{\sim}{X}_m = \left[\underline{x}_{m1}, \underline{x}_{m2}, \cdots, \underline{x}_{mn}\right] \tag{9.36}$$

Entonces podemos establecer las ecs. (9.32) y (9.34) colectivamente como:

$$\underset{\sim}{X}_m^T \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{X}_m = \underset{\sim}{M}_p \tag{9.37}$$

donde $\underset{\sim}{M}_p$ es un arreglo diagonal que será denominado como "MATRIZ - DE MASAS PRINCIPAL"; y está dada por:

$$\underset{\sim}{M}_p = \begin{bmatrix} M_{p1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_{p2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_{pn} \end{bmatrix} \tag{9.38}$$

Análogamente, las ecs. (9.33) y (9.35) se combinan en:

$$\underset{\sim}{X}_m^T \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{X}_m = \underset{\sim}{k}_p \tag{9.39}$$

en la cual $\underset{\sim}{k}_p$ es otro arreglo diagonal que será llamado "MATRIZ DE RIGIDECES PRINCIPAL"; y está dada por:

$$\underset{\sim}{k}_p = \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{p2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{pn} \end{bmatrix} \tag{9.40}$$

Las ecs. (9.37) y (9.39) representan la diagonalización de las matrices $\underset{\sim}{M}$ y $\underset{\sim}{k}$. Si cualquiera de ellas ya es diagonal, la operación en la ec. (9.37) ó (9.39) escala solamente los valores - sobre la diagonal.

A fin de tomar ventajas sobre el proceso de diagonalización, reconsideremos las ecuaciones de acción del movimiento para vibraciones libres de un sistema no amortiguado con varios grados de libertad, como sigue:

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underline{x}} + \underset{\sim}{k}\underline{x} = \underline{0} \tag{9.41}$$

La premultiplicación de la ec. (9.41) por $\underset{\sim}{X}_m^T$ y la inserción de la matriz identidad, $\underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{X}_m \underset{\sim}{X}_m^{-1}$ antes de $\ddot{\underline{x}}$ y $\underline{x}$ produce:

$$\underset{\sim}{X}_m^T \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{X}_m \underset{\sim}{X}_m^{-1} \ddot{\underline{x}} + \underset{\sim}{X}_m^T \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{X}_m \underset{\sim}{X}_m^{-1} \underline{x} = 0 \tag{9.42}$$

la cual es igual a:

$$\underset{\sim}{M}_p \, \ddot{\underline{x}}_p + \underset{\sim}{k}_p \, \underline{x}_p = \underline{0} \tag{9.43}$$

Los vectores de desplazamiento y aceleración en esta ecuación es-- tan definidos por:

$$\underline{x}_p = \underset{\sim}{X}_m^{-1} \, \underline{x} \tag{9.44}$$

y

$$\ddot{\underline{x}}_p = \underset{\sim}{X}_m^{-1} \, \ddot{\underline{x}} \tag{9.45}$$

De acuerdo con las ecs. (9.37) y (9.39), las matrices generalizadas de masas y rigideces de la ec. (9.43) son ambas diagonales. Los desplazamientos generalizados x_p dados por la ec.(9.44) son llamados "COORDENADAS PRINCIPALES", para las cuales las ecua-- ciones de movimiento (ec. (9.43)) no tienen acoplamiento inercial ni elástico. De la ec. (9.44) encontramos que las coordenadas originales están relacionadas a las coordenadas principales por:

$$\underline{x} = \underset{\sim}{X}_m \, \underline{x}_p \tag{9.46}$$

y de la ec. (9.45), tenemos:

$$\ddot{\underline{x}} = \underset{\sim}{X}_m \, \ddot{\underline{x}}_p \tag{9.47}$$

Recordando la definición de matriz modal dada por la ec. (9.36), vemos que los desplazamientos generalizados $\underline{x}_p$ operan en - la ec. (9.46) como factores de escala sobre las columnas modales - de $\underset{\sim}{X}_m$, para producir los valcres de los desplazamientos reales $\underline{x}$. Así, las coordenadas principales de un sistema de varios grados de libertad son sus modos naturales de vibración.

El problema de eigenvalores, ec. (9.26), puede plantearse de forma más comprensiva expandiendo $\underline{x}_{mi}$, a $\underset{\sim}{X}_m$, obteniéndose:

$$\underset{\sim}{k} \, \underset{\sim}{X}_m = \underset{\sim}{M} \, \underset{\sim}{X}_m \, \underset{\sim}{p}^2 \tag{9.48}$$

El símbolo $\underset{\sim}{p}^2$ de la ec. (9.48) representa una matriz diagonal con los valores de p_i^2 en la diagonal, es decir,

$$\underset{\sim}{p}^2 = \begin{bmatrix} p_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n^2 \end{bmatrix} \tag{9.49}$$

Este arreglo, algunas veces llamado "MATRIZ ESPECTRAL", será referido como la "MATRIZ DE EIGENVALORES", o "MATRIZ DE VALORES CARACTERISTICOS". La matriz $\underset{\sim}{X}_m$ en la ec. (9.48) posmultiplica de tal forma que una columna modal típica $\underline{x}_{mi}$ está escalada por el correspondiente eigenvalor, p_i^2. Premultiplicando la ec. (9.48) -- por $\underset{\sim}{X}_m^T$ y usando las relaciones (9.37) y (9.39) obtenemos:

$$\underset{\sim}{k}_p = \underset{\sim}{M}_p \; \underset{\sim}{p}^2 \tag{9.50}$$

de aquí,

$$k_{pi} = M_{pi} \; p_i^2 \tag{9.51}$$

Así, en coordenadas principales, la i-ésima rigidez principal es igual a la i-ésima masa principal multiplicada por el i-ésimo eigenvalor.

Ya que los vectores modales pueden escalarse arbitrariamente, las coordenadas principales no son únicas. De hecho, hay - un número infinito de arreglos de tales desplazamientos generalizados, pero la elección más común es aquella para la cual la matriz de masas es transformada a la matriz identidad. Establecemos esta condición especificando que M_{pi} en la ec. (9.34) debe ser igual a la unidad, como sigue:

$$\underline{x}_{Ni}^T \; \underset{\sim}{M} \; \underline{x}_{Ni} = M_{pi} = 1 \tag{9.52}$$

en la cual

$$\underline{x}_{Ni} = \frac{\underline{x}_{mi}}{C_i} \tag{9.53}$$

Bajo esta condición, el eigenvector $\underline{x}_{Ni}$ se dice que está "NORMALIZADO" con respecto a la matriz de masas. El valor Ci en - la ec. (9.53) se calcula como:

$$C_i = \pm\sqrt{\underline{x}_{mi}^T \; \underset{\sim}{M} \; \underline{x}_{mi}} = \pm\sqrt{\sum_{j=1}^{n} Xm_{ji} \left(\sum_{k=1}^{n} M_{jk} \; Xm_{ki} \right)} \tag{9.54}$$

Si la matriz de masas es diagonal, esta expresión se convierte en:

$$C_i = \pm \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (M_j \; Xm_{ji}^2)} \tag{9.55}$$

Cuando todos los vectores de la matriz modal estan normalizados de esta manera, cambiamos el subíndice m a N y usamos el símbolo $\underset{\sim}{X}_N$ en lugar de $\underset{\sim}{X}_m$. Entonces, la matriz de masas principal dada por la ec. (9.37) se convierte en:

$$\underset{\sim}{X}_N^T \; \underset{\sim}{M} \; \underset{\sim}{X}_N = \underset{\sim}{M}_p = \underset{\sim}{I} \tag{9.56}$$

Además, la matriz de rigideces principales de las ecs. (9.39) y (9.50), es:

$$\underset{\sim}{X}_N^T \; \underset{\sim}{k} \; \underset{\sim}{X}_N = \underset{\sim}{k}_p = \underset{\sim}{p}^2 \tag{9.57}$$

ó, para el i-ésimo modo:

$$\underline{x}_{Ni} \; \underset{\sim}{k} \; \underline{x}_{Ni} = k_{pi} = p_i^2 \tag{9.58}$$

Así, cuando los eigenvectores están normalizados respecto de $\underset{\sim}{M}$, las rigideces en coordenadas principales son iguales a los eigenvalores. Este arreglo particular de coordenadas principales es conocido como "COORDENADAS NORMALES".

Otra alternativa de las ecuaciones de movimiento (ec. (9.41)), se obtiene premultiplicando por $\underset{\sim}{M}^{-1}$ la ec. (9.41); a estas ecuaciones resultantes se les denomina "ECUACIONES DE ACELERACION",

$$\ddot{\underline{x}} + \underset{\sim}{M}^{-1} \; \underset{\sim}{k} \; \underline{x} = 0 \tag{9.59}$$

Esta ecuación puede transformarse a coordenadas principales sustituyendo la ec. (9.46) para x y la ec. (9.47) para $\ddot{x}$. Además, si premultiplicamos por $\underset{\sim}{X}_m^{-1}$ obtenemos:

$$\ddot{\underline{x}}_p + \underset{\sim}{X}_m^{-1} \; \underset{\sim}{M}^{-1} \; \underset{\sim}{k} \; \underset{\sim}{X}_m \; \underline{x}_p = 0 \tag{9.60}$$

Insertando la matriz identidad $\underset{\sim}{I} = (\underset{\sim}{X}_m^{-1})^T \; \underset{\sim}{X}_m^T$ antes de $\underset{\sim}{k}$, la matriz de coeficientes de la ec. (9.60) se vuelve:

$$\underset{\sim}{X}_m^{-1} \; \underset{\sim}{M}^{-1} \; (\underset{\sim}{X}_m^{-1})^T \; \underset{\sim}{X}_m^T \; \underset{\sim}{k} \; \underset{\sim}{X}_m = \underset{\sim}{M}_p^{-1} \; \underset{\sim}{k}_p = \underset{\sim}{p}^2 \tag{9.61}$$

De aquí, la ecuación matricial para aceleraciones, en coordenadas principales puede escribirse como:

$$\ddot{\underline{x}}_p + \underset{\sim}{p}^2 \; \underline{x}_p = 0 \tag{9.62}$$

9.5.3 DESACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Si expandemos la ec. (9.43) obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} M_{p1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_{p2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{p1} \\ \ddot{x}_{p2} \\ \vdots \\ \ddot{x}_{pn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{p2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \\ \vdots \\ x_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.63}$$

y efectuando operaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} M_{p1}\ddot{x}_{p1} + k_{p1}x_{p1} &= 0 \\ M_{p2}\ddot{x}_{p2} + k_{p2}x_{p2} &= 0 \\ &\vdots \\ M_{pn}\ddot{x}_{pn} + k_{pn}x_{pn} &= 0 \end{aligned} \tag{9.64}$$

Este conjunto de ecuaciones diferenciales resultantes, no tienen acoplamiento inercial ni elástico debido a que las matrices $\underset{\sim}{M}_{p1}$ y $\underset{\sim}{k}_{p1}$ son diagonales. El desacoplamiento de las ecuaciones de movimiento significa que cada ecuación sea independiente una de la otra. Así, el sistema de n grados de libertad se reduce a n sistemas de un grado de libertad (ver Fig. 9.9), los cuales se resuelven en la forma descrita en el capítulo 3.

9.5.4 RESPUESTA DE MODO-NORMAL A CONDICIONES INICIALES

De la ec. (9.62), vemos que una ecuación típica de movimiento para vibraciones libres no amortiguadas en coordenadas normales es:

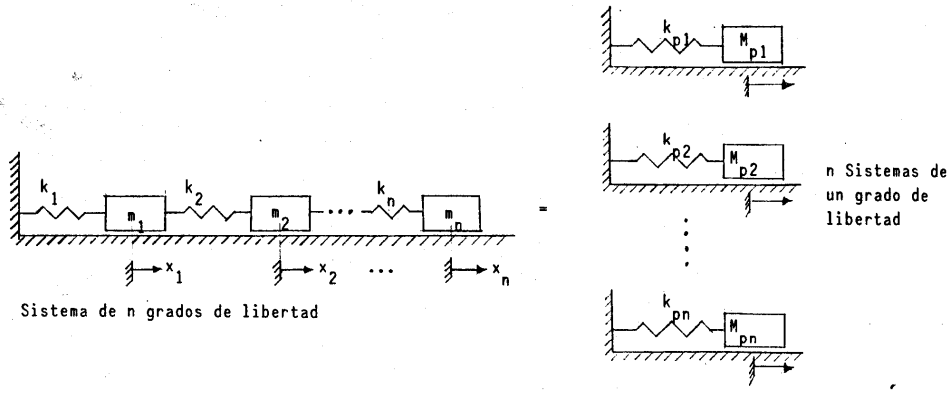


FIG. 9.9

$$\ddot{x}_{pi} + p_i^2 \, x_{pi} = 0 \ , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.65}$$

Como se indicó anteriormente, cada una de estas ecuaciones está desacoplada de todas las otras y hay que resolverlas como si pertenecieran a un sistema de un grado de libertad.

