

# ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

## Problemas resueltos

Edición revisada



**David Ortiz Soto**

## ACERCA DEL AUTOR



**David Ortiz Soto** es ingeniero civil egresado de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Facultad de Estudios Superiores Aragón (FES Aragón), con créditos concluidos en la Maestría en Ingeniería Civil, área disciplinaria de Estructuras, por la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación (SEPI) de la Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Unidad Zacatenco (ESIA-UZ), del Instituto Politécnico Nacional (IPN).

Actualmente desarrolla su tesis de Maestría denominada *“Los efectos de la deformación del Creep en columnas de concreto”*, siendo el Dr. Ernesto Pineda León el director de la misma.

El Ing. David Ortiz es autor, con los ingenieros Hugo Martínez, Sergio Omar Berruecos, Daniel Hernández, etc., del libro *“Estructuras Isostáticas en 2D: Problemas Resueltos”*, el cual presentó oficialmente por primer vez en el evento Simposio de Investigación en Sistemas Constructivos, Computacionales y Arquitectónicos (SISCCA) 2014 con sede en la Universidad Juárez del Estado de Durango, FICA. De igual forma, es autor del libro *“Resolución de Armaduras en 2D con el método matricial de la rigidez”* y es uno de los editores de la WEB de Ingeniería Civil más importante de América Latina llamada *“CivilGeeks”*, en la que ha escrito diversos artículos. Estuvo como invitado de honor en el quinto aniversario del ITI III, donde ofreció conferencia de *“Análisis Estructural”*. Así mismo, es uno de los creadores de la Biblioteca que lleva por nombre *“Probleuario de Análisis de Estructuras en 2D y 3D”*.

Hoy en día, es el representante de la comunidad estudiantil de posgrado de ESIA Zacatenco.

Ha sido invitado varias veces al Programa de Radio *“Ingenio Civil”* de Nuestra Voz Radio: ¡La Voz del Pueblo Organizado!; en alguna emisión de tal programa, alternó con el Ph. D. Genner Villarreal Castro.

Muchos años vivió en Zumpango, pero actualmente radica en Tecámac, ambos municipios del Estado de México, colindantes con el D. F.

# **ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS**

## **Problemas resueltos**



---

# **ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS**

## **Problemas resueltos**

---

**DAVID ORTIZ SOTO**

Instituto Politécnico Nacional  
Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura

Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Estudios Superiores Aragón

Revisión Técnica:

**Dr. Ernesto Pineda León**

Docente en Instituto Politécnico Nacional  
Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura  
Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, y Licenciatura

Universidad de Londres  
Queen Mary College

Universidad de Sonora  
Facultad de Ingeniería

Datos de Catalogación bibliográfica

**ORTIZ, D.**

**Análisis de Estructuras: Problemas Resueltos**

Primera edición

INDEPENDIENTE, México, 2014

ISBN Trámite en proceso

Área: Ingeniería

Formato: Carta 21.6 cm x 27.9 cm

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, con fines lucrativos.

DERECHOS RESERVADOS 2014, por David Ortiz Soto

Impreso en México

## DEDICATORIAS

El presente libro está dedicado a todos los(as) estudiantes y profesores(as) que han levantado la voz para exigir sus derechos y un sistema justo en el Instituto Politécnico Nacional (IPN), sin miedo a represalias, haciendo uso del “derecho a pensar”.

Siendo hoy el 27 de Septiembre del 2014, a 10 días del “PARO INDEFINIDO” que han organizado diversos estudiantes de la Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Unidad Zacatenco, bajo el argumento de no haber recibido respuesta a su pliego petitorio por parte de las autoridades, el movimiento está más fuerte que nunca y nadie dará un paso atrás hasta haber conseguido el objetivo. La principal inconformidad es el nuevo plan de estudios (2014) impuesto y de menor calidad al precedente (2004), por lo que se exige derogación al mismo.

Muchos profesores tanto de Licenciatura como de Posgrado se han unido a la causa.



La presente obra también se ha realizado en apoyo absoluto a los Investigadores de SEPI ESIA Zacatenco, quienes han protestado ante lo que ellos han denominado “la imposición de un jefe ilegítimo de posgrado”.

## DEDICATORIAS



Finalmente, va para todos(as) aquellos(as) que en conjunto han formado la “Resistencia Global Politécnica”, manifestándose en contra del “Nuevo Reglamento Interno del IPN”, desde vocacionales hasta unidades de nivel superior, así como a todos(as) los solidarios(as) pertenecientes a otras universidades como la UNAM, UAM, etc., hasta la población en general que se ha solidarizado.



## LA RESISTENCIA GLOBAL DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL (IPN) Y LAS UNIVERSIDADES SOLIDARIAS



¡Basta ya! nuestro futuro no está en venta  
hermano(a) no te vayas a la deriva  
mejor pon el puño arriba  
porque mi gente está apoyando la causa  
aquí estamos todos resistiendo  
vamos todos a bordo, que no se quede nadie  
cuidando al compañero y que aquí nadie nos calle  
vamos a demostrarles que somos conscientes  
organización y hay que tener cuidado  
hay muchos que provocan porque vienen infiltrados  
son tan ignorantes, se olvidan de su pueblo,  
confunden interesantes y creen son parte del dueño  
nuestro delito es ser conscientes  
no caemos en el juego de la desinformación  
disfrutamos del consenso y fomentamos el apoyo mutuo  
solidaridad y diversidad sexual  
seguiremos creyendo que la razón más justa es la verdad  
nadie va parar la libertad  
busquemos el derecho de imaginar y opinar

**By el artista mexicano Herón Skalo**

## **DONATIVOS VOLUNTARIOS**

Si bien siempre he pensado que “la información no es sólo para el que la paga, es para todos”, motivo por el cual coloco con toda humildad para su libre descarga este libro, en esta ocasión, se requiere de su apoyo para los estudiantes que se encuentran luchando por una causa justa defendiendo el IPN. Si está en tus posibilidades el hacer algunos donativos tales como víveres, agua, papel higiénico, etc., para los jóvenes que se encuentran salvaguardado sus correspondientes escuelas a las que pertenecen, sean Vocacionales o de Nivel Superior, se te agradecerá en demasía. Mientras dura este movimiento, puedes acudir directamente a cualquiera de las Instalaciones del IPN a visitar a los estudiantes citados para hacerles entrega de lo que desees donar.

## CONTACTO

### Cuenta Personal

David Ortiz M en l <https://www.facebook.com/davidortizMenl>

### Página de la Biblioteca

Se les hace la amable invitación a unirse a la página oficial de Facebook de la Biblioteca; para localizarla, se les sugiere teclear en el buscador las palabras [Problemario de Análisis de Estructuras en 2D Y 3D](#).

Si buscas un sitio donde se haga válido el supuesto derecho que todos tenemos de "La educación es gratuita y no un privilegio", la Biblioteca citada es uno de los lugares indicados, pues toda la información que elaboramos (Libros, Tesis, Vídeos Tutoriales y Manuales) profesionistas de México, Perú, Bolivia y Ecuador es de libre descarga. Si necesitas una dosis de entretenimiento, ahí la encontrarás. Siempre serás bienvenido al lugar donde a través de la expresión artística manifestamos nuestra inconformidad ante un sistema injusto y carente de oportunidades para todos por igual. Es en la literatura de Ingeniería más combativa que jamás hayas visto donde podrás notar que pintamos las banderas de un solo color, pues todos(as) tienen cabida, y los egos y las envidias no existen. Que disfruten de nuestra producción intelectual: es la novel propuesta del siglo XXI.



## PREFACIO

El libro se ha escrito con la finalidad de contribuir en el apoyo a profesores, estudiantes y todos los interesados en general en la enseñanza y el aprendizaje del análisis estructural, el cual representa un apartado trascendental en el área de la Ingeniería Estructural. Esta a su vez, constituye uno de los pilares más importantes de la carrera de Ingeniería Civil y de otras carreras como Ingeniería Mecánica, Ingeniería Aeronáutica y Arquitectura.

Una estructura es el conjunto de elementos resistentes, convenientemente vinculados entre sí, que accionan y reaccionan bajo los efectos de las cargas; su finalidad es resistir y transmitir cargas a otros elementos y a los apoyos, y de ese modo garantizar su correcto funcionamiento. Los requisitos o exigencias básicas que una estructura debe cumplir son: equilibrio y estabilidad.

Se entiende por análisis de una estructura al proceso sistemático que concluye con el conocimiento de las características de su comportamiento bajo un cierto estado de cargas; se incluye, habitualmente, bajo la denominación genérica de estudio del comportamiento tanto el estudio del análisis de los estados tensional y deformacional alcanzados por los elementos y componentes físicos de la estructura como la obtención de conclusiones sobre la influencia recíproca con el medio ambiente o sobre sus condiciones de seguridad. Es entonces el objetivo del análisis de una estructura, la predicción de su comportamiento bajo las diferentes acciones para las que se postule o establezca que debe tener capacidad de respuesta.

El énfasis de este libro es resolver de manera minuciosa y clara una gran variedad de ejercicios sobre estructuras isostáticas e hiperestáticas, y sistemas de un grado de libertad con amortiguación y sin amortiguación. Esto tiene como objetivo ofrecer al lector una idea muy acercada de cómo trabajan los software de estructuras disponibles hoy en día, por ejemplo, el SAP 2000, ETABS o ANSYS, debido a que estos emplean las teorías que en la presente obra se tratan. Por otra parte, en automático se le brinda al lector un medio para comprobar los resultados obtenidos en los programas de cálculo mencionados, en vez de limitarse simplemente a confiar en los resultados generados.