Si las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad son x_{opi} y $\dot{x}_{opi}$ en cada coordenada normal (en t=0), podemos -- calcular la respuesta en vibraciones libres del i-ésimo modo como:

$$x_{pi} = x_{opi} \cos p_i t + \frac{\dot{x}_{opi}}{p_i} \operatorname{sen} p_i t \tag{9.66}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Esta expresión es igual a la ec. (3.13) para un sistema no amortiguado de un grado de libertad.

Usando la ec. (9.44), obtenemos los desplazamientos iniciales en coordenadas normales como sigue:

$$\underline{x}_{op} = \underset{\sim}{X}_N^{-1} \, \underline{x}_o \tag{9.67}$$

Los símbolos $\underline{x}_o$ y $\underline{x}_{op}$ en la ec. (9.67) representan vectores de desplazamientos iniciales en las coordenadas originales y en coordenadas normales, respectivamente. Así,

$$\underline{x}_o = \begin{bmatrix} x_{o1} \\ x_{o2} \\ \vdots \\ x_{on} \end{bmatrix} , \quad \underline{x}_{op} = \begin{bmatrix} x_{op1} \\ x_{op2} \\ \vdots \\ x_{opn} \end{bmatrix} \tag{9.68}$$

Análogamente, las velocidades iniciales del sistema pueden transformarse a coordenadas normales por la operación:

$$\dot{\underline{x}}_{op} = \underset{\sim}{X}_N^{-1} \, \dot{\underline{x}}_o \tag{9.69}$$

donde $\dot{\underline{x}}_o$ y $\dot{\underline{x}}_{op}$ son vectores de velocidades iniciales en coordenadas originales y normales respectivamente. La ec. (9.69) se obtiene derivando con respecto al tiempo la ec. (9.67), y la forma de cada vector velocidad es la misma que la de cada vector desplazamiento en las ecs. (9.68).

Teniendo las condiciones iniciales requeridas en coordenadas normales, podemos aplicar la ec. (9.66) repetitivamente para calcular los términos del vector desplazamiento en modo normal $\underline{x}_p = \{x_{pi}\}$. Estos resultados se transforman otra vez a coordenadas originales, usando la operación dada por la ecuación (9.46):

$$\underline{x} = \underset{\sim}{X}_N \, \underline{x}_p \tag{9.70}$$

Esta misma secuencia de operaciones puede utilizarse si se usan las ecuaciones de desplazamiento en lugar de las ecuaciones de acción.

9.6 MOVIMIENTO FORZADO DE LOS SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD SIN AMORTIGUAMIENTO.

En esta sección, demostraremos que al igual que las vibraciones libres, el movimiento forzado de un sistema de varios grados de libertad puede tambien ser expresado en términos de los modos normales de vibración, y la respuesta total puede ser obteni

da por la superposición de la solución de las ecuaciones modales - independientes. En otras palabras, nuestro objetivo en esta sec-- ción es mostrar que los modos normales pueden ser usados para ---- transformar el sistema de ecuaciones diferenciales asociadas en un arreglo de ecuaciones diferenciales desacopladas en el cual cada e cuación contiene solo una variable dependiente. Así, el "METODO - DE SUPERPOSICION MODAL" reduce el problema de encontrar la respues ta de un sistema de varios grados de libertad, a la determinación de la respuesta de sistemas de un grado de libertad.

9.6.1 METODO DE SUPERPOSICION MODAL

Consideremos de nuevo las ecuaciones de movimiento (9.5), las cuales, para el caso particular de dos grados de libertad son:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 &= Q_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 &= Q_2(t) \end{aligned} \qquad (9.71)$$

Transformaremos este sistema de ecuaciones en un sistema de ecuaciones independientes o desacopladas; para ello, es necesario primero expresar la solución en términos de los modos normales multiplicados por algunos factores, determinando la contribución - de cada modo. En el caso de vibraciones libres, estos factores -- fueron funciones de tiempo senoidales; en este caso, para movimien to forzado, son funciones de tiempo generales, las cuales designaremos como $Z_i(t)$. La solución del sistema (9.71) se supone que es de la forma:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{m11}\, Z_1(t) + x_{m12}\, Z_2(t) \\ x_2(t) &= x_{m21}\, Z_1(t) + x_{m22}\, Z_2(t) \end{aligned} \qquad (9.72)$$

Sustituyendo las ecs. (9.72) en las ecs; (9.71) se obtiene:

$$\begin{aligned} &m_1x_{m11}\ddot{z}_1+(k_1+k_2)x_{m11}z_1-k_2x_{m21}z_1+m_1x_{m12}\ddot{z}_2+ (k_1+k_2)x_{m12}z_2 \\ &-k_2x_{m22}z_2 = Q_1(t) \end{aligned} \qquad (9.73)$$

$$m_2x_{m21}\ddot{z}_1-k_2x_{m11}z_1+k_2x_{m21}z_1+m_2x_{m22}\ddot{z}_2-k_2x_{m12}z_2+$$
$$k_2x_{m22}z_2 = Q_2(t) \qquad (9.73)$$

Para determinar los factores apropidados $Z_1(t)$ y $Z_2(t)$, los cuales desacoplan las ecs. (9.73), es necesario usar las relaciones de ortogonalidad para separar los modos. Multiplicando la primera ec. (9.73) por x_{m11} y la segunda por x_{m21}, y después sumando las ecuaciones resultantes, y por último simplificando la ecuación obtenida mediante el uso de las relaciones de ortogonalidad - ecs. (9.26) y (9.32), nos lleva a:

$$(m_1x_{m11}^2+m_2x_{m21}^2)\ddot{z}_1+p_1^2(m_1x_{m11}^2+m_2x_{m21}^2)z_1 =$$
$$x_{m11}Q_1(t)+x_{m21}Q_2(t) \qquad (9.74)$$

Similarmente, multiplicando al primera ecuación (9.73) por x_{m12} y la segunda por x_{m22}, obtenemos:

$$(m_1x_{m12}^2+m_2x_{m22}^2)\ddot{z}_2+p_2^2(m_1x_{m12}^2+m_2x_{m22}^2)z_2 =$$
$$x_{m12}Q_1(t)+x_{m22}Q_2(t) \qquad (9.75)$$

Desde el punto de vista matemático, lo que hemos hecho - es separar o desasociar, por medio de un cambio de variables, el - sistema original de ecuaciones diferenciales. En consecuencia, cada una de estas ecuaciones, ec. (9.74) ó (9.75), corresponden a un sistema de un grado de libertad el cual puede ser escrito como:

$$M_{p1}\ddot{x}_{p1} + k_{p1}x_{p1} = Q_{p1}$$
$$M_{p2}\ddot{x}_{p2} + k_{p2}x_{p2} = Q_{p2} \qquad (9.76)$$

donde: $\ddot{x}_{p1} = \ddot{z}_1$, $x_{p1} = z_1$, $\ddot{x}_{p2} = \ddot{z}_2$, $x_{p2} = z_2$, son las aceleraciones y los desplazamientos generalizados; $M_{p1} = m_1x_{m11}^2+m_2x_{m21}^2$ y --- $M_{p2} = m_1x_{m12}^2+m_2x_{m22}^2$ son las masas modales; $k_{p1} = p_1^2M_{p1}$ y $k_{p2} = -- p_2^2M_{p2}$ las constantes modales de los resortes; y $Q_{p1} = x_{m11}Q_1(t)+ x_{m21}Q_2(t)$ y $Q_{p2} = x_{m12}Q_1(t)+x_{m22}Q_2(t)$, las fuerzas modales. Alternativamente, si usamos la normalización dada por la ec. (9.53), estas ecuaciones pueden ser escritas simplemente como:

$$\ddot{x}_{p1} + p_1^2 x_{p1} = q_{p1}$$
$$\ddot{x}_{p2} + p_2^2 x_{p2} = q_{p2} \qquad (9.77)$$

donde:
$$q_{p1} = x_{N11} Q_1(t) + x_{N21} Q_2(t)$$
$$q_{p2} = x_{N12} Q_1(t) + x_{N22} Q_2(t) \qquad (9.78)$$

La solución de las ecuaciones diferenciales no asociadas ecs. (9.76) ó (9.77), puede ahora ser encontrada por cualquiera de los métodos presentados en los capítulos anteriores. En particular, la integral de Duhamel dá una solución general para estas ecuaciones independientemente de las funciones que describen las fuerzas actuantes sobre la estructura.

9.6.2 RESPUESTA EN MODO-NORMAL A ACCIONES APLICADAS

Consideremos ahora el caso de un sistema de varios grador de libertad sujeto a acciones aplicadas que corresponden a las coordenadas de desplazamiento. Las ecuaciones de acción del movimiento en forma matricial son:

$$\underset{\sim}{M}\, \underline{\ddot{x}} + \underset{\sim}{k}\, \underline{x} = \underline{Q} \qquad (9.79)$$

donde $\underline{Q}$ representa el vector de fuerzas externas variantes con respecto al tiempo y está dado por:

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ \vdots \\ Q_n(t) \end{bmatrix} \qquad (9.80)$$

La ec. (9.79) se transformará a coordenadas principales premultiplicando ambos lados por $\underset{\sim}{X}_m^T$ y sustituyendo las ecs. (9.46) y (9.47) para $\underline{x}$ y $\underline{\ddot{x}}$, se obtiene:

$$\underset{\sim}{X}_m^T\, \underset{\sim}{M}\, \underset{\sim}{X}_m\, \underline{\ddot{x}}_p + \underset{\sim}{X}_m^T\, \underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{X}_m\, \underline{x}_p = \underset{\sim}{X}_m^T\, \underline{Q} \qquad (9.81)$$

Utilizando las ecs. (9.37) y (9.39), la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\underset{\sim}{M}_p \, \ddot{\underline{x}}_p + \underset{\sim}{k}_p \, \underline{x}_p = \underline{Q}_p \tag{9.82}$$

El símbolo $\underline{Q}_p$ denota un vector de acciones aplicadas en coordenadas normales, el cual es calculado por la operación:

$$\underline{Q}_p = \underset{\sim}{X}_m^T \, \underline{Q} \tag{9.83a}$$

En forma expandida, los resultados de esta multiplicación son:

$$\begin{bmatrix} Q_{p1} \\ Q_{p2} \\ \vdots \\ Q_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{m11}Q_1 + x_{m21}Q_2 + \cdots + x_{mn1}Q_n \\ x_{m12}Q_1 + x_{m22}Q_2 + \cdots + x_{mn2}Q_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_{m1n}Q_1 + x_{m2n}Q_2 + \cdots + x_{mnn}Q_n \end{bmatrix} \tag{9.83b}$$

Si la matriz modal está normalizada con respecto a la matriz de masas, la ec. (9.83a) se convierte en:

$$\underline{Q}_p = \underset{\sim}{X}_N^T \, \underline{Q} \tag{9.84}$$

y la i-ésima ecuación de movimiento en coordenadas normales, toma la forma:

$$\ddot{x}_{pi} + p_i^2 x_{pi} = q_{pi} \ , \ (i=1, 2, \ldots, n) \tag{9.85}$$

donde la i-ésima carga en modo-normal es:

$$q_{pi} = x_{N1i}Q_1 + x_{N2i}Q_2 + \cdots + x_{Nni}Q_n \tag{9.86}$$

El término q_{pi}, constituye una acción aplicada en la i-ésima coordenada normal.

Cada una de las n ecuaciones representadas por la ec. (9.85) está desacoplada de todas las demás, y vemos que tiene la misma forma de la de un sistema de un grado de libertad. Por lo tanto, podemos calcular la respuesta de la i-ésima coordenada para acciones aplicadas, usando la integral de Duhamel, como sigue:

$$x_{pi} = \frac{1}{p_i} \int_0^t q_{pi} \ \text{sen} \ p_i(t-\tau) d\tau \tag{9.87}$$

Esta expresión, también ya fue derivada para un sistema no amortiguado de un grado de libertad que está inicialmente en reposo, y se aplica repetitivamente para calcular los términos del vector desplazamiento de modo normal $x_p = \{x_{pi}\}$. Entonces, los resultados son transformados a las coordenadas originales, usando la ec. (9.70).

En resumen, calculamos la respuesta dinámica de un sistema de varios grados de libertad para acciones aplicadas transformando primero dichas acciones a coordenadas normales, usando la ec. (9.84). Entonces, la respuesta de cada modo vibracional, se obtiene de la integral de la ec. (9.87). Finalmente, los valores de las coordenadas de desplazamiento reales se determinan con la ec. (9.70).

9.7 RESPUESTA EN MODO-NORMAL A MOVIMIENTOS DEL APOYO.

En muchas ocasiones, es necesario determinar la respuesta de un sistema de varios grados de libertad causada por movimiento del apoyo en vez de acciones aplicadas. Por ejemplo, si el terreno de la Fig. 9.10 se traslada en la dirección x, de acuerdo a la función:

$$x_g = F_g(t) \tag{9.88}$$

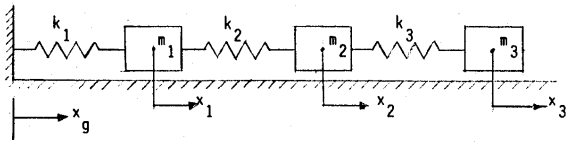


FIG. 9.10 SISTEMA DE TRES GRADOS DE LIBERTAD SUJETO A MOVIMIENTO DEL APOYO.

Las ecuaciones de acción del movimiento pueden escribirse como:

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underline{x}} + \underset{\sim}{k}\underline{x}^* = \underline{0} \tag{9.89}$$

en la cual el vector $\underline{x}^*$ contiene los desplazamientos de las masas relativas a el terreno, como sigue:

$$\underline{x}^* = \underline{x} - \underline{1}x_g \tag{9.90}$$

El vector unitario $\underline{1}$, tiene la finalidad de reproducir - x_g n veces. Este modo de manejar los desplazamientos del terreno es análogo a la técnica usada previamente para sistemas de un grado de libertad. Sin embargo, una aproximación más general consiste en escribir las ecuaciones de movimiento en la forma equivalente:

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underline{x}} + \underset{\sim}{k}\underline{x} + \underline{k}_g x_g = \underline{0} \tag{9.91}$$

donde: $$\underline{k}_g = \underset{\sim}{k}\underline{1} \tag{9.92}$$

El símbolo $\underline{k}_g$ representa un vector de coeficientes de rigidez que se definen como las acciones correspondientes a las coordenadas de desplazamiento libre cuando un valor unitario de x_g es inducido. Tales acciones pueden generarse directamente (por análisis estático del sistema con x_g=1); pero para el caso que estamos considerando, tambien pueden calcularse de la ec. (9.92), la cual muestra -- que son iguales a los negativos de las sumas de los renglones de - la matriz $\underset{\sim}{k}$.

Si arreglamos la ec. (9.91) de igual forma que la ec. -- (9.79), moviendo el producto $\underline{k}_g x_g$ al lado derecho del signo igual, obtenemos:

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underline{x}} + \underset{\sim}{k}\underline{x} = \underline{Q}_g \tag{9.93}$$

donde: $$\underline{Q}_g = -\underline{k}_g x_g = \underset{\sim}{k}\underline{1}x_g \tag{9.94}$$

El vector $\underline{Q}_g$ contiene cargas equivalentes correspondientes a las coordenadas de desplazamiento libre debidas a movimientos del terreno. Tales cargas son transformadas a coordenadas normales por la misma operación de cargas reales. De aquí, de la ec.

(9.84) escribimos:

$$\underline{Q}_{pg} = \underset{\sim}{X}_N^T \, \underline{Q}_g \tag{9.95}$$

La i-ésima ecuación de movimiento en coordenadas normales se convierte en:

$$\ddot{x}_{pi} + p_i^2 x_{pi} = q_{pgi} \ , \ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.96}$$

donde el término q_{pgi} es la acción equivalente en la i-ésima coordenada normal debida a movimiento del terreno. Para calcular la respuesta del i-ésimo modo, usamos la integral de Duhamel, como sigue:

$$x_{pi} = \frac{1}{p_i} \int_0^t q_{pgi} \ \text{sen} \ p_i(t-\tau)d\tau \tag{9.97}$$

Esta ecuación es de la misma forma matemática que la ec. (9.87), pero el término q_{pi} ha sido reemplazado por el término q_{pgi}. Como anteriormente se hizo, los resultados obtenidos de las aplicaciones repetitivas de la ec. (9.97) son transformados a las coordenadas originales por la operación $\underline{x} = \underset{\sim}{X}_N \underline{x}_p$.

Si la aceleración del terreno $\ddot{x}_g$ está especificada (en vez de la traslación x_g) para el sistema de la Fig. 9.10, cambiaremos las coordenadas para los movimientos relativos dados por la ec. (9.90). Las aceleraciones correspondientes a x* son:

$$\underline{\ddot{x}}^* = \underline{\ddot{x}} - \underline{1}\ddot{x}_g \tag{9.98}$$

Sustituyendo $\underline{\ddot{x}}$ de la ec. (9.98) en la ec. (9.89), dá las ecuaciones de movimiento en coordenadas relativas como:

$$\underset{\sim}{M}\underline{\ddot{x}}^* + \underset{\sim}{k}\underline{x}^* = \underline{Q}_g^* \tag{9.99}$$

donde: $$\underline{Q}_g^* = -\underset{\sim}{M}\underline{1}\ddot{x}_g \tag{9.100}$$

Ya que la matriz de masas es diagonal para el sistema de la Fig. 9.10, la forma expandida de $\underline{Q}_g^*$ en este caso particular es:

$$\underline{Q}_g^* = \begin{bmatrix} -m_1\ddot{x}_g \\ -m_2\ddot{x}_g \\ -m_3\ddot{x}_g \end{bmatrix} \tag{9.101}$$

Así, las cargas equivalentes correspondientes a las coordenadas relativas de desplazamiento libre, son iguales a los negativos de las masas por las aceleraciones $\ddot{x}_g$. Teniendo determinadas estas acciones equivalentes, podemos calcular la respuesta del sistema relativa al terreno, usando el vector $\underset{\sim}{Q}^*_g$ en vez de $\underset{\sim}{Q}_g$. Ya que las matrices de coeficientes en la ec. (9.99) son las mismas de la ec. (9.93), puede usarse el mismo operador de transformación $\underset{\sim}{X}_N$ para relacionar las coordenadas relativas a las coordenadas normales.

9.8 EXCITACION ARMONICA FORZADA.

Cuando la excitación de un sistema de varios grados de libertad, se debe a fuerzas externas o movimiento del apoyo de tipo armónico (funciones seno o coseno), el análisis es bastante sencillo y la respuesta puede ser encontrada rápidamente sin el uso del análisis modal. Consideremos el edificio de corte de dos pisos de la Fig. 9.11 sujeto a una fuerza armónica simple $Q=Q_o$sen wt la cual está aplicada a nivel del segundo piso.

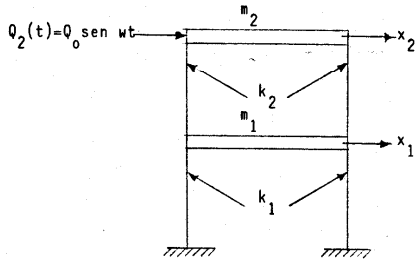


FIG. 9.11

En este caso, las ecs. (9.79) con $Q_1(t)=0$ y $Q_2(t)=Q_o$sen wt, se convierten en:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 &= Q_o\text{sen } wt \end{aligned} \qquad (9.102)$$

Para la respuesta de la parte estacionaria obtenemos una solución de la forma:

$$x_1 = A_1 \text{sen } wt$$
$$x_2 = A_2 \text{sen } wt \qquad (9.103)$$

Después de sustituir la ec. (9.103) en la ec. (9.102) y cancelar el factor común sen wt, obtenemos:

$$(k_1+k_2-m_1w^2)A_1 - k_2A_2 = 0$$
$$-k_2A_1 + (k_2-m_2w^2)A_2 = Q_o \qquad (9.104)$$

el cual es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, A_1 y A_2. Este sistema siempre tiene una única solución excepto en el caso cuando el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas es igual a cero. En este caso, la frecuencia forzada w igualará a una de las frecuencias naturales, ya que este determinante cuando es igualado a cero es precisamente la condición usada para determinar las frecuencias naturales. En otras palabras, a menos que la estructura esté forzada a vibrar a una de las frecuencias resonantes, el sistema algebráico (9.102) tiene una solución única para A_1 y A_2.

9.9 PROBLEMAS RESUELTOS.

P.9.1 Para el sistema mostrado en la Figura P.9.1

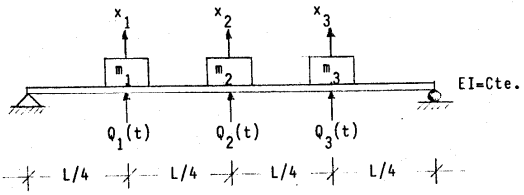


FIG. P.9.1

a) Establecer la matriz de rigideces en forma directa.

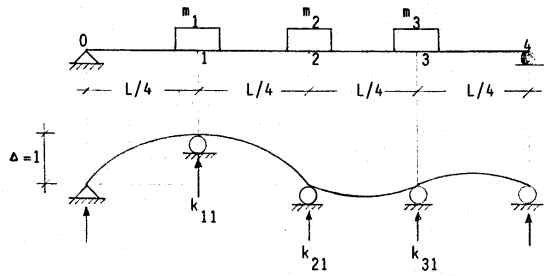
SOLUCION:

Para el cálculo de la matriz de rigideces en forma directa, aplicaremos la ecuación de los tres momentos, la cual expresa una relación general entre los momentos flexionantes en tres puntos cualesquiera de la viga y está dada por:

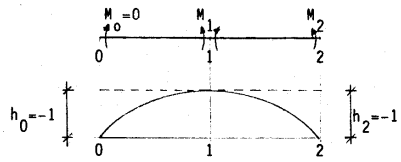
$$M_1L_1+2M_2(L_1+L_2)+M_3L_2+\frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1}+\frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2} = 6EI\left(\frac{h_1}{L_1}+\frac{h_3}{L_2}\right)$$

CALCULO DE k_{11}, k_{21}, k_{31}

Como se vió en la sección 9.3, para determinar las rigideces k_{11}, k_{21} y k_{31} hay que aplicar un desplazamiento unitario en el nudo 1, como se muestra en la siguiente figura:



Tramo 0-2



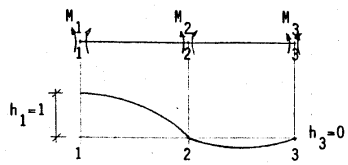
Aplicando la ecuación de los tres momentos a este tramo tenemos:

$$M_oL_o+2M_1(L_o+L_1)+M_2L_1+\frac{6A_o\bar{a}_o}{L_o}+\frac{6A_1\bar{b}_1}{L_1} = 6EI\left(\frac{h_o}{L_o}+\frac{h_2}{L_1}\right) \qquad (a)$$

Los términos $6A_o\bar{a}_o/L_o$ y $6A_1\bar{b}_1/L_1$ son cero debido a que dependen de las condiciones de carga externas y en este caso no existen, además, el momento $M_o=0$ debido a que el apoyo es articulado. Sustituyendo valores se obtiene:

$$4M_1 + M_2 = \frac{-192EI}{L^2} \qquad (b)$$

Tramo 1-3



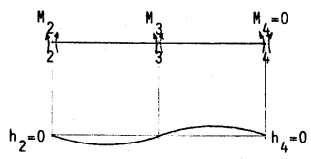
Aplicando la ecuación de los tres momentos:

$$M_1L_1+2M_2(L_1+L_2)+M_3(L_2) = 6EI\left(\frac{h_1}{L_1}+\frac{h_3}{L_2}\right) \qquad (c)$$