A continuación se proporciona el enfoque seguido en el presente trabajo. La obra se divide en tres capítulos. En el capítulo 1 se analizan estructuras isostáticas únicamente, específicamente, vigas, pórticos, armaduras y arcos. Esta parte vendría siendo una introducción al análisis estructural; se explica la forma de calcular el grado de indeterminación, las reacciones en los soportes, de determinar las funciones de las fuerzas cortante y normal, y de momento flexionante empleando el método de las secciones, de dibujar los diagramas de los elementos mecánicos, de inferir las fuerzas en las barras con el método de los nodos, etc.

## PREFACIO

En el capítulo 2 se estudian las estructuras estáticamente indeterminadas; los métodos que se emplean para ello son el de flexibilidades y el matricial de la rigidez, y se aplican solo a armaduras, vigas y marcos. Finalmente, el capítulo 3 se enfoca a la resolución de sistemas de un grado de libertad con y sin amortiguamiento, tanto para casos en los que la carga es nula como para los casos en los que hay excitación armónica.

**DAVID ORTIZ SOTO**

## CONTENIDO

<b>1 ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS .....</b>	<b>1</b>
Ejercicio 1.1 Funciones de Fuerzas cortante y normal, y de momento flector de una viga isostática con un soporte inclinado .....	1
Ejercicio 1.2 Diagramas de fuerza cortante y de momento para una viga con carga triangular .....	8
Ejercicio 1.3 Análisis de una viga con carga compleja .....	12
Ejercicio 1.4 Diagramas de fuerza cortante y normal, y de momento para un pórtico .....	25
Ejercicio 1.5 Fuerzas en las barras de una armadura simétrica .....	36
Ejercicio 1.6 Fuerzas en las barras de una armadura no simétrica .....	42
Ejercicio 1.7 Resolución de un arco triarticulado parabólico .....	47
Ejercicio 1.8 Resolución de un arco triarticulado circular.....	54
<b>2 ANÁLISIS ESTRUCTURAL .....</b>	<b>63</b>
Ejercicio 2.1 Método de flexibilidades aplicado a una viga .....	63
Ejercicio 2.2 Método de flexibilidades aplicado a una viga con un asentamiento en un soporte .....	72
Ejercicio 2.3 Método de flexibilidades aplicado a una viga con un asentamiento en un soporte modelado como resorte helicoidal .....	82
Ejercicio 2.4 Método de flexibilidades aplicado a un pórtico con un asentamiento en un apoyo .....	91
Ejercicio 2.5 Método de la rigidez matricial aplicado a una armadura en 2D .....	104
Ejercicio 2.6 Análisis de una armadura con un rodillo en un plano inclinado empleando el método de la rigidez matricial .....	125
Ejercicio 2.7 Resolución de una viga con el uso del método de la rigidez directa .....	134
Ejercicio 2.8 Solución de una viga con asentamiento en un apoyo por medio del método de la rigidez matricial .....	144

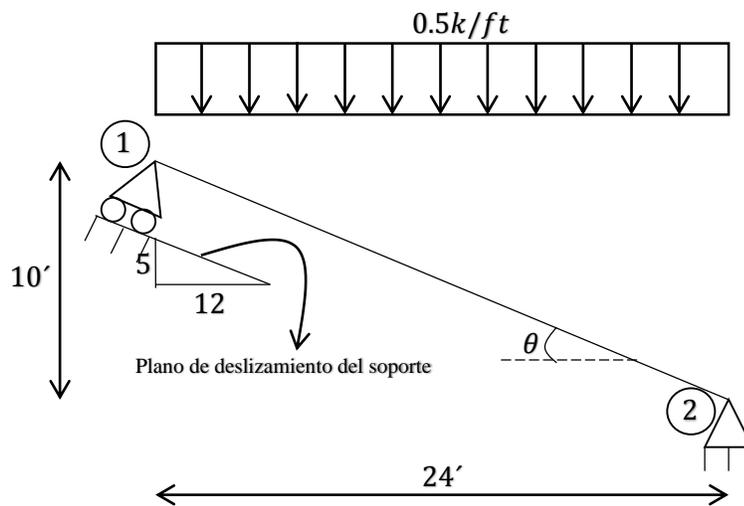
Ejercicio 2.9 Resolución de un pórtico plano con el método de la rigidez directa .....	150
<b>3 INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA ESTRUCTURAL.....</b>	<b>159</b>
Ejercicio 3.1 Análisis de un sistema de un grado de libertad, sin amortiguación .....	159
Ejercicio 3.2 Análisis de un sistema de un grado de libertad, con amortiguación .....	162
Ejercicio 3.3 Respuesta de un sistema de un grado de libertad sin amortiguación, a excitación armónica .....	168
Ejercicio 3.4 Respuesta de un sistema de un grado de libertad amortiguado, a excitación armónica .....	171
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>175</b>

# CAPÍTULO 1

## ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

### Ejercicio 1.1 Funciones de Fuerzas cortante y normal, y de momento flector de una viga isostática con un soporte inclinado.

**Instrucciones** Determine las reacciones en los apoyos de la estructura mostrada en la figura 1-1a producidas por las cargas indicadas. Use el método de las secciones para deducir las expresiones algebraicas que describen la variación de los elementos mecánicos.



(a)

Figura 1-1

### SOLUCIÓN

#### Verificación del grado de indeterminación

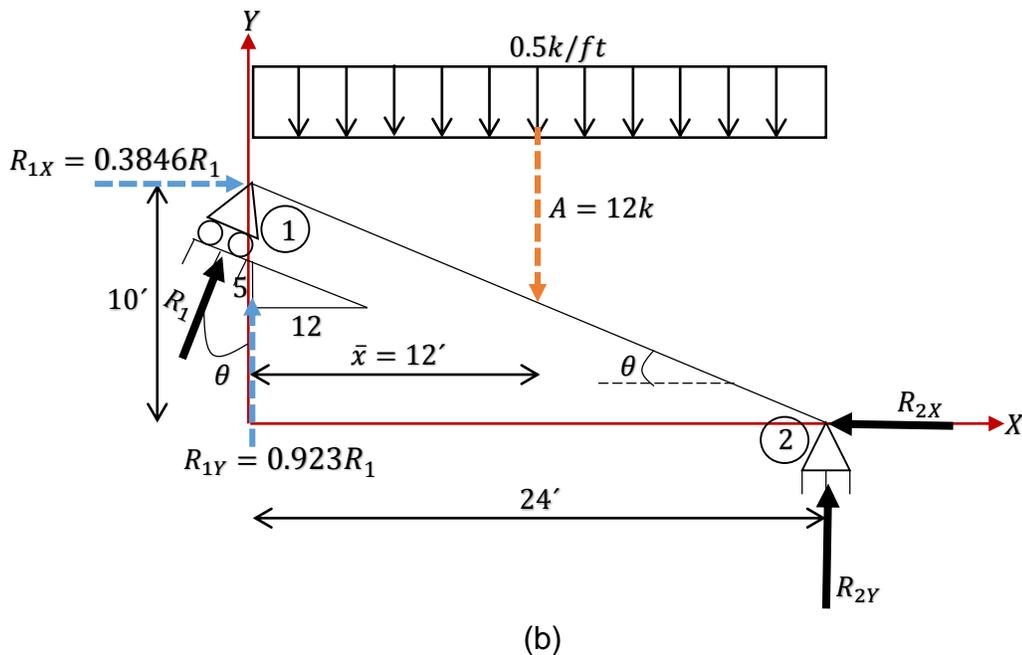
Se identifican las fuerzas reactivas en los apoyos (soportes); el soporte 1 es un rodillo, por lo que la reacción  $R_1$  es perpendicular al plano de deslizamiento del apoyo, mientras que el soporte 2 es articulado y en él se generan dos reacciones, una horizontal ( $R_{2X}$ ) y una vertical ( $R_{2Y}$ ). Como hay tres incógnitas de reacción,

$r = 3$ , tres ecuaciones de equilibrio ( $\sum FX = 0, \sum FY = 0, \sum M = 0$ ),  $n = 3$ , y ninguna ecuación de condición (no existe articulación (rótula) ni conexión cortante intermedia),  $c = 0$ , se concluye que la viga es isostática o estáticamente determinada debido a que se cumple que  $r = n + c$ , puesto que  $3 = 3 + 0$ .

Si  $r > (n + c)$ , entonces la viga es estáticamente indeterminada, o bien, en caso de que  $r < (n + c)$ , se infiere que la viga es inestable.

### Cálculo de las reacciones en los apoyos

**Diagrama de cargas.** Este diagrama se muestra en la figura 1-1b. El sentido de cada reacción ha sido supuesto arbitrariamente debido a que las fuerzas reactivas no son conocidas. Para la carga distribuida se tienen que determinar: a) la carga concentrada equivalente, es decir, la magnitud de la fuerza resultante de la carga, que es igual al área bajo la curva de carga (en este caso, por ser carga uniforme es el área del rectángulo) y b) el centroide de dicha área a través del cual pasa la línea de acción de la resultante, o sea, se halla el punto de aplicación de la resultante (para una carga rectangular, el centroide se localiza a la mitad de la longitud de la base).

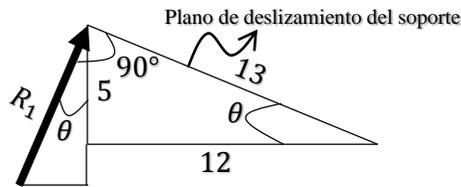


Por otra parte, se han establecido en sus cuadrantes positivos a los ejes coordenados  $X$  y  $Y$  más convenientes para aplicar las ecuaciones de equilibrio en la estructura; esto último hace que sea necesario descomponer a  $R_1$  en sus componentes rectangulares horizontal y vertical, las cuales han sido etiquetadas como  $R_{1X}$  y  $R_{1Y}$  respectivamente.

La fuerza resultante de la carga uniforme distribuida y su punto de aplicación son

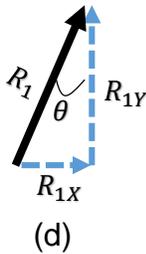
$$A = (0.5k/ft)(24ft) = 12k \qquad \bar{x} = \frac{1}{2}(24') = 12'$$

De acuerdo a las figuras 1-1c y 1-1d, las componentes rectangulares de la reacción  $R_1$  en el plano  $X - Y$  son



$$\theta = \tan^{-1} \frac{5}{12} = 22.6198^\circ$$

(c)



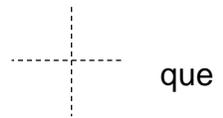
$$R_{1X} = R_1 \sin \theta = R_1 \cdot \sin 22.6198^\circ = 0.3846R_1$$

$$R_{1Y} = R_1 \cos \theta = R_1 \cdot \cos 22.6198^\circ = 0.923R_1$$

(d)

**Ecuaciones de equilibrio.** Se aplican al diagrama de cargas para calcular las reacciones en los apoyos; la convención de signos que se adopta es arbitraria. En caso de que la solución de las ecuaciones de equilibrio proporcione una magnitud negativa para una fuerza reactiva, su sentido propuesto debe ser invertido.

Tomando momentos alrededor del punto 2 considerando los ejes que pasan por tal punto, se puede despejar directamente el valor de  $R_1$ .



$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow R_{1X}(10) + R_{1Y}(24) - 12(12) = 0$$

$$(0.3846R_1)(10) + (0.923R_1)(24) - 144 = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{144}{26} = 5.5385$$

$$\therefore R_1 = 5.5385k \nearrow$$

Los valores de las componentes rectangulares de  $R_1 = 5.5385k$  son

$$R_{1X} = 0.3846R_1 = 0.3846(5.5385k) = 2.13k \dashrightarrow$$

$$R_{1Y} = 0.923R_1 = 0.923(5.5385k) = 5.112k \uparrow$$

Finalmente, las reacciones  $R_{2X}$  y  $R_{2Y}$  se obtienen al plantear las dos ecuaciones de equilibrio restantes, es decir, las de fuerzas.

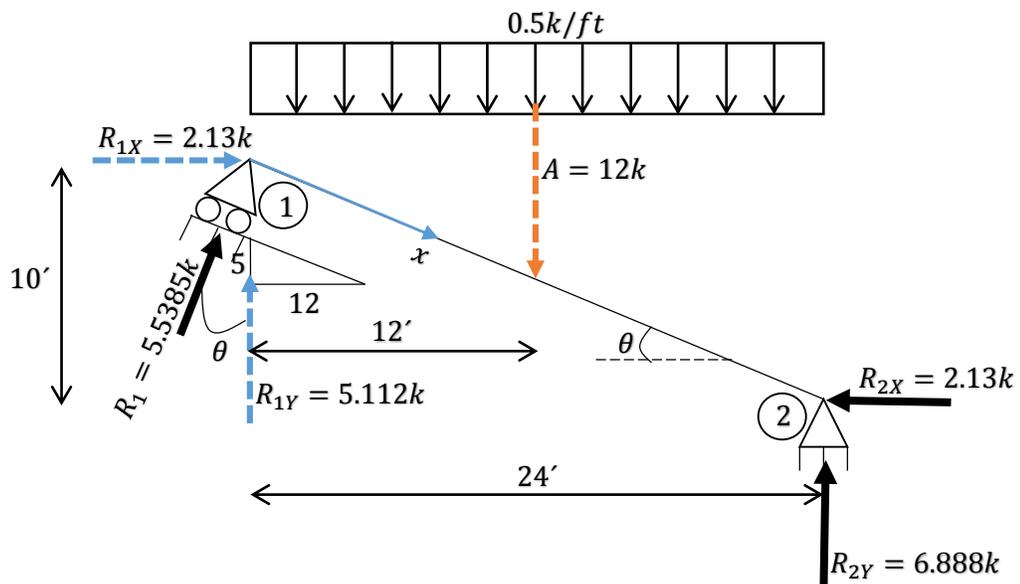
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{1X} - R_{2X} = 0 \Rightarrow 2.13 - R_{2X} = 0 \Rightarrow R_{2X} = 2.13$$

$$\therefore R_{2X} = 2.13k \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{1Y} - U_R + R_{2Y} = 0 \Rightarrow 5.112 - 12 + R_{2Y} = 0 \Rightarrow R_{2Y} = 6.888$$

$$\therefore R_{2Y} = 6.888k \uparrow$$

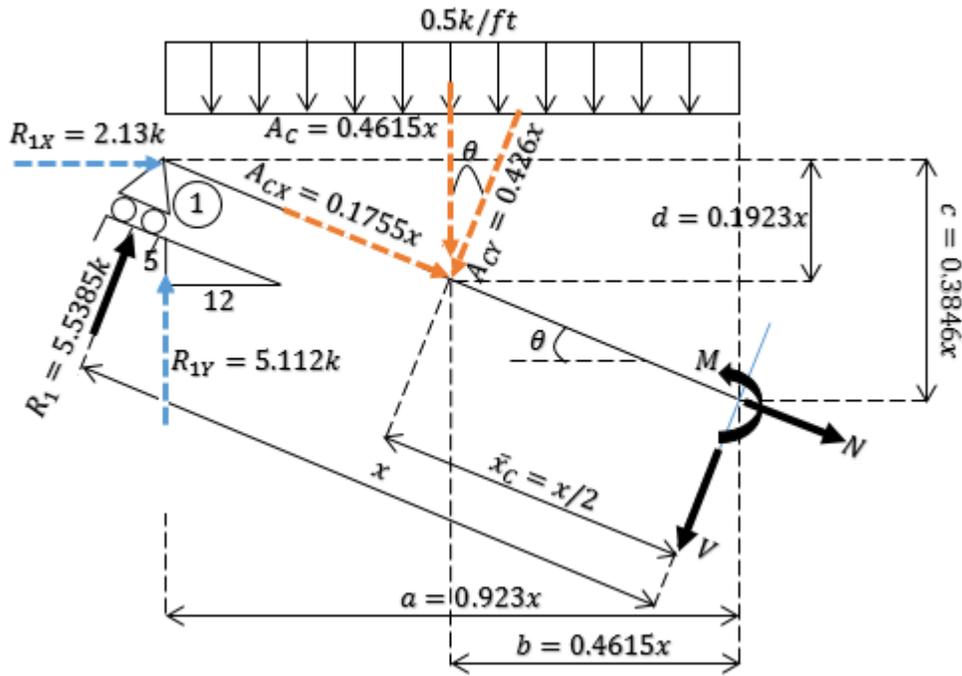
### Funciones de fuerza cortante, de fuerza normal y de momento



En la figura 1-1e se visualizan los valores de las reacciones en los soportes con sus correspondientes sentidos adecuados. A continuación se aplica el método de las secciones (cortes). La distribución de la carga actuante no presenta discontinuidad, así que sólo será necesario efectuar un corte perpendicular al eje longitudinal de la viga para definir los elementos mecánicos, también llamados acciones internas, que corresponden a la fuerza axial o normal  $N$ , la cual actúa en la misma dirección que la del eje longitudinal de la viga, la fuerza cortante  $V$  que es perpendicular a  $N$  y el momento flexionante  $M$ ; se considera como origen del sistema coordenado al punto 1, así que la coordenada  $x$  es positiva hacia la derecha y hacia abajo, y es válida para la región 1 – 2 ( $0 \leq x \leq 26'$ ), debido a que la longitud de la viga es  $L = \sqrt{(24')^2 + (10')^2} = 26'$ . Se secciona la viga en un punto arbitrario (intermedio en el segmento 1 – 2) a una distancia  $x$  del punto 1.

En la figura 1-1f se proporciona un diagrama de cuerpo libre del segmento de viga con longitud  $x$ . El área  $A_c$  bajo el rectángulo y su centroide  $\bar{x}_c$  deben determinarse. Las acciones internas aparecen actuando en sus direcciones positivas de acuerdo a la convención de signos más usual y sus funciones se deducen aplicando las ecuaciones de equilibrio cuya convención de signos si puede ser indistinta en el diagrama mencionado.

$$0 \leq x \leq 26'$$



(f)

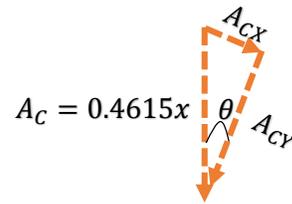
La carga concentrada equivalente de la carga distribuida uniforme del corte y su punto de aplicación son, respectivamente

$$A_C = (0.5)(0.923x) = 0.4615x \quad \bar{x}_C = \frac{1}{2}(x) = \frac{x}{2}$$

Con base en la figura 1-1g se determinan las componentes rectangulares de la fuerza resultante  $A_C$  cuyas líneas de acción coinciden con las de  $N$  y  $V$ , es decir, las componentes que actúan en forma paralela y perpendicular al eje longitudinal de la viga.

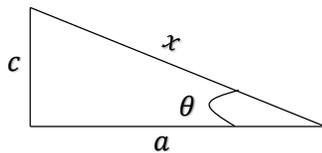
$$A_{Cx} = A_C \sin \theta = 0.4615x(0.3846) = 0.1775x$$

$$A_{Cy} = A_C \cos \theta = 0.4615x(0.923) = 0.426x$$



(g)

Las distancias auxiliares  $a, b, c$  y  $d$  se deducen a partir del triángulo rectángulo que se observa en la figura 1-1h.