Sustituyendo valores y simplificando, obtenemos

$$M_1+4M_2+M_3 = \frac{96EI}{L^2} \qquad (d)$$

Tramo 2-4



Aplicando la ecuación de los tres momentos:

$$M_2L_2+2M_3(L_2+L_3)+M_4L_3 = 6EI\left(\frac{h_2}{L_2}+\frac{h_4}{L_3}\right) \qquad (e)$$

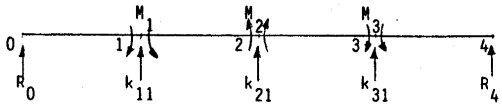
Sustituyendo valores y simplificando, obtenemos

$$M_2+4M_3 = 0 \qquad (f)$$

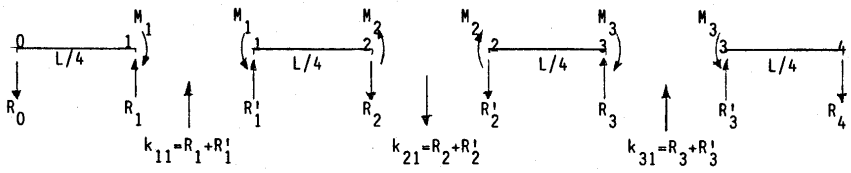
Y resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas formado por las ecuaciones (b), (d) y (f) se obtienen:

$$M_1 = \frac{-408EI}{7L^2}, \quad M_2 = \frac{288EI}{7L^2}, \quad M_3 = \frac{-72EI}{7L^2}$$

Colocando los sentidos correctos de los momentos,



Analizando cada tramo por separado:



Tramo 0-1

$\Sigma F = 0 = R_1 - R_o$ de donde $R_o = R_1$

$\Sigma M = 0 = M_1 - R_1(L/4)$ de donde $R_1 = 4M_1/L$

Sustituyendo el valor absoluto de M_1

$$R_o = R_1 = \frac{1632EI}{7L^3}$$

Tramo 1-2

$\Sigma F = 0 = R'_1 - R_2$ de donde $R'_1 = R_2$

$\Sigma M = 0 = M_1 + M_2 - R_2(L/4)$ de donde $R_2 = 4(M_1+M_2)/L$

Sustituyendo los valores absolutos de M_1 y M_2,

$$R'_1 = R_2 = \frac{2784EI}{7L^3}$$

Tramo 2-3

$\Sigma F = 0 = R_3 - R'_2$ de donde $R'_2 = R_3$

$\Sigma M = 0 = M_2 + M_3 - R_2(L/4)$ de donde $R_2 = 4(M_2+M_3)/L$

Sustituyendo los valores absolutos de M_2 y M_3,

$$R'_2 = R_3 = \frac{1440EI}{7L^3}$$

Tramo 3-4

$\Sigma F = 0 = R_3' - R_4$ de donde $R_3' = R_4$

$\Sigma M = 0 = M_3 - R_4(L/4)$ de donde $R_4 = 4M_3/L$

Sustituyendo el valor absoluto de M_3,

$$R_3' = R_4 = \frac{288EI}{7L^3}$$

Con estos valores determinamos,

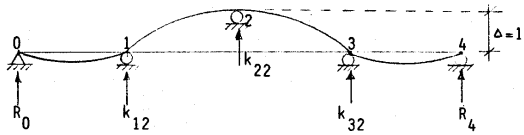
$$k_{11} = R_1 + R_1' = \frac{4416EI}{7L^3}$$

$$k_{21} = R_2 + R_2' = -\frac{4224EI}{7L^3}$$

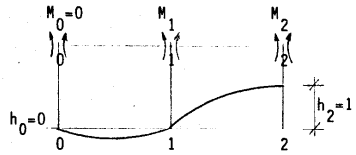
$$k_{31} = R_3 + R_3' = \frac{1728EI}{7L^3}$$

CALCULO DE k_{12}, k_{22} y k_{32}

Dando un desplazamiento unitario en el nudo 2, se obtienen k_{12}, k_{22} y k_{32}.



Tramo 0-2



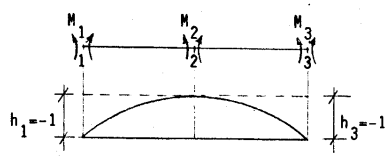
Aplicando la ecuación de los tres momentos, obtenemos

$$M_o L_o + 2M_1(L_o + L_1) + M_2 L_1 = 6EI\left(\frac{h_o}{L_o} + \frac{h_2}{L_1}\right) \qquad (g)$$

Sustituyendo valores y simplificando:

$$4M_1+M_2 = \frac{96EI}{L^2} \qquad (h)$$

Tramo 1-3



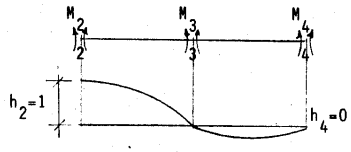
Aplicando la ecuación de los tres momentos, obtenemos:

$$M_1L_1+2M_2(L_1+L_2)+M_3L_2 = 6EI\left(\frac{h_1}{L_1}+\frac{h_3}{L_2}\right) \qquad (i)$$

Sustituyendo valores y simplificando:

$$M_1+4M_2+M_3 = \frac{-192EI}{L^2} \qquad (j)$$

Tramo 2-4



Aplicando la ecuación de los tres momentos, obtenemos:

$$M_2L_2+2M_3(L_2+L_3)+M_4L_3 = 6EI\left(\frac{h_2}{L_2}+\frac{h_4}{L_3}\right) \qquad (k)$$

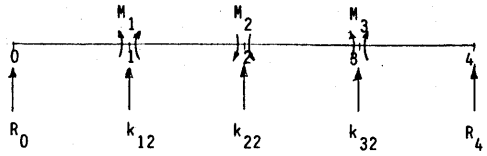
Sustituyendo valores y simplificando:

$$M_2+4M_3 = \frac{96EI}{L^2} \qquad (l)$$

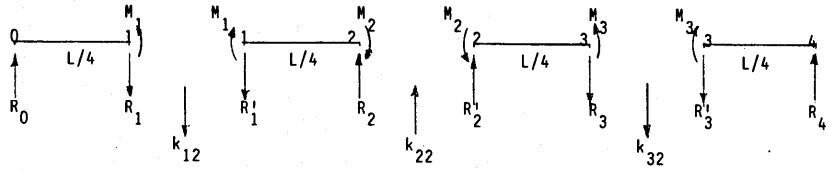
Y resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas formado por las ecs. (h), (j) y (l) se obtienen:

$$M_1 = M_3 = \frac{288EI}{7L^2}, \quad M_2 = \frac{-480EI}{7L^2}$$

Colocando los sentidos correctos de los momentos:



Analizando cada tramo por separado:



Tramo 0-1

$\Sigma F = 0 = R_o - R_1$ de donde $R_o = R_1$

$\Sigma M = 0 = M_1 - R_o(L/4)$ de donde $R_o = 4M_1/L$

Sustituyendo el valor absoluto de M_1

$$R_o = R_1 = \frac{1152EI}{7L^3}$$

Tramo 1-2

$\Sigma F = 0 = R_2 - R'_1$ de donde $R'_1 = R_2$

$\Sigma M = 0 = M_1 + M_2 - R'_1(L/4)$ de donde $R'_1 = 4(M_1+M_2)/L$

Sustituyendo los valores absolutos de M_1 y M_2,

$$R'_1 = R_2 = \frac{3072EI}{7L^3}$$

Tramo 2-3

$\Sigma F = 0 = R'_2 - R_3$ de donde $R'_2 = R_3$

$\Sigma M = 0 = M_2 + M_3 - R_3(L/4)$ de donde $R_3 = 4(M_2+M_3)/L$

Sustituyendo los valores absolutos de M_2 y M_3

$$R'_2 = R_3 = \frac{3072EI}{7L^3}$$

Tramo 3-4

$\Sigma F = 0 = R_4 - R_3'$ de donde $R_3' = R_4$

$\Sigma M = 0 = M_3 - R_4(L/4)$ de donde $R_4 = 4M_3/L$

Sustituyendo el valor absoluto de M_3,

$$R_3' = R_4 = \frac{1152EI}{7L^3}$$

Con estos valores determinamos:

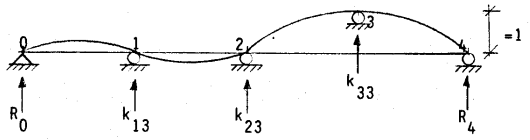
$$k_{12} = R_1 + R_1' = \frac{-4224EI}{7L^3}$$

$$k_{22} = R_2 + R_2' = \frac{6144EI}{7L^3}$$

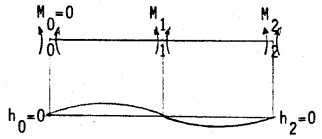
$$k_{32} = R_3 + R_3' = \frac{-4224EI}{7L^3}$$

CALCULO DE k_{13}, k_{23} y k_{33}

Dando un desplazamiento unitario en el nudo 3 se obtienen k_{13}, k_{23} y k_{33}.



Tramo 0-2



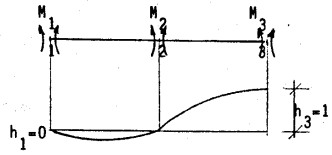
Aplicando la ecuación de los tres momentos:

$$M_o L_o + 2M_1(L_o + L_1) + M_2 L_1 = 6EI\left(\frac{h_o}{L_o} + \frac{h_2}{L_1}\right) \qquad (m)$$

Sustituyendo valores y simplificando:

$$4M_1+M_2 = 0 \qquad (n)$$

Tramo 1-3



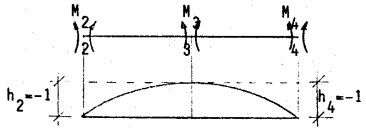
Aplicando la ecuación de los tres momentos obtenemos:

$$M_1L_1+2M_2(L_1+L_2)+M_3L_2 = 6EI\left(\frac{h_1}{L_1}+\frac{h_3}{L_2}\right) \qquad (o)$$

Sustituyendo valores y simplificando:

$$M_1+4M_2+M_3 = \frac{96EI}{L^2} \qquad (p)$$

Tramo 2-4



Aplicando la ecuación de los tres momentos obtenemos:

$$M_2L_2+2M_3(L_2+L_3)+M_4L_3 = 6EI\left(\frac{h_2}{L_2}+\frac{h_4}{L_3}\right) \qquad (q)$$

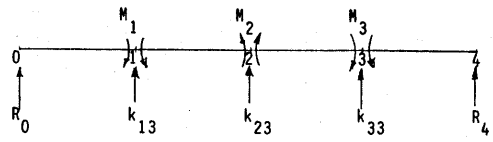
Sustituyendo valores y simpliflicando

$$M_2 + 4M_3 = \frac{-192EI}{L^2} \qquad (r)$$

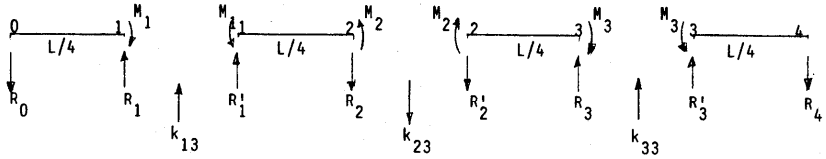
Y resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas formado por las ecs. (n), (p) y (r) se obtienen:

$$M_1 = \frac{-72EI}{7L^2}, \quad M_2 = \frac{288EI}{7L^2}, \quad M_3 = \frac{-408EI}{7L^2}$$

Colocando los sentidos correctos de los momentos:



Analizando cada tramo por separado:



Tramo 0-1

$\Sigma F = 0 = R_1 - R_o$ de donde $R_o = R_1$

$\Sigma M = 0 = M_1 - R_1(L/4)$ de donde $R_1 = 4M_1/L$

Sustituyendo el valor absoluto de M_1

$$R_o = R_1 = \frac{288EI}{7L^3}$$

Tramo 1-2

$\Sigma F = 0 = R'_1 - R_2$ de donde $R'_1 = R_2$

$\Sigma M = 0 = M_1 + M_2 - R_2(L/4)$ de donde $R_2 = 4(M_1+M_2)/L$

Sustituyendo el valor absoluto de M_1 y M_2

$$R'_1 = R_2 = \frac{1440EI}{7L^3}$$

Tramo 2-3

$\Sigma F = 0 = R_3 - R'_2$ de donde $R_3 = R'_2$

$\Sigma M = 0 = M_2 + M_3 - R_3(L/4)$ de donde $R_3 = 4(M_2+M_3)/L$

Sustituyendo los valores absolutos de M_2 y M_3

$$R'_2 = R_3 = \frac{2784EI}{7L^3}$$

Tramo 3-4

$\Sigma F = 0 = R_3' - R_4$ de donde $R_3' = R_4$

$\Sigma M = 0 = M_3 - R_4(L/4)$ de donde $R_4 = 4M_3/L$

Sustituyendo el valor absoluto de M_3

$$R_3' = R_4 = \frac{1632EI}{7L^3}$$

Con estos valores determinamos:

$$k_{13} = R_1 + R_1' = \frac{1728EI}{7L^3}$$

$$k_{23} = R_2 + R_2' = \frac{4224EI}{7L^3}$$

$$k_{33} = R_3 + R_3' = \frac{4416EI}{7L^3}$$

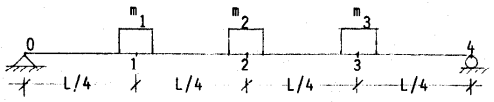
Colocando los valores obtenidos en forma matricial y sacando factor común obtenemos:

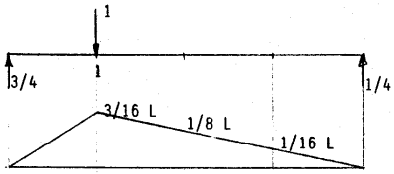
$$\underset{\sim}{k} = \frac{768EI}{L^3}\begin{bmatrix} 23/28 & -22/28 & 9/28 \\ -22/28 & 32/28 & -22/28 \\ 9/28 & -22/28 & 23/28 \end{bmatrix} \qquad \text{RESPUESTA}$$

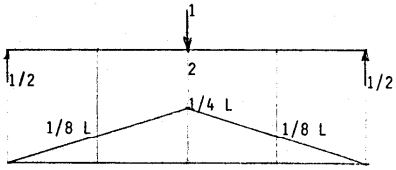
b) Construir la matriz de flexibilidades en forma directa.

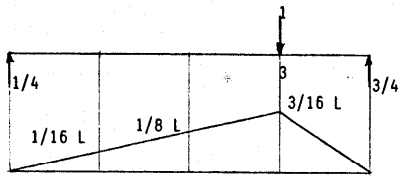
SOLUCION:

Para la determinación de la matriz de flexibilidades -- directa aplicaremos el método de Castigliano.

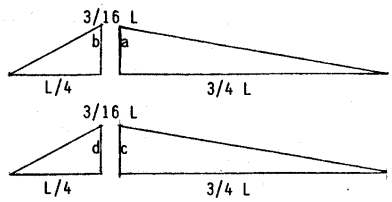






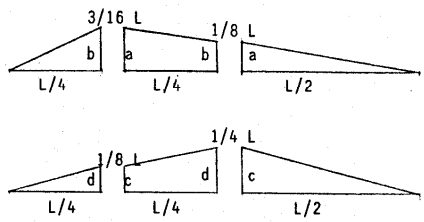


Cálculo de f_{11}:



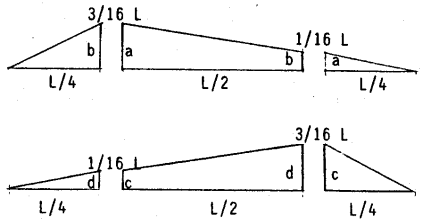
$$f_{11} = \frac{Lbd}{3} + \frac{Lac}{3} = \frac{3L^3}{256EI}$$

Cálculo de f_{21} y f_{12}:



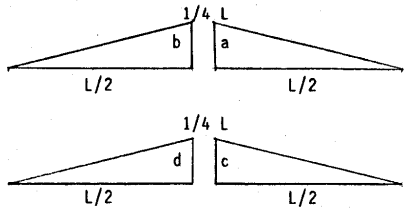
$$f_{21} = f_{12} = \frac{Lbd}{3} + \frac{La(2c+d)}{6} + \frac{Lb(c+2d)}{6} + \frac{Lac}{3} = \frac{11L^3}{768EI}$$

Cálculo de f_{31} y f_{13}



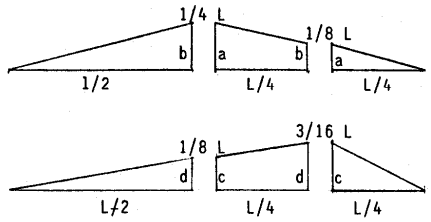
$$f_{31} = f_{13} = \frac{Lbd}{3} + \frac{La(2c+d)}{6} + \frac{Lb(c+2d)}{6} + \frac{Lac}{3} = \frac{7L^3}{768EI}$$

Cálculo de f_{22}:



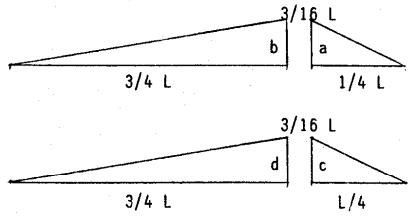
$$f_{22} = \frac{Lbd}{3} + \frac{Lac}{3} = \frac{L^3}{48EI}$$

Cálculo de f_{32} y f_{23}:



$$f_{32} = f_{23} = \frac{Lbd}{3} + \frac{La(2c+d)}{6} + \frac{Lb(c+2d)}{6} + \frac{Lac}{3} = \frac{11L^3}{768EI}$$

Cálculo de f_{33}:



$$f_{33} = \frac{Lbd}{3} + \frac{Lac}{3} = \frac{3L^3}{256EI}$$

Arreglando estos valores obtenidos en forma matricial, - se obtiene la matriz de flexibilidades:

$$\underset{\sim}{F} = \frac{L^3}{768EI}\begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$ RESPUESTA

c) Verificar que la matriz de flexibilidades es la inversa de la de rigideces, usando los resultados anteriores.

SOLUCION:

Para verificar que la matriz de flexibilidades es la inversa de la matriz de rigideces, aplicaremos la relación (9.12) de la sección 9.4:

$$\underset{\sim}{F} \times \underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{I}$$

Sustituyendo los valores de $\underset{\sim}{F}$ y $\underset{\sim}{k}$, y efectuando la multiplicación de las matrices se obtiene la matriz identidad.

$$\frac{L^3}{768EI}\begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \times \frac{768EI}{L^3}\begin{bmatrix} 23/28 & -22/28 & 9/28 \\ -22/28 & 32/28 & -22/28 \\ 9/28 & -22/28 & 23/28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

RESPUESTA

d) Establezca de manera explícita las ecuaciones de acción del movimiento.

SOLUCION:

Para establecer las ecuaciones de acción en forma explícita, primeramente estableceremos la matriz de masas y los vectores fuerza, aceleración y desplazamiento.

$$\underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ Q_3(t) \end{Bmatrix}, \quad \underline{\ddot{x}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo estos valores y la matriz de rigideces en - la ec. (9.79) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \frac{768EI}{L^3} \begin{bmatrix} 23/28 & -22/28 & 9/28 \\ -22/28 & 32/28 & -22/28 \\ 9/28 & -22/28 & 23/28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ Q_3(t) \end{bmatrix}$$

Y efectuando operaciones se obtienen las ecuaciones de acción del movimiento:

$$m_1\ddot{x}_1 + \frac{768EI}{L^3}\left(\frac{23}{28}x_1 - \frac{22}{28}x_2 + \frac{9}{28}x_3\right) = Q_1(t)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + \frac{768EI}{L^3}\left(-\frac{22}{28}x_1 + \frac{32}{28}x_2 - \frac{22}{28}x_3\right) = Q_2(t) \qquad \text{RESPUESTA}$$

$$m_3\ddot{x}_3 + \frac{768EI}{L^3}\left(\frac{9}{28}x_1 - \frac{22}{28}x_2 + \frac{23}{28}x_3\right) = Q_3(t)$$

e) Establezca las ecuaciones de desplazamiento del movimiento.

SOLUCION:

Las ecuaciones de desplazamiento del movimiento se determinan aplicando la siguiente relación:

$$\underset{\sim}{F}\ \underset{\sim}{M}\ \underline{\ddot{x}} + \underline{x} = \underset{\sim}{F}\ \underline{Q}$$

Sustituyendo valores obtenemos:

$$\frac{L^3}{768EI}\begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{L^3}{768EI}\begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ Q_3(t) \end{bmatrix}$$

Por último, efectuando operaciones se determinan las ecuaciones del desplazamiento del movimiento:

$$9m_1\ddot{x}_1 + 11m_2\ddot{x}_2 + 7m_3\ddot{x}_3 + \frac{768EI}{L^3}x_1 = 9Q_1(t) + 11Q_2(t) + 7Q_3(t)$$

$$11m_1\ddot{x}_1 + 16m_2\ddot{x}_2 + 11m_3\ddot{x}_3 + \frac{768EI}{L^3}x_2 = 11Q_1(t) + 16Q_2(t) + 11Q_3(t)$$

$$7m_1\ddot{x}_1 + 11m_2\ddot{x}_2 + 9m_3\ddot{x}_3 + \frac{768EI}{L^3}x_3 = 7Q_1(t) + 11Q_2(t) + 9Q_3(t)$$

RESPUESTA

f) Utilizando las ecuaciones de acción del movimiento determine las frecuencias angulares y los vectores de amplitudes modales correspondientes a los modos naturales de vibrar.

SOLUCION:

Para la determinación de las frecuencias angulares y los vectores de amplitudes modales es necesario seguir el siguiente -- procedimiento:

1° Si definimos que $k = 4224EI/7L^3$, la matriz de rigideces $\underset{\sim}{k}$ en -- función de k es:

$$\underset{\sim}{k} = \begin{bmatrix} (23/22)k & -k & (9/22)k \\ -k & (32/22)k & -k \\ (9/22)k & -k & (23/22)k \end{bmatrix}$$

2° Si sustituímos los valores de m_1, m_2 y m_3 en la matriz de masas $\underset{\sim}{M}$ obtenemos:

$$\underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

3° Cálculo de la matriz característica $\underset{\sim}{H}_i$ con la ec. (9.21)

$$\underset{\sim}{H}_i = \underset{\sim}{k} - p_i^2 \underset{\sim}{M}$$

Sustituyendo los valores de $\underset{\sim}{k}$ y $\underset{\sim}{M}$ en la ecuación anterior,

$$\underset{\sim}{H}_i = \begin{bmatrix} \frac{23k-p_i^2m}{22} & -k & \frac{9\ k}{22} \\ -k & \frac{32k-p_i^2m}{22} & -k \\ \frac{9\ k}{22} & -k & \frac{23k-p_i^2m}{22} \end{bmatrix}$$

4° Para obtener una solución no trivial, se requiere que el determinante de la matriz característica $\underset{\sim}{H}_i$ sea igual a cero, (ver - ec.(9.23)), es decir,

$$|\underset{\sim}{H}_i| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{23}{22}k-p_i^2m & -k & \frac{9}{22}k \\ -k & \frac{32}{22}k-p_i^2m & -k \\ \frac{9}{22}k & -k & \frac{23}{22}k-p_i^2m \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el determinante se obtiene:

$$|H_i| = -p_i^6m^3+\frac{39}{11}kp_i^4m^2-\frac{238}{121}k^2p_i^2m+\frac{98}{1331}k^3 = 0$$

Dividiendo por m^3, multiplicando por (-1) y arreglando la expresión anterior en función de (p_i^2) resulta finalmente la ecuación característica del sistema:

$$(p_i^2)^3 - \frac{39}{11}(k/m)(p_i^2)^2 + \frac{238}{121}(k/m)^2(p_i^2) - \frac{98}{1331}(k/m)^3 = 0 \quad ,$$

5° Resolviendo la ecuación característica por un método numérico - se obtienen los valores característicos (frecuencias angulares),

$$p_1^2 = 0.0402\ \frac{k}{m}$$

$$p_2^2 = 0.6359\ \frac{k}{m} \qquad \text{RESPUESTA}$$

$$p_3^2 = 2.8734\ \frac{k}{m}$$

6° Para la determinación de los vectores de amplitudes modales es necesario primeramente la matriz de cofactores y después obtener la matriz adjunta:

$$|\underset{\sim}{H}_c| = \begin{bmatrix} (\frac{32}{22}k-p_i^2m)(\frac{23}{22}k-p_i^2m)-k^2 & k(\frac{23}{22}k-p_i^2m)-k(\frac{9}{22}k) & k^2-\frac{9}{22}k(\frac{32}{22}k-p_i^2m) \\ k(\frac{23}{22}k-p_i^2m)-k(\frac{9}{22}k) & (\frac{23}{22}k-p_i^2m)^2-(\frac{9}{22}k)^2 & (\frac{23}{22}k-p_i^2m)k-(\frac{9}{22}k)k \\ k^2-(\frac{32}{22}k-p_i^2m)(\frac{9}{22}k) & (\frac{23}{22}k-p_i^2m)k-k(\frac{9}{22}k) & (\frac{23}{22}k-p_i^2m)(\frac{32}{22}k-p_i^2m)-k^2 \end{bmatrix}.$$

Debido a que la matriz de cofactores $\underset{\sim}{H}_c$ es simétrica, se cumple

$$\underset{\sim}{H}_a = \underset{\sim}{H}_c$$

Para $p_1^2 = 0.0402\ \frac{k}{m}$

$$\underset{\sim}{H}_i^a = \begin{bmatrix} 0.4218 & 0.5962 & 0.4214 \\ 0.5962 & 0.8432 & 0.5962 \\ 0.4214 & 0.5962 & 0.4218 \end{bmatrix} k^2$$

Tomando cualquier columna de la matriz adjunta, obtenemos el -- vector de amplitud modal asociado a la primer frecuencia:

$$\underline{x}_{m1} = \begin{bmatrix} 0.4218 \\ 0.5962 \\ 0.4214 \end{bmatrix}$$ RESPUESTA

Para $p_2^2 = 0.6359 \ \frac{k}{m}$

$$\underset{\sim}{H}_i^a = \begin{bmatrix} -0.6647 & 0.0005 & 0.6651 \\ 0.0005 & 0.0004 & 0.0005 \\ 0.6651 & 0.0005 & -0.6647 \end{bmatrix} k^2$$

$$\underline{x}_{m2} = \begin{bmatrix} -0.6647 \\ 0.0005 \\ 0.6651 \end{bmatrix}$$ RESPUESTA

Para $p_3^2 = 2.8734 \ \frac{k}{m}$

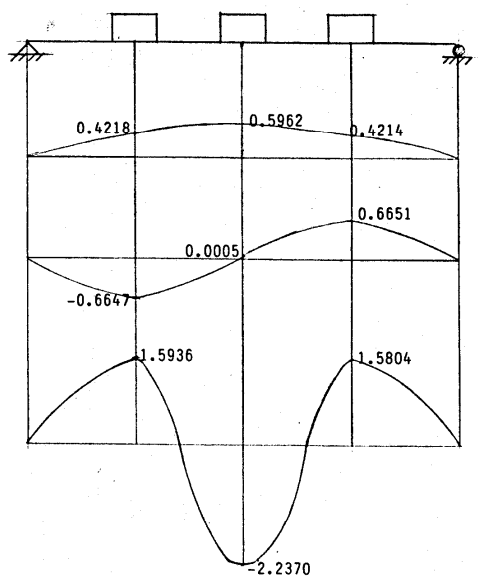
$$\underset{\sim}{H}_3^a = \begin{bmatrix} 1.5936 & -2.2370 & 1.5804 \\ -2.2370 & 3.1740 & -2.2370 \\ 1.5804 & -2.2370 & 1.5936 \end{bmatrix} k^2$$

$$\underline{x}_{m3} = \begin{bmatrix} 1.5936 \\ -2.2370 \\ 1.5804 \end{bmatrix}$$ RESPUESTA

g) Interprete gráficamente los tres modos naturales de - vibrar y comente los resultados obtenidos hasta este punto.

SOLUCION:

Como puede observarse, los tres modos naturales de vi--- brar son completamente distintos. Durante el primer modo, las --- tres masas se desplazan hacia arriba sin cruzar en ningún punto la posición de equilibrio. En el segundo modo, en cambio, la segunda



masa se encuentra casi en la posición de equilibrio y la primera y tercera masas se desplazan en sentido contrario. Por último, en el tercer modo, la primera y tercera masas se desplazan en el mismo sentido y la segunda en sentido contrario.

h) Verificar que se cumplen las ecuaciones (9.32), (9.33) (9.34) y (9.35).

SOLUCION:

$$\underline{x}_{mj}^{T} \underset{\sim}{M} \underline{x}_{mi} = 0 \qquad (\text{si } i \neq j) \qquad (9.32)$$

Considerando i=1, j=2, sustituímos valores y efectuando operaciones se cumple:

$$\{-0.6647,\ 0.0005,\ 0.6651\}\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4218 \\ 0.5962 \\ 0.4214 \end{Bmatrix} = 0$$

RESPUESTA

$$\underline{x}_{mj}^T\ \underset{\sim}{k}\ \underline{x}_{mi} = 0 \qquad (\text{si } i \neq j) \qquad (9.33)$$

Considerando i=3, j=1. Sustituyendo valores y efectuando operaciones se cumple:

$$\{0.4218,\ 0.5962,\ 0.4214\}\ \frac{192EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 23 & -22 & 9 \\ -22 & 32 & -22 \\ 9 & -22 & 23 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.5936 \\ -2.2370 \\ 1.5804 \end{Bmatrix} = 0$$

RESPUESTA

$$\underline{x}_{mi}^T\ \underset{\sim}{M}\ \underline{x}_{mi} = M_{pi} \qquad M_{pi} > 0 \qquad (9.34)$$

Considerando i=1, sustituyendo valores obtenemos:

$$\{0.4218,\ 0.5962,\ 0.4214\}\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4218 \\ 0.5962 \\ 0.4214 \end{Bmatrix} = M_{p1}$$

Efectuando operaciones,

$$M_{p1} = 0.7109 > 0$$

RESPUESTA

$$\underline{x}_{mi}^T\ \underset{\sim}{k}\ \underline{x}_{mi} = k_{pi} \qquad k_{pi} > 0 \qquad (9.35)$$

Considerando i=2, sustituyendo valores obtenemos:

$$\{-0.6647,\ 0.0005,\ 0.6651\}\ \frac{192EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 23 & -22 & 9 \\ -22 & 32 & -22 \\ 9 & -22 & 23 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0.6647 \\ 0.0005 \\ 0.6651 \end{Bmatrix} = k_{p2}$$

Efectuando operaciones:

$$k_{p2} = 339.52\ \frac{EI}{L^3} > 0$$

RESPUESTA

i) Establecer las matrices $\underset{\sim}{X}_m$, $\underset{\sim}{M}_p$ y $\underset{\sim}{k}_p$

Para obtener la matriz modal $\underset{\sim}{X}_m$ aplicaremos la ec. (9.36)

$$\underset{\sim}{X}_m = \begin{bmatrix} 0.4218 & -0.6647 & 1.5936 \\ 0.5962 & 0.0005 & -2.2370 \\ 0.4214 & 0.6651 & 1.5804 \end{bmatrix}$$

RESPUESTA

Para determinar la matriz de masas principal utilizare--

mos la ec. (9.37):

$$\underset{\sim}{M}_p = \underset{\sim}{X}_m^T \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{X}_m$$

Sustituyendo valores:

$$\underset{\sim}{M}_p = \begin{bmatrix} 0.4218 & 0.5962 & 0.4214 \\ -0.6647 & 0.0005 & 0.6651 \\ 1.5936 & -2.2370 & 1.5804 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4218 & -0.6647 & 1.5936 \\ 0.5962 & 0.0005 & -2.2370 \\ 0.4214 & 0.6651 & 1.5804 \end{bmatrix}$$

Efectuando operaciones obtenemos:

$$\underset{\sim}{M}_p = \begin{bmatrix} 0.7109m & 0 & 0 \\ 0 & 0.8842m & 0 \\ 0 & 0 & 10.0414m \end{bmatrix}$$ RESPUESTA

Por último, aplicando la ec. (9.39) obtenemos la matriz de rigideces principal,

$$\underset{\sim}{k}_p = \underset{\sim}{X}_m^T \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{X}_m$$

Sustituyendo valores:

$$\underset{\sim}{k}_p = \begin{bmatrix} 0.4218 & 0.5962 & 0.4214 \\ -0.6647 & 0.0005 & 0.6651 \\ 1.5936 & -2.2370 & 1.5804 \end{bmatrix} \frac{192EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 23 & -22 & 9 \\ -22 & 32 & -22 \\ 9 & -22 & 23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4218 & -0.6647 & 1.5936 \\ 0.5962 & 0.0005 & -2.2370 \\ 0.4214 & 0.6651 & 1.5804 \end{bmatrix}$$

Efectuando operaciones obtenemos:

$$\underset{\sim}{k}_p = \frac{192EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 0.6308 & 0 & 0 \\ 0 & 12.3786 & 0 \\ 0 & 0 & 633.7335 \end{bmatrix}$$ RESPUESTA

j) Calcular cómo varían los desplazamientos en función del tiempo si se tienen en cada una de las masas condiciones iniciales nulas de velocidades y condiciones iniciales no nulas de desplazamientos, es decir, $\dot{x}_o = 0$, y:

$$\underline{x}_o = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

SOLUCION:

Primeramente, normalizaremos los vectores $\underline{x}_{mi}$ aplicando la ec. (9.55),

$$C_1 = \pm\sqrt{(0.4218)^2 m + (0.5962)^2 m + (0.4214)^2 m} = 0.843\sqrt{m}$$
$$C_2 = \pm\sqrt{(-0.6647)^2 m + (0.0005)^2 m + (0.6651)^2 m} = 0.94\sqrt{m}$$
$$C_3 = \pm\sqrt{(1.5936)^2 m + (-2.2370)^2 m + (1.5804)^2 m} = 3.169\sqrt{m}$$

Dividiendo cada vector $\underline{x}_{mi}$ entre C_i se determinan los -- vectores $\underline{x}_{ni}$, y estos vectores normalizados forman la matriz modal normalizada $\underset{\sim}{X}_N$:

$$\underset{\sim}{X}_N = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.500 & -0.707 & 0.503 \\ 0.707 & 0.0005 & -0.706 \\ 0.500 & 0.707 & 0.499 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa de $\underset{\sim}{X}_N$ es igual a:

$$\underset{\sim}{X}_N^{-1} = \sqrt{m} \begin{bmatrix} 0.4985 & 0.7091 & 0.4985 \\ -0.7055 & -0.0018 & 0.7085 \\ 0.5000 & -0.7070 & 0.500 \end{bmatrix}$$

Para obtener los desplazamientos iniciales en coordena-- das normales aplicaremos la ec. (9.67),

$$\underline{x}_{op} = \underset{\sim}{X}_N^{-1} \underline{x}_o = \sqrt{m} \begin{bmatrix} 0.4985 & 0.7091 & 0.4985 \\ -0.7055 & -0.0018 & 0.7085 \\ 0.500 & -0.707 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Efectuando operaciones:

$$\underline{x}_{op} = \begin{bmatrix} 0.4985\sqrt{m}\, a_1 + 0.7091\sqrt{m}\, a_2 + 0.4985\sqrt{m}\, a_3 \\ -0.7055\sqrt{m}\, a_1 - 0.0018\sqrt{m}\, a_2 + 0.7085\sqrt{m}\, a_3 \\ 0.5000\sqrt{m}\, a_1 - 0.7070\sqrt{m}\, a_2 + 0.5000\sqrt{m}\, a_3 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ec. (9.66) repetitivamente obtenemos los -- términos del vector desplazamientos en modo normal, es decir,

$$\underline{x}_p = \sqrt{m} \begin{bmatrix} (0.4985a_1 + 0.7091a_2 + 0.4985a_3)\cos p_i t \\ (-0.7055a_1 - 0.0018a_2 + 0.7085a_3)\cos p_i t \\ (0.5000a_1 - 0.7070a_2 + 0.5000a_3)\cos p_i t \end{bmatrix}$$

para i = 1, 2, 3.