(h)

$$c = x \sin \theta = 0.3846x$$

$$a = x \cos \theta = 0.923x$$

$$b = \frac{a}{2} \quad d = \frac{c}{2}$$

Si tomamos momentos alrededor del punto del corte, puede obtenerse directamente el momento  $M$  en función de  $x$ .

$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

- Opción 1.

Usando los momentos de las fuerzas con respecto a los ejes  que pasan por el punto del corte se tiene

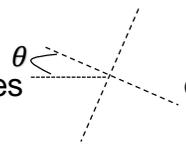
$$R_{1Y}(a) + R_{1X}(c) - A_C(b) - M = 0$$

$$5.112(0.923x) + 2.13(0.3846x) - (0.4615x)(0.4615x) - M = 0$$

simplificando y despejando a  $M$

$$M = -0.213x^2 + 5.538x$$

- Opción 2.

Considerando los momentos de las fuerzas con respecto a los ejes  que pasan por el punto del corte obtenemos

$$R_1(x) - A_{CY} \left( \frac{x}{2} \right) - M = 0 \Rightarrow 5.5385(x) - (0.426x) \left( \frac{x}{2} \right) - M = 0$$

$$M = -0.213x^2 + 5.5385x$$

De la suma de fuerzas en la dirección de la fuerza cortante igual a cero se tiene

$$\uparrow + \sum FY = 0 \Rightarrow R_1 - A_{CY} - V = 0 \Rightarrow 5.5385 - 0.426x - V = 0$$

$$V = 5.5385 - 0.426x$$

o también

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} (-0.213x^2 + 5.5385x) = 5.5385 - 0.426x$$

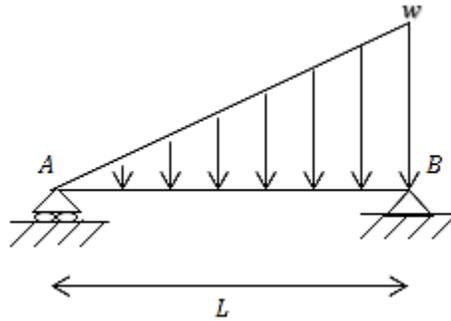
Lo anterior se debe a que como se observará en el siguiente tema, la pendiente del diagrama de momento ( $dM/dx$ ) es igual a la intensidad de la fuerza cortante en ese punto. Por otra parte, se establece que la pendiente del diagrama de fuerza cortante, en un punto ( $dV/dx$ ) es igual a la intensidad de la carga distribuida  $w(x)$  en ese punto.

Si la suma de fuerzas en la dirección de la fuerza normal es cero, resulta

$$\rightarrow + \sum FX = 0 \Rightarrow A_{CX} + N = 0 \Rightarrow 0.1775x + N = 0 \Rightarrow N = -0.1775x$$

**Ejercicio 1.2 Diagramas de fuerza cortante y de momento para una viga con carga triangular.**

**Instrucciones** Para una viga simplemente apoyada de longitud  $L$  que soporta una carga cuya variación lineal va de 0 en el apoyo  $A$  hasta  $w$  en el apoyo  $B$ , figura 1-2a, dibuje los diagramas de momento y cortante.



(a)

**Figura 1-2**

**SOLUCIÓN**

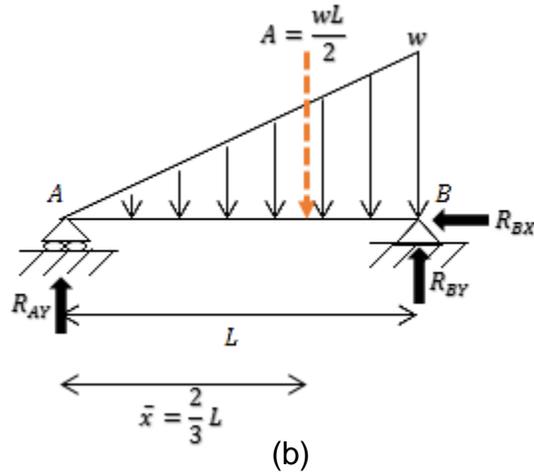
**Cálculo de las reacciones en los apoyos**

**Diagrama de cargas.** Las reacciones en los apoyos han sido identificadas y el sentido de cada una de ellas se ha supuesto arbitrariamente por desconocerse; por otra parte, se ha determinado la carga concentrada equivalente  $A$  para la carga distribuida de intensidad con variación lineal y su punto de aplicación  $\bar{x}$ . La figura 1-2b indica el diagrama de cargas de la estructura.

**Ecuaciones de equilibrio.** Se aplican al diagrama de cargas para obtener las fuerzas reactivas en los soportes; la convención de signos a utilizar es indistinta.

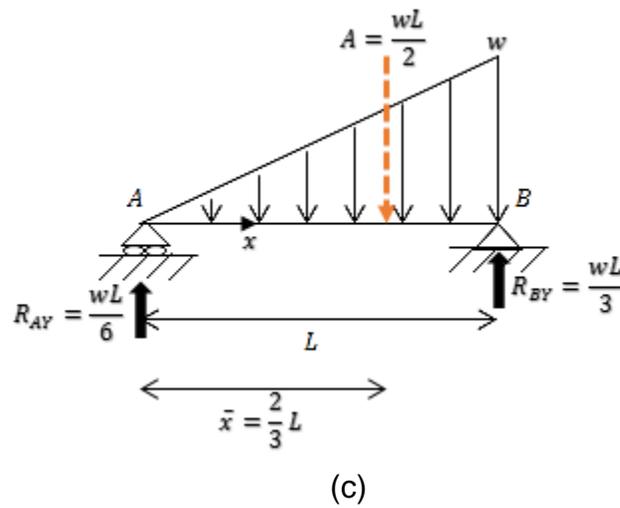
$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum MA = 0 &\Rightarrow \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{2}{3}L\right) - (R_{BY})(L) = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{wL^2}{3L} \Rightarrow \therefore R_{BY} = \frac{wL}{3} \uparrow \\ + \rightarrow \sum FX = 0 &\Rightarrow \therefore R_{BX} = 0 \end{aligned}$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow R_{AY} - \frac{wL}{2} + \frac{wL}{3} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{wL}{6} \uparrow$$



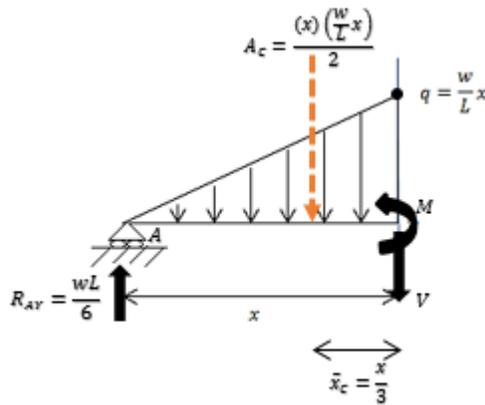
### Funciones de fuerza cortante y de momento

En la figura 1-2c se visualizan los valores de las reacciones en los soportes con sus correspondientes sentidos adecuados; se especifica la coordenada  $x$  a utilizar cuyo origen asociado está en A. El momento y el cortante deben estar en función de  $x$  y como no hay discontinuidad de carga a lo largo de la estructura, sólo se efectuará un corte perpendicular al eje de la viga.



Un diagrama de cuerpo libre del segmento de viga con longitud  $x$  es proporcionado en la figura 1-2d. Note que la intensidad de la carga triangular se encuentra en proporción, es decir,  $\frac{w}{L} = \frac{q}{x} \Rightarrow q = \frac{w}{L}x$ . Se indica la fuerza resultante de la carga triangular del corte y su punto de aplicación;  $V$  y  $M$  aparecen actuando en sus direcciones positivas de acuerdo a la convención de signos usualmente adoptada y sus funciones se deducen al hacer uso de las ecuaciones de equilibrio cuya convención de signos si puede ser cualquiera.

$$0 \leq x \leq L$$



(d)

$$\sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow -M + \left(\frac{wL}{6}\right)x - \frac{(x)\left(\frac{w}{L}x\right)}{2}\left(\frac{x}{3}\right) = 0$$

$$M = \frac{wL}{6}x - \frac{w}{6L}x^3$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow \frac{wL}{6} - \frac{(x)\left(\frac{w}{L}x\right)}{2} - V = 0$$

$$V = \frac{wL}{6} - \frac{w}{2L}x^2 \quad \text{o también } V = \frac{dM}{dx} = \frac{wL}{6} - \frac{w}{6L}(3x^2) = \frac{wL}{6} - \frac{w}{2L}x^2$$

### Cálculo del momento máximo

El momento máximo está posicionado en un punto donde  $V = dM/dx = 0$ ; realizando la sustitución correspondiente y resolviendo la ecuación se tiene

$$0 = \frac{wL}{6} - \frac{w}{2L}x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{-\frac{wL}{6}}{-\frac{w}{2L}} = \frac{2wL^2}{6w} = \frac{L^2}{3} \Rightarrow \therefore x_{max} = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Al hacer  $x_{max} = x$  en la ecuación de  $M$ , el momento máximo resulta ser

$$M_{max} = \frac{wL}{6} \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) - \frac{w}{6L} \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{wL^2}{6\sqrt{3}} - \frac{wL^2}{6(\sqrt{3})^3} = \frac{\sqrt{3}}{27}wL^2 \Rightarrow \therefore M_{max} = \frac{wL^2}{9\sqrt{3}}$$

### Diagramas de fuerza cortante, momento flector

Una vez que se han determinado las funciones de fuerza cortante y de momento flector, estas se evalúan en el intervalo  $0 \leq x \leq L$ , tablas 1-1 y 1-2. Luego, los respectivos diagramas, figuras 1-2e y 1-2f, se obtienen de graficar los datos dispuestos en forma tabular.

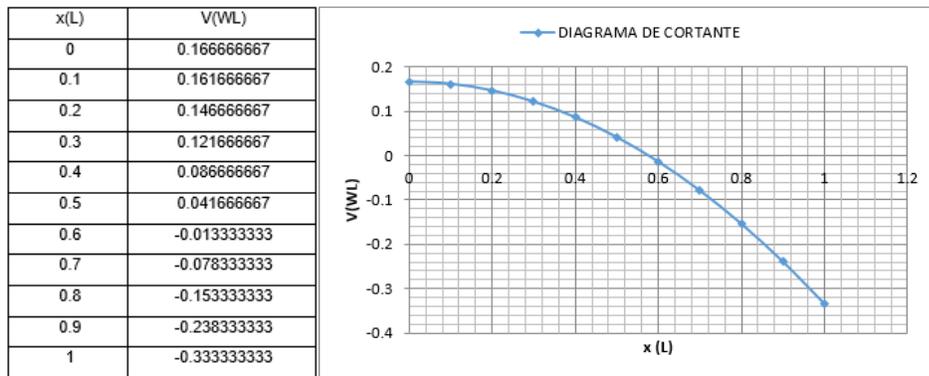


Tabla 1-1

(e)

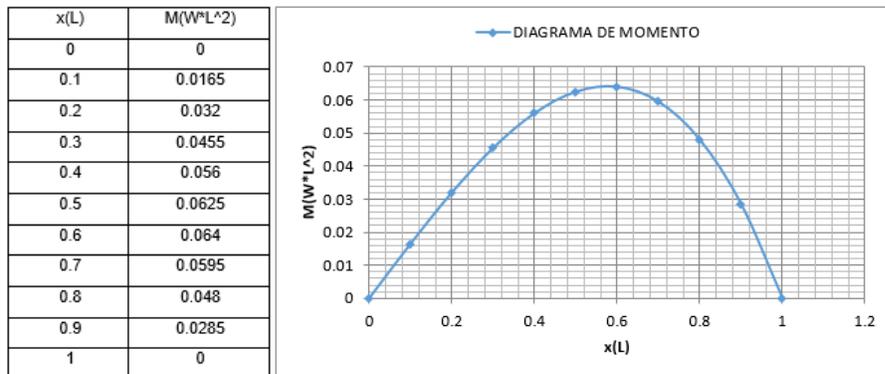
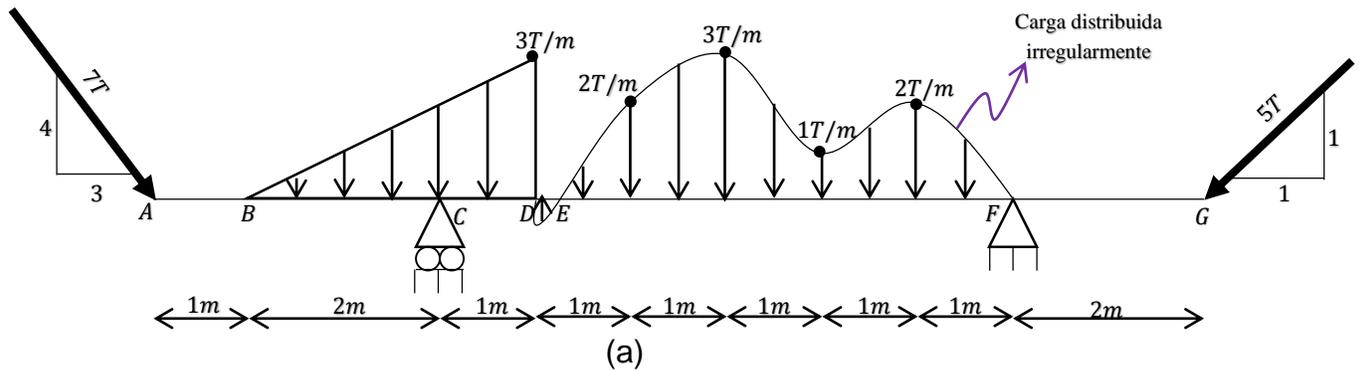


Tabla 1-2

(f)

**Ejercicio 1.3 Análisis de una viga con carga compleja.**

**Instrucciones** Calcule las fuerzas reactivas en los soportes y determine las funciones del momento flector y de las fuerzas cortante y normal de la viga isostática mostrada en la figura 1-3a. Obsérvese que en los extremos izquierdo y derecho están aplicadas cargas puntuales de  $7T$  con una pendiente de 3:4 y de  $5T$  con una pendiente de 1:1 respectivamente; sobre la región  $B - D$  se extiende una carga cuya intensidad varía linealmente desde 0 en el punto  $B$  hasta  $3T/m$  en el punto  $D$  y sobre la región  $D - F$  la estructura soporta una carga distribuida irregularmente en la que se conocen seis puntos de intensidad de carga cuyos valores son indicados.



**Figura 1-3**

**SOLUCIÓN**

**Cálculo de las reacciones en los apoyos**

**Diagrama de cargas.** Primero se construye una función polinomial que ajuste a los puntos conocidos de la carga distribuida irregularmente; como se tienen seis datos, se propone una función polinómica de grado cinco ( $n_{\text{datos}} - 1$ ) de la siguiente forma:

$$y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \text{ --- (I)}$$

Tomando como origen al punto  $A$  se sabe que

$$\text{en } x = 4m, y = 0; \text{ en } x = 5m, y = 2T/m; \text{ en } x = 6m, y = 3T/m$$

$$\text{en } x = 7m, y = 1T/m; \text{ en } x = 8m, y = 2T/m; \text{ en } x = 9m, y = 0$$

Si sustituimos los valores anteriores en la ecuación (I), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 = a(4)^5 + b(4)^4 + c(4)^3 + d(4)^2 + e(4) + f$$

$$0 = 1024a + 256b + 64c + 16d + 4e + f \text{ --- (1)}$$

$$2 = a(5)^5 + b(5)^4 + c(5)^3 + d(5)^2 + e(5) + f$$

$$2 = 3125a + 625b + 125c + 25d + 5e + f \text{ --- (2)}$$

$$3 = a(6)^5 + b(6)^4 + c(6)^3 + d(6)^2 + e(6) + f$$

$$3 = 7776a + 1296b + 216c + 36d + 6e + f \text{ --- (3)}$$

$$1 = a(7)^5 + b(7)^4 + c(7)^3 + d(7)^2 + e(7) + f$$

$$1 = 16807a + 2401b + 343c + 49d + 7e + f \text{ --- (4)}$$

$$2 = a(8)^5 + b(8)^4 + c(8)^3 + d(8)^2 + e(8) + f$$

$$2 = 32768a + 4096b + 512c + 64d + 8e + f \text{ --- (5)}$$

$$0 = a(9)^5 + b(9)^4 + c(9)^3 + d(9)^2 + e(9) + f$$

$$0 = 59049a + 6561b + 729c + 81d + 9e + f \text{ --- (6)}$$

Expresando el sistema simultáneo de ecuaciones en forma matricial tenemos

$$\begin{pmatrix} 1024 & 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 3125 & 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 7776 & 1296 & 216 & 36 & 6 & 1 \\ 16807 & 2401 & 343 & 49 & 7 & 1 \\ 32768 & 4096 & 512 & 64 & 8 & 1 \\ 59049 & 6561 & 729 & 81 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema resulta

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1024 & 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 3125 & 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 7776 & 1296 & 216 & 36 & 6 & 1 \\ 16807 & 2401 & 343 & 49 & 7 & 1 \\ 32768 & 4096 & 512 & 64 & 8 & 1 \\ 59049 & 6561 & 729 & 81 & 9 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.166667 \\ 5.333333 \\ -66.833333 \\ 409.167 \\ -1221.5 \\ 1422 \end{pmatrix}$$

Si se reemplazan los resultados obtenidos en la ecuación (I), entonces la función polinomial que describe la intensidad de la carga distribuida irregularmente es

$$y = -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422$$

Se calculan las cargas concentradas equivalentes  $A_i$  de las presiones, así como su punto de aplicación  $\bar{x}_i$ .

- Carga cuya intensidad varía en forma lineal.

$$A_1 = \frac{(3T/m)(3m)}{2} = 4.5T \quad \bar{x}_1 = \frac{2}{3}(3m) = 2m$$

- Carga distribuida irregularmente.

Para esta carga se conocían seis puntos de intensidad inicialmente; realmente no se sabía el comportamiento exacto de la curva que describe la carga distribuida hasta que se calculó la ecuación y se graficó. Fue así como se pudo observar que

una pequeña porción de la carga distribuida, específicamente la que se extiende de 4m a 4.45m, actúa hacia arriba; lógicamente en  $x = 4.45m, y = 0$ .