Para transformar estos resultados otra vez a coordenadas originales utilizaremos la ec. (9.70),

$$\underline{x} = \underset{\sim}{X}_N \underline{x}_p = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.500 & -0.707 & 0.503 \\ 0.707 & 0.0005 & -0.706 \\ 0.500 & 0.707 & 0.499 \end{bmatrix} \sqrt{m} \begin{bmatrix} (0.4985a_1+0.7091a_2+0.4985a_3)\cos p_i t \\ (-0.7055a_1-0.0018a_2+0.7085a_3)\cos p_i t \\ (0.5000a_1-0.7070a_2+0.5000a_3)\cos p_i t \end{bmatrix}$$

Efectuando operaciones:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} (0.99954a_1 + 0.00020a_2 - 0.00016a_3)\cos p_i t \\ (-0.00093a_1 + 1.00047a_2 - 0.00018a_3)\cos p_i t \\ (-0.00004a_1 + 0.00048a_2 + 0.99966a_3)\cos p_i t \end{bmatrix}$$

RESPUESTA

P.9.2 Para el marco rígido de acero de la Fig. P.9.2, determinar:

a) Las frecuencias naturales

b) Los modos naturales de vibrar

Los pesos de los pisos y paredes están indicados en la Figura y se supone que incluyen el peso de la estructura. El edificio consiste de una serie de marcos espaciados a 15 pies. Se supone que las propiedades estructurales son uniformes a lo largo de la longitud del edificio y, por consiguiente, el análisis será hecho para un marco interior que representa la respuesta del edificio completo.

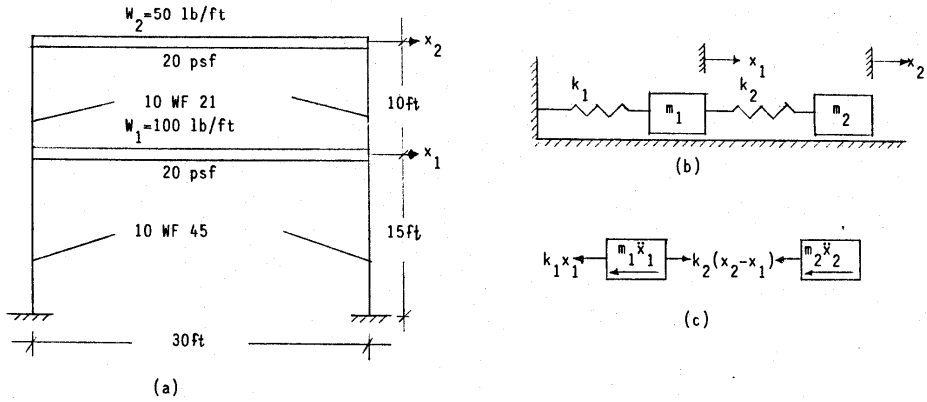


FIG. P.9.2

SOLUCION:

Como se demostró anteriormente, este edificio de cortante puede representarse por medio del sistema masa-resorte de la -- Fig. P.9.2b. Las masas concentradas debidas al peso total de los pisos y los muros tributarios se calculan de la siguiente manera:

$$W_1 = (100)(30)(15)+(20)(12.5)(15)(2) = 52\ 500 \text{ lb}$$

$$m_1 = \frac{52\ 500}{(32.2)(12)} = 135.87 \text{ lb-s}^2/\text{in}$$

$$W_2 = (50)(30)(15)+(20)(5)(15)(2) = 25\ 500 \text{ lb}$$

$$m_2 = \frac{25\ 500}{(32.2)(12)} = 66.0 \text{ lb-s}^2/\text{in}$$

Debido a que se supone que las trabes son rígidas, la rigidez de cada piso está dada por:

$$k = \frac{12E(2I)}{L^3}$$

y los valores individuales para las secciones de las columnas de acero indicadas son:

$$k_1 = \frac{12(30\text{x}10^6)(248.2\text{x}2)}{(15\text{x}12)^3} = 30\ 641.98 \text{ lb/in}$$

$$k_2 = \frac{12(30\text{x}10^6)(106.3\text{x}2)}{(10\text{x}12)^3} = 44\ 291.67 \text{ lb/in}$$

Las ecuaciones de movimiento para este sistema en vibración libre se obtienen con la ayuda de la Fig. P.9.2c como:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2-x_1) &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2-x_1) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

y la solución para estas ecuaciones se supone de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{m1}\text{sen}(pt+\emptyset) \\ x_2 &= x_{m2}\text{sen}(pt+\emptyset) \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

Sustituyendo las ecuaciones (b) y sus derivadas en la -- ec. (a) y colocando los resultados obtenidos en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2-p^2m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-p^2m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (c)$$

a) Para obtener una solución no trivial, haremos el determinante de la matriz de coeficientes igual a cero, es decir,

$$\begin{vmatrix} k_1+k_2-p^2m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-p^2m_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (d)$$

El desarrollo de este determinante dá una ecuación cuadrática en p^2,

$$m_1m_2(p^2)^2-((k_1+k_2)m_2+m_1k_2)p^2+k_1k_2 = 0 \qquad (e)$$

Introduciendo valores numéricos,

$$8\ 967.42(p^2)^2 - 10\ 963\ 530.10\ P^2 + 1.357\text{x}10^9 = 0 \qquad (f)$$

Aplicando la fórmula general, obtenemos las raíces de esta ecuación como:

$$p_1^2 = 139.75$$

$$p_2^2 = 1\ 082.85$$

Por consiguiente, las frecuencias naturales de la estructura son:

$$p_1 = 11.82 \text{ rad/seg}$$

$$p_2 = 32.91 \text{ rad/seg}$$ RESPUESTA

ó en ciclos por segundo

$$f_1 = 1.88 \text{ cps}$$

$$f_2 = 5.24 \text{ cps}$$

y los correspondientes períodos naturales son:

$$T_1 = 1/f_1 = 0.532 \text{ s}$$

$$T_2 = 1/f_2 = 0.191 \text{ s}$$

b) Al igualar el determinante a cero (ec.(d)) el número de ecuaciones independientes del sistema (c) es una menos, es decir, el sistema se reduce a una ecuación independiente. Considerando la primera ecuación del sistema (c) y sustituyendo la primera frecuencia natural, p_1=11.82 rad/seg, obtenemos

$$55\ 950.93x_{m1,1} - 44\ 291.67x_{m2,1} = 0 \qquad (g)$$

El segundo subíndice en x_{m1} y x_{m2} indica que se usó p_1. Debido a que tenemos dos incógnitas y una sola ecuación independiente, la ec. (g) se resuelve solo para el valor relativo de $x_{m2,1}$ a $x_{m1,1}$.

$$\frac{x_{m2,1}}{x_{m1,1}} = 1.263$$

Este valor relativo es el modo natural correspondiente a la primera frecuencia. Es costumbre darle un valor unitario a una de las amplitudes; así, para el primer modo haremos $x_{m1,1} = 1$ y obtenemos

$$x_{m1,1} = 1$$

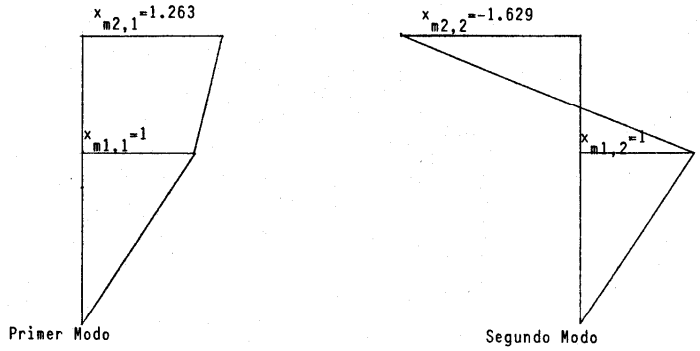
$$x_{m2,2} = 1.263 \qquad \text{RESPUESTA}$$

En forma similar, sustituyendo la segunda frecuencia natural p_2 en (c), obtenemos el segundo modo natural como:

$$x_{m1,2} = 1$$

$$x_{m2,2} = -1.629 \qquad \text{RESPUESTA}$$

Ilustrando gráficamente los modos naturales de vibrar, tenemos:



P.9.3 Para el edificio de cortante del Problema Resuelto P.9.2, determinar las formas modales normalizadas y verificar la condición de ortogonalidad entre modos.

SOLUCION:

Primeramente, calcularemos el factor de normalización dado por la ec. (9.54):

$$C_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (m_j x_{mji}^2)}$$

Sustituyendo los valores numéricos de las masas y los modos naturales de vibración calculados en el Problema P.9.2, obtenemos:

$$C_1 = \sqrt{135.87(1)^2 + 66(1.263)^2} = 15.53$$

$$C_2 = \sqrt{135.87(1)^2 + 66(-1.629)^2} = 17.64$$

Ahora, aplicando la ec. (9.53) se obtienen las formas modales normalizadas,

$$\underset{\sim}{x}_{Ni} = \frac{x_{mi}}{C_i}$$

$$x_{N1,1} = 1/15.53 = 0.06439$$

$$x_{N2,1} = 1.263/15.53 = 0.08133$$

$$x_{N1,2} = 1/17.64 = 0.05669$$

$$x_{N2,2} = -1.629/17.64 = -0.09235$$

Por lo tanto la matriz modal normalizada para este caso es,

$$\underset{\sim}{X}_N \quad \begin{bmatrix} 0.06439 & 0.05669 \\ 0.08133 & -0.09235 \end{bmatrix} \qquad \text{RESPUESTA}$$

Para verificar la condición de ortogonalidad entre los modos aplicaremos la ec. (9.56),

$$\underset{\sim}{X}_N^T \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{X}_N = \underset{\sim}{M}_p = \underset{\sim}{I}$$

$$\begin{bmatrix} 0.06439 & 0.08133 \\ 0.05669 & -0.09235 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 135.87 & 0 \\ 0 & 66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.06439 & 0.05669 \\ 0.08133 & -0.09235 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{RESPUESTA}$$

P.9.4 El marco del ejemplo P.9.2 está excitado a nivel de los entrepisos por las fuerzas triangulares impulsivas mostradas en la Fig. P.9.4b. Para este marco, determine los desplazamientos máximos de piso y las fuerzas cortantes máximas en las columnas.