La fuerza resultante para esta porción de carga distribuida es

$$A_2 = \int dA = \int_{L_1}^{L_2} y dx$$

$$A_2 = \int_4^{4.45} \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx$$

$$A_2 = \left[ -\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x \right]_4^{4.45}$$

$$A_2 = -\frac{1}{36}(4.45^6 - 4.00^6) + \frac{16}{15}(4.45^5 - 4.00^5) - \frac{401}{24}(4.45^4 - 4.00^4) + \frac{136389}{1000}(4.45^3 - 4.00^3) - \frac{2443}{4}(4.45^2 - 4.00^2) + 1422(4.45 - 4.00) \approx -0.12 T$$

El signo negativo indica que la resultante  $A_2$  actúa hacia arriba. Su punto de aplicación es

$$\bar{x}_2 = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xy dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\int_4^{4.45} (x) \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx}{\int_4^{4.45} \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx}$$

Resolviendo el numerador se tiene

$$\int_4^{4.45} (x) \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx$$

$$= \int_4^{4.45} \left( -\frac{1}{6}x^6 + \frac{16}{3}x^5 - \frac{401}{6}x^4 + 409.167x^3 - 1221.5x^2 + 1422x \right) dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2 \right]_4^{4.45}$$

$$= -\frac{1}{42}(4.45^7 - 4.00^7) + \frac{8}{9}(4.45^6 - 4.00^6) - \frac{401}{30}(4.45^5 - 4.00^5) + \frac{409167}{4000}(4.45^4 - 4.00^4) - \frac{2443}{6}(4.45^3 - 4.00^3) + 711(4.45^2 - 4.00^2) \approx -0.49$$

El denominador ya fue resuelto. Por lo tanto,

$$\bar{x}_2 = \frac{-0.49}{-0.12} \approx 4.083m$$

Ahora se analiza la parte de la carga distribuida que actúa hacia abajo, es decir, la que se extiende de 4.45m a 9m. La fuerza resultante es

$$A_3 = \int dA = \int_{L_1}^{L_2} y dx$$

$$A_3 = \int_{4.45}^9 \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x \right]_{4.45}^9$$

$$= -\frac{1}{36}(9^6 - 4.45^6) + \frac{16}{15}(9^5 - 4.45^5) - \frac{401}{24}(9^4 - 4.45^4)$$

$$+ \frac{136389}{1000}(9^3 - 4.45^3) - \frac{2443}{4}(9^2 - 4.45^2) + 1422(9 - 4.45) = 8.87 T$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x}_3 = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xy dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx}$$

$$\bar{x}_3 = \frac{\int_{4.45}^9 (x) \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx}{\int_{4.45}^9 \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx}$$

Resolviendo el numerador se tiene

$$\int_{4.45}^9 (x) \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx$$

$$= \int_{4.45}^9 \left( -\frac{1}{6}x^6 + \frac{16}{3}x^5 - \frac{401}{6}x^4 + 409.167x^3 - 1221.5x^2 + 1422x \right) dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2 \right]_{4.45}^9$$

$$= -\frac{1}{42}(9^7 - 4.45^7) + \frac{8}{9}(9^6 - 4.45^6) - \frac{401}{30}(9^5 - 4.45^5) + \frac{409167}{4000}(9^4 - 4.45^4)$$

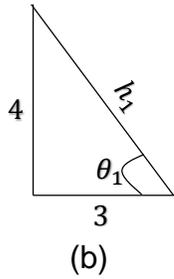
$$- \frac{2443}{6}(9^3 - 4.45^3) + 711(9^2 - 4.45^2) = 59.3$$

El denominador ya fue resuelto. Por lo tanto,

$$\bar{x}_3 = \frac{59.3}{8.87} \approx 6.685m$$

Luego, se resuelven las fuerzas puntuales  $F_1 = 7T$  y  $F_2 = 5T$  en sus componentes rectangulares  $X - Y$ , figuras 1-3b, 1-3c y 1-3d, 1-3e, respectivamente.

- Para  $F_1 = 7T$

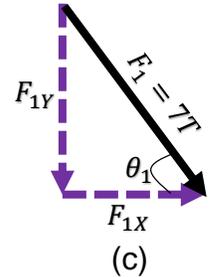


$$h_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

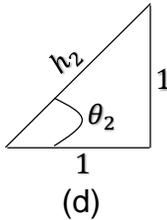
$$\sin \theta_1 = \frac{4}{5}; \cos \theta_1 = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{F_{1X}}{7T} \Rightarrow F_{1X} = 7T(\cos \theta_1) = 7T\left(\frac{3}{5}\right) = 4.2T$$

$$\sin \theta_1 = \frac{F_{1Y}}{7T} \Rightarrow F_{1Y} = 7T(\sin \theta_1) = 7T\left(\frac{4}{5}\right) = 5.6T$$



- Para  $F_2 = 5T$

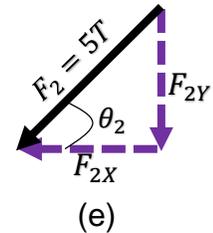


$$h_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

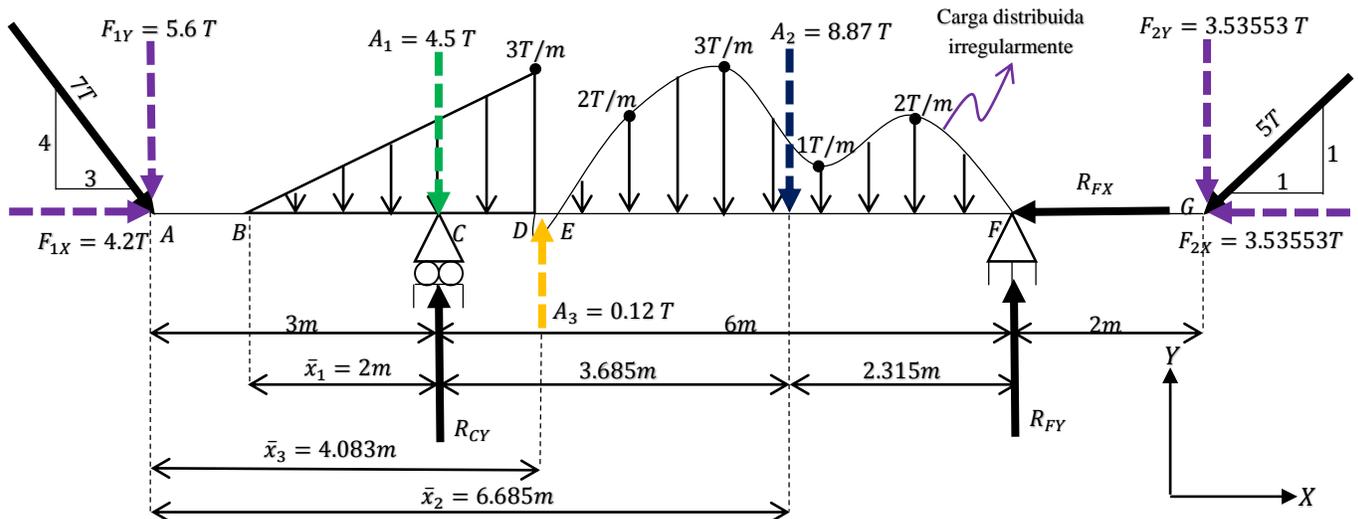
$$\sin \theta_2 = \cos \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta_2 = \frac{F_{2Y}}{5T} \Rightarrow F_{2Y} = 5T(\sin \theta_2) = 5T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3.53553T$$

$$\cos \theta_2 = \frac{F_{2X}}{5T} \Rightarrow F_{2X} = 5T(\cos \theta_2) = 5T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3.53553T$$



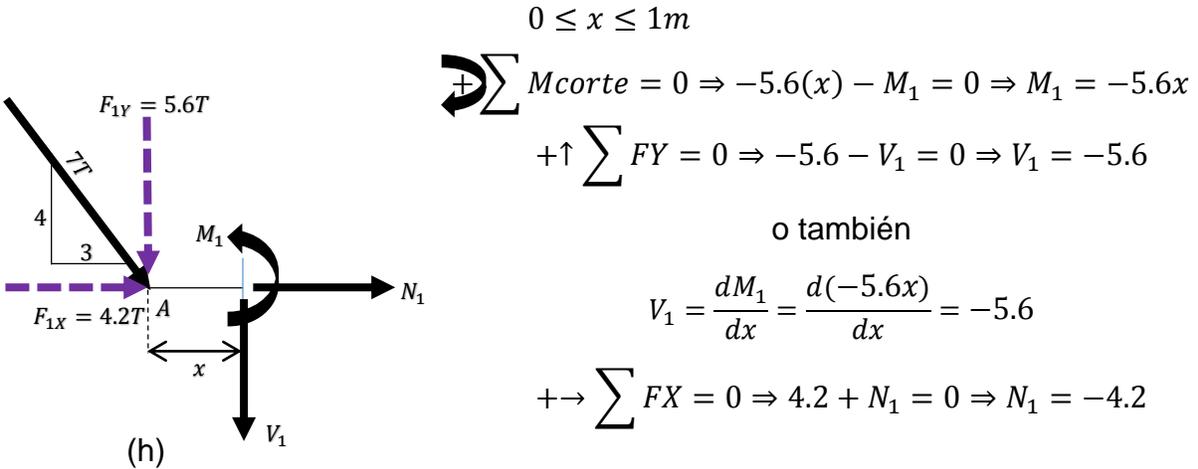
El soporte  $C$  es un rodillo, por lo que se genera una fuerza reactiva vertical  $R_{CY}$ , mientras que el soporte  $F$  es un pasador y tiene dos incógnitas de reacción, una horizontal ( $R_{FX}$ ) y una vertical ( $R_{FY}$ ). En consecuencia, el diagrama de cargas de la viga, figura 1-3f, es



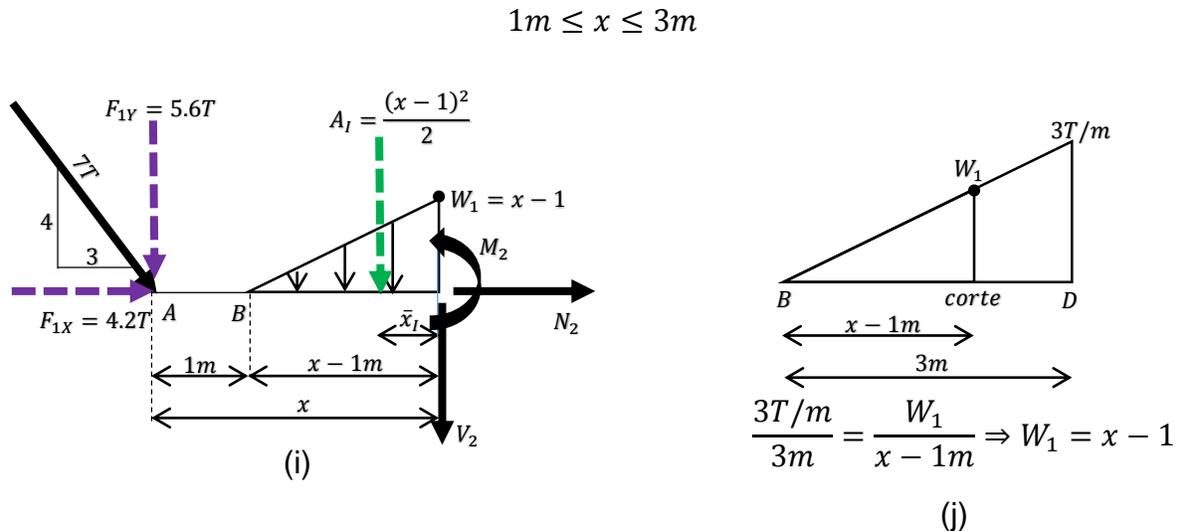


Se ha definido una sola coordenada  $x$  para toda la viga, por lo que es válida para toda la región  $A - G$  ( $0 \leq x \leq 11m$ ), su origen ha sido asociado en  $A$ , y es positiva hacia la derecha.

Corte en el tramo ① ( $A - B$ ). Se secciona la viga en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $(A - B)$ ) a una distancia  $x$  del punto  $A$ . En la figura 1-3h se proporciona un diagrama de cuerpo libre del segmento de viga con longitud  $x$ . Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene



Corte en el tramo ② ( $B - C$ ). En la figura 1-3i se muestra un diagrama de cuerpo libre de la sección cortada. A la derecha, figura 1-3j, se proporciona un esquema para determinar el valor en función de  $x$  de la intensidad  $W_1$ .



La fuerza resultante de la carga triangular cortada es

$$A_I = \frac{(x - 1)(x - 1)}{2} = \frac{(x - 1)^2}{2}$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x}_l = \frac{1}{3}(x - 1)$$

Por lo tanto,

$$\curvearrowleft \sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow -5.6x - \frac{(x-1)^2}{2} \left[ \frac{1}{3}(x-1) \right] - M_2 = 0$$

$$\begin{aligned} M_2 &= -5.6x - \frac{1}{6}(x-1)^3 = -5.6x - \frac{1}{6}[(x)^3 - 3(x)^2(1) + 3(1)^2(x) - (1)^3] \\ &= -5.6x - \frac{1}{6}[x^3 - 3x^2 + 3x - 1] = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6.1x + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -5.6 - \frac{(x-1)^2}{2} - V_2 = 0$$

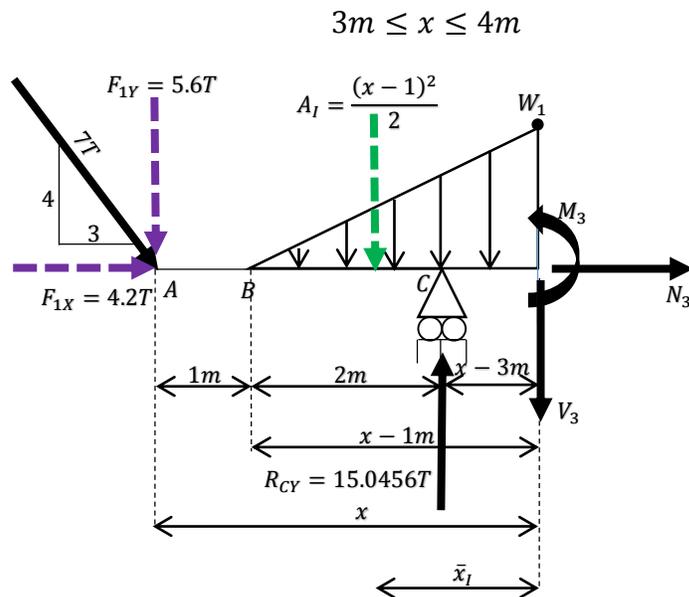
$$V_2 = -5.6 - \frac{(x)^2 - 2(x)(1) + (1)^2}{2} = -5.6 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + x - 6.1$$

o también

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = \frac{d\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6.1x + \frac{1}{6}\right)}{dx} = -\frac{1}{2}x^2 + x - 6.1$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_2 = -4.2$$

Corte en el tramo ③(C-D). Se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente al segmento izquierdo de la estructura que se produce al cortarla en algún sitio intermedio del tramo C-D, figura 1-3k. El equilibrio estático del cuerpo libre implica que



(k)

$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -5.6x + 15.0456(x - 3) - \frac{(x - 1)^2}{2} \left[ \frac{1}{3}(x - 1) \right] - M_3 = 0$$

$$M_3 = -5.6x + 15.0514x - 45.1542 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$$

$$M_3 = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 8.9456x - 44.9701$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -5.6 - \frac{(x - 1)^2}{2} + 15.0456 - V_3 = 0 \Rightarrow V_3 = -\frac{1}{2}x^2 + x + 8.9456$$

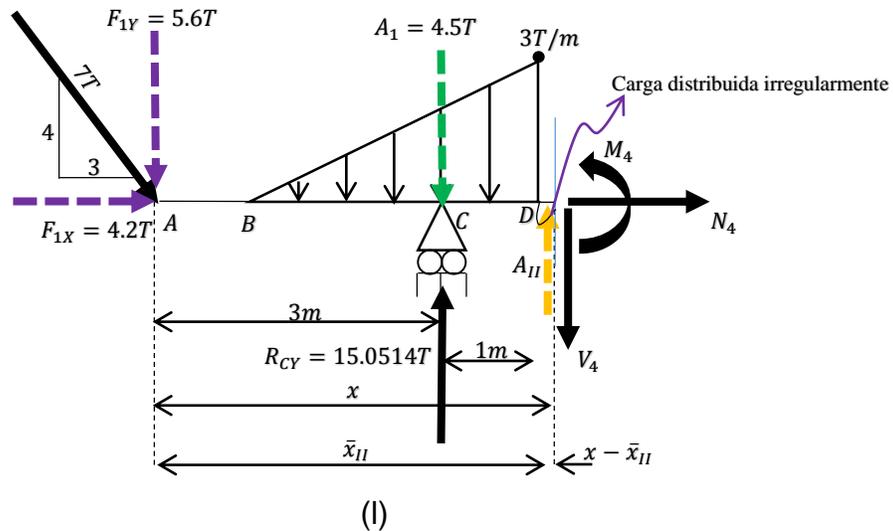
o también

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx} = \frac{d\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 8.9456x - 44.9701\right)}{dx} = -\frac{1}{2}x^2 + x + 8.9456$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow N_3 = -4.2$$

Corte en el tramo ④ (D - E). Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento (D - E) a una distancia  $x$  de A; a continuación se ofrece el diagrama de cuerpo libre que representa la porción de la estructura ubicada a la izquierda del corte, figura 1-3I.

$$4m \leq x \leq 4.45m$$



La carga concentrada equivalente de la carga distribuida irregularmente cortada es

$$A_{II} = \int_4^x \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx$$

$$= -\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x - 1346.05$$

y su línea de acción está localizada a una distancia de

$$\bar{x}_{II} = \frac{\int_4^x (x) \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx}{\int_4^x \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx}$$

Resolviendo el numerador tenemos

$$\int_4^x (x) \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx$$

$$\int_4^x \left( -\frac{1}{6}x^6 + \frac{16}{3}x^5 - \frac{401}{6}x^4 + 409.167x^3 - 1221.5x^2 + 1422x \right) dx$$

$$= -\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2 - 1067.35$$

El denominador ya fue resuelto. Por lo tanto,

$$\bar{x}_I = \frac{-\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2 - 1067.35}{-\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x - 1346.05}$$