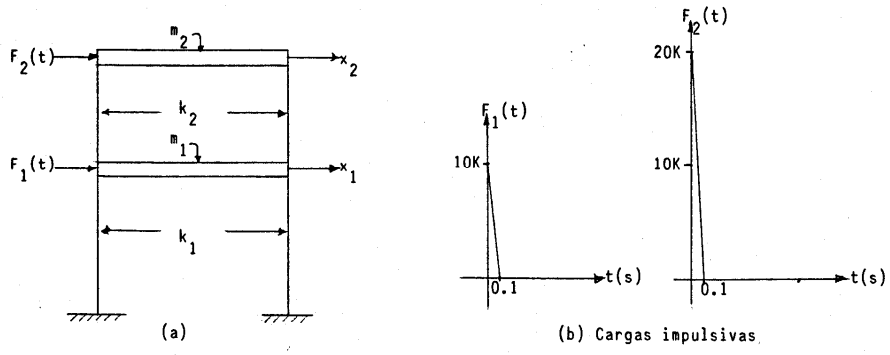


FIG. P.9.4

SOLUCION:

Los resultados obtenidos en los Problemas P.9.2 y P.9.3, para vibración libre de este marco dan los siguientes valores para las frecuencias naturales y los modos normalizados:

$p_1 = 11.82$ rad/s $\qquad p_2 = 32.91$ rad/s

$x_{N1,1} = 0.06439 \qquad x_{N1,2} = 0.05669$

$x_{N2,1} = 0.08133 \qquad x_{N2,2} = -0.09235$

Las fuerzas actuantes pueden expresarse como:

$$F_1(t) = 10\ 000(1-t/t_d) = 10\ 000\ f(t)\ \text{lb}$$
$$F_2(t) = 20\ 000(1-t/t_d) = 20\ 000\ f(t)\ \text{lb} \qquad \text{para } t \leqslant 0.1 \text{ s}$$

y $\quad F_1(t) = F_2(t) = 0 \qquad$ para $t > 0.1$ s

donde $\quad t_d = 0.1$ s

La sustitución de estos valores dentro de las ecuaciones desacopladas de movimiento, ec. (9.77) da,

$$\ddot{x}_{p1} + 139.71\ x_{p1} = 2\ 270.50\ f(t)$$

$$\ddot{x}_{p2} + 1\ 083.07\ x_{p2} = -1\ 280.10\ f(t)$$

donde las fuerzas normalizadas se determinan con las ecs. (9.78)

$$f_{p1} = (0.06439x10000+0.08133x20000)f(t) = 2270.50\ f(t)$$

$$f_{p2} = (0.05669x10000-0.09235x20000)f(t) = 1280.10\ f(t)$$

Los valores máximos para x_{p1} y x_{p2} son obtenidos de la carta de espectros de la Fig. 8.7. Para este ejemplo,

$$t_d/T_1 = 0.1/0.532 = 0.188$$

$$t_d/T_2 = 0.1/0.191 = 0.524$$

Entrando con estos valores a la carta de espectros, obtenemos:

$$(DLF)_1 máx = \frac{x_{p1} máx}{x_{p1} est} = 0.590$$

$$(DLF)_2 máx = \frac{x_{p2} máx}{x_{p2} est} = 1.22$$

En este caso, las deflexiones estáticas son:

$$x_{p1} est = \frac{F_{o1}}{p_1^2} = \frac{2270.50}{(11.82)^2} = 16.25 \text{ in}$$

$$x_{p2} est = \frac{F_{o2}}{p_2^2} = \frac{1280.10}{(32.91)^2} = 1.18 \text{ in}$$

Y la respuesta modal máxima es:

$$x_{p1} máx = (0.590)(16.25) = 9.59 \text{ in}$$

$$x_{p2} máx = (1.22)(1.18) = 1.44 \text{ in}$$

Estos valores modales máximos no ocurren simultáneamente y por lo tanto no pueden ser simplemente superpuestos para obtener la respuesta máxima del sistema. Sin embargo, una estimación aceptable de la respuesta máxima puede obtenerse de la raíz cuadrada -

de la suma de las contribuciones modales,

$$x_1 máx = \sqrt{(x_{N11}x_{p1}máx)^2+(x_{N12}x_{p2}máx)^2}$$

$$= \sqrt{(0.06439x9.59)^2+(0.05669x1.44)^2}$$

$$x_1 máx = 0.62 \text{ in}$$ RESPUESTA

$$x_2 máx = \sqrt{(x_{N21}x_{p1}máx)^2+(x_{N22}x_{p2}máx)^2}$$

$$= \sqrt{(0.08133x9.59)^2+(-0.09235x1.44)^2}$$

$$x_2 máx = 0.79 \text{ in}$$ RESPUESTA

La máxima fuerza cortante en las columnas está dada por:

$$V_{máx} = \frac{12EI\Delta x}{L^3}$$

en la cual Δx es la diferencia entre los desplazamientos en los -- dos extremos de la columna. Sin embargo, cuando se calculan los - desplazamientos absolutos como en este caso, Δx debe ser calculado como la suma de los desplazamientos absolutos en los extremos de - las columnas.

$$V_1 máx = \frac{12(30x10^6)(248.6)(0.62)}{(15x12)^3} = 9514.32 \text{ lb}$$ RESPUESTA

$$V_2 máx = \frac{12(30x10^6)(106.3)(1.41)}{(10x12)^3} = 31\ 225.62 \text{ lb}$$ RESPUESTA

P.9.5 Determinar la respuesta del marco de la Fig. P.9.5 cuando está sujeto a una aceleración constante súbitamente aplicada $\ddot{x}_s = 0.28g$ en su base.

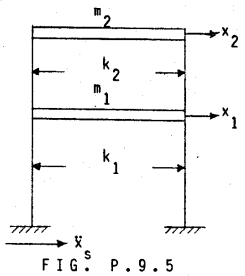


FIG. P.9.5

SOLUCION:

$$\ddot{x}_s = 0.28(32.2x12) = 108.19 \text{ in/s}^2$$

La ecuación del movimiento en coordenadas relativas es:

$$\underset{\sim}{M}\underline{\ddot{x}}^* + \underset{\sim}{k}\underline{x}^* = \underline{Q}_g^* \qquad \text{(a)}$$

donde:

$$\underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} 135.87 & 0 \\ 0 & 66.0 \end{bmatrix} \; ; \; \underset{\sim}{k} = \begin{bmatrix} 74\ 933.65 & -44\ 291.67 \\ -44\ 291.67 & 44\ 291.67 \end{bmatrix}$$

y de acuerdo a la ec. (9.100):

$$\underline{Q}_g^* = - \underset{\sim}{M}\ \underline{1}\ \ddot{x}_s = \begin{bmatrix} -14\ 699.78 \\ -\ 7\ 140.54 \end{bmatrix}$$

Estas cargas equivalentes son transformadas a coordenadas normales aplicando la ec. (9.95) y sustituyendo Q_g por Q_g^*, obteniendo:

$$\underline{Q}_{pg}^* = \underset{\sim}{X}_N^T\ \underline{Q}_g^* \qquad \text{(b)}$$

Del Problema P.9.3, tenemos que:

$$\underset{\sim}{X}_N^T = \begin{bmatrix} 0.06439 & 0.08133 \\ 0.05669 & -0.09235 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo $\underset{\sim}{X}_N^T$ en la ec. (b),

$$\underline{Q}_{pg}^* = \begin{bmatrix} 0.06439 & 0.08133 \\ 0.05669 & -0.09235 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14\ 699.78 \\ -\ 7\ 140.54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\ 527.26 \\ -\ 173.90 \end{bmatrix}$$

Entonces, las ecuaciones de movimiento en coordenadas normales de acuerdo a la ec. (9.96) son:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{p1} + 139.75\ x_{p1} &= -\ 1527.26 \\ \ddot{x}_{p2} + 1082.85\ x_{p2} &= -\ 173.90 \end{aligned} \qquad \text{(c)}$$

Estas ecuaciones, debido a que estan desacopladas pueden resoverse en forma independiente como si se tratara de sistemas de un grado de libertad, para ello, aplicando la ec. (9.97) obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$x_{p1} = \frac{1}{11.82}\int_0^t (-1527.26)\text{sen } 11.82(t-\tau)d\tau$$

$$x_{p2} = \frac{1}{32.91}\int_0^t (-173.90)\text{sen } 32.91(t-\tau)d\tau \qquad \text{(d)}$$

$$x_{p1} = -10.93(1-\cos 11.82t)$$

$$x_{p2} = -0.16(1-\cos 32.91t) \qquad \text{(e)}$$

Y por último, aplicando la ec. (9.70), se obtienen los - desplazamientos en las coordenadas originales,

$$\underline{x} = \underset{\sim}{X}_N \underline{x}_p = \begin{bmatrix} 0.06439 & 0.05669 \\ 0.08133 & -0.09235 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10.93(1-\cos 11.82t) \\ -0.16(1-\cos 32.91t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7129+0.7038\cos 11.82t+0.0091\cos 32.91t \\ -0.8741+0.8889\cos 11.82t-o.0148\cos 32.91t \end{bmatrix}$$

RESPUESTA

P.9.6 Determinar la respuesta de la parte estacionaria - del edificio del problema P.9.2, cuando una fuerza $F_2(t)$=10 000sen 20t es aplicada al segundo piso, como se muestra en la Fig. P.9.6.

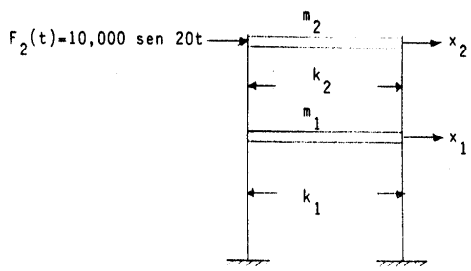


FIG. P.9.6

SOLUCION:

Las frecuencias naturales para este marco fueron determinadas en el problema P.9.2 como:

p_1 = 11.82 rad/s, p_2 = 32.91 rad/s

Ya que la frecuencia forzante es w = 20 rad/s, el sistema no está en resonancia. La respuesta de la parte estacionaria se obtiene resolviendo las ecs. (9.104) para x_1 y x_2; sustituyendo valores numéricos tenemos:

$$(74\ 993.65-135.87x20^2)A_1-44\ 291.67A_2 = 0$$

$$-44\ 291.67A_1+(44\ 291.67-66.0x20^2)A_2 = 10\ 000$$

Efectuando operaciones:

$$20\ 585.65A_1 - 44\ 291.67A_2 = 0$$

$$-44\ 291.67A_1 + 17\ 891.67A_2 = 10\ 000$$

Y resolviendo el sistema obtenemos:

$$A_1 = -0.2780 \text{ in}$$

$$A_2 = -0.1292 \text{ in}$$

Sin embargo, de acuerdo a la ec. (9.103), la respuesta de la parte estacionaria es:

$$x_1 = -0.2780 \text{ sen } 20\ t$$

$$x_2 = -0.1292 \text{ sen } 20\ t$$

RESPUESTA

A B R E V I A T U R A S

cps	ciclos por segundo
cte.	constante
din.	dinámico-a
ec.	ecuación
est., st.	estático-a
fig.	figura
ft	pie
HZ	Hertz
in, pulg.	pulgada
Kip, K	Kilolibra
KSI	Kilolibra por pulgada cuadrada
lb	libra
máx.	máximo-a
mín.	mínimo-a
pág.	página
PSF	Libras por pie cuadrado
rad	radianes
rpm	revoluciones por minuto
seg., s	segundo

B I B L I O G R A F I A

1.- TIMOSHENKO, S.
YOUNG, D. H.
WEAVER Jr., W
"VIBRATION PROBLEMS IN ENGINEERING"
Fourth Edition
John Wiley & Sons, Inc., 1974.

2.- PAZ, MARIO
"STRUCTURAL DYNAMICS, THEORY AND COMPUTATION"
Van Nostrand Reinhold Company.

3.- CLOUGH, RAY W.
PENZIEN, JOSEPH
"DYNAMICS OF STRUCTURES"
MC. Graw-Hill Book Company, 1975.

4.- CRAIGH Jr., ROY R.
"STRUCTURAL DYNAMICS, AN INTRODUCTION TO COMPUTER METHODS"
John Wiley & Sons, Inc., 1981.

5.- BIGGS, JOHN M.
"INTRODUCTION TO STRUCTURAL DYNAMICS"
MC. Graw-Hill, Inc., 1964.

6.- MEIROVITCH, LEONARD
"ELEMENTS OF VIBRATION ANALYSIS"
MC. Graw-Hill Book Company.

7.- NORRIS, CHARLES H.
HANSEN, ROBERT J.
HOLLEY Jr., MYLE J.
BIGGS, JOHN M.
NAMYET, SAUL
MINAMI, JOHN K.
"STRUCTURAL DESIGN FOR DYNAMIC LOADS"
MC. Graw-Hill Book Company, Inc., -- 1959.

8.- MEIROVITCH, LEONARD
"ANALYTICAL METHODS IN VIBRATIONS"
The MacMillan Company, 1969.

9.- SETO, WILLIAM W.
"VIBRACIONES MECANICAS"
MC. Graw-Hill.

10.- WARBURTON, G. B.
"THE DINAMICAL BEHAVIOUR OF STRUCTU-- RES", Second Edition
Pergamon Press Ltd., 1976.

11.- BLEVINS, ROBERT D.
"FORMULAS FOR NATURAL FREQUENCY AND - MODE SHAPE"
Van Nostrand Reinhold Company.

12.- JACOBSEN, LIDIK S.
AYRE, ROBERT S.
"ENGINEERING VIBRATIONS"
MC. Graw-Hill Book Company, Inc., -- 1958.