Las acciones internas entre los puntos  $D$  y  $E$  quedan definidas como

$$\begin{aligned} & \sum_{\rightarrow} M_{corte} = 0 \\ & -5.6x - 4.5(x - 3) + 15.0456(x - 3) + A_{1c}(x - \bar{x}_I) - M_4 = 0 \\ M_4 = & -\frac{1}{252}x^7 + \frac{8}{45}x^6 - \frac{401}{120}x^5 + \frac{136389}{4000}x^4 - \frac{2443}{12}x^3 + 711x^2 - 1341.1044x \\ & + 1035.7132 \\ & + \uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -5.6 - 4.5 + 15.0456 + A_{1c} - V_4 = 0 \end{aligned}$$

$$V_4 = -\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x - 1346.1044$$

o también

$$V_4 = \frac{dM_4}{dx}$$

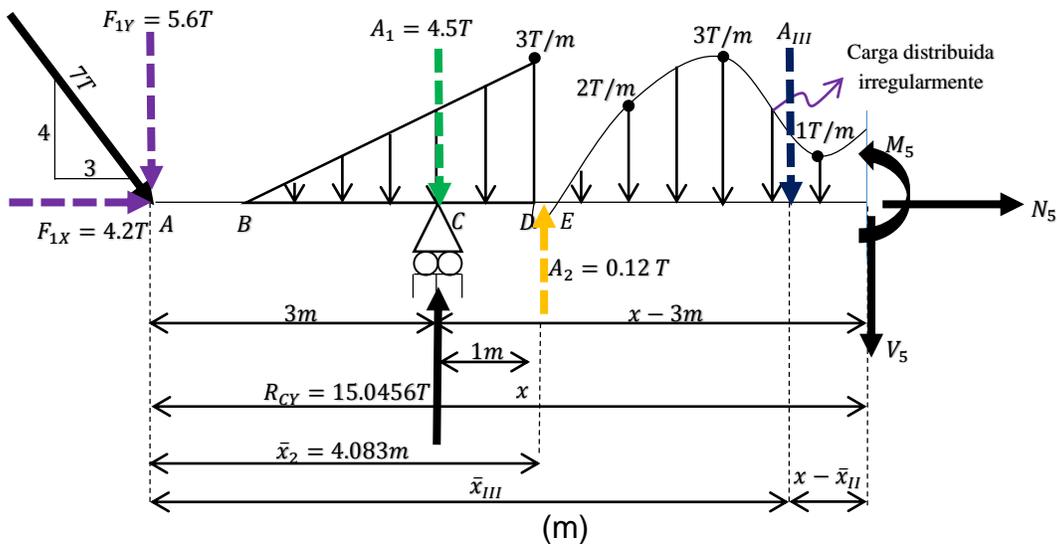
$$= \frac{d\left(-\frac{1}{252}x^7 + \frac{8}{45}x^6 - \frac{401}{120}x^5 + \frac{136389}{4000}x^4 - \frac{2443}{12}x^3 + 711x^2 - 1341.1044x + 1035.7132\right)}{dx}$$

$$V_4 = -\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x - 1346.1044$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_4 = -4.2$$

Corte en el tramo ⑤ (E - F). Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento (E - F) a una distancia  $x$  de A; en la figura 1-3m se representa el diagrama de cuerpo libre del segmento izquierdo de la viga. En consecuencia,

$$4.45m \leq x \leq 9m$$



La carga concentrada equivalente de la carga distribuida irregularmente cortada es

$$A_{III} = \int_{4.45}^x \left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right) dx$$

$$= -\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x - 1345.935$$

y su línea de acción está localizada a una distancia de

$$\bar{x}_{III} = \frac{\int_{4.45}^x (x) \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx}{\int_{4.45}^x \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx}$$

Resolviendo el numerador tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{4.45}^x (x) \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx \\ & \int_{4.45}^x \left( -\frac{1}{6}x^6 + \frac{16}{3}x^5 - \frac{401}{6}x^4 + 409.167x^3 - 1221.5x^2 + 1422x \right) dx \\ & -\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2 - 1066.85875 \end{aligned}$$

El denominador ya fue resuelto. Por lo tanto,

$$\bar{x}_{III} = \frac{-\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2 - 1066.85875}{-\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x - 1345.935}$$

Las acciones internas entre los puntos  $D$  y  $E$  quedan definidas como

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-5.6x - 4.5(x - 3) + 15.0456(x - 3) + 0.12(x - 4.083) - A_{2c}(x - \bar{x}_{III}) - M_4 = 0$$

$$M_5 = \frac{1}{252}x^7 - \frac{8}{45}x^6 + \frac{401}{120}x^5 - \frac{136389}{4000}x^4 + \frac{2443}{12}x^3 - 711x^2 + 1351.0006x - 1098.9855$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -5.6 - 4.5 + 15.0456 + 0.12 - A_{c2} - V_4 = 0$$

$$V_5 = \frac{1}{36}x^6 - \frac{16}{15}x^5 + \frac{401}{24}x^4 - \frac{136389}{1000}x^3 + \frac{2443}{4}x^2 - 1422x + 1351.0006$$

o también

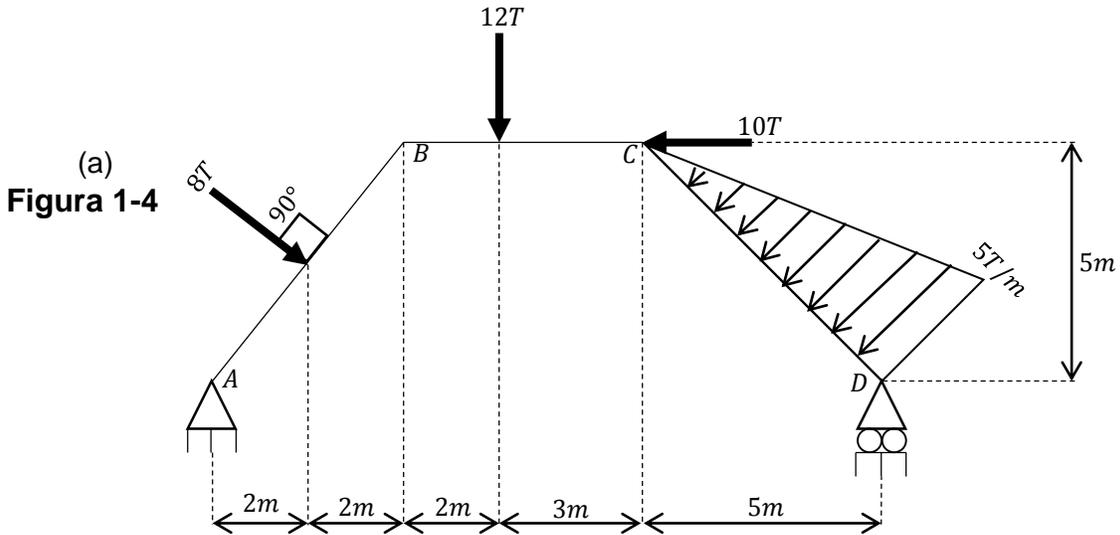
$$V_5 = \frac{dM_5}{dx}$$

$$= \frac{d \left( \frac{1}{252}x^7 - \frac{8}{45}x^6 + \frac{401}{120}x^5 - \frac{136389}{4000}x^4 + \frac{2443}{12}x^3 - 711x^2 + 1351.0006x - 1098.9855 \right)}{dx}$$



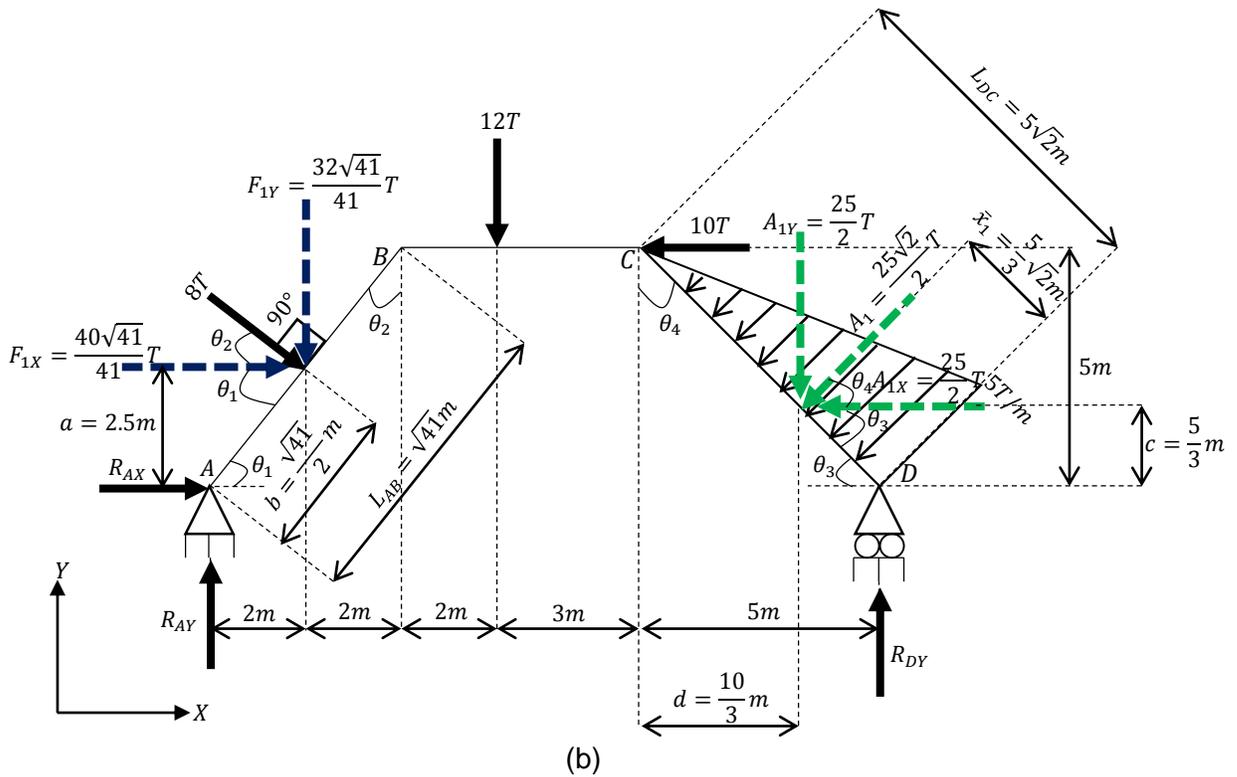
**Ejercicio 1.4 Diagramas de fuerza cortante y normal, y de momento para un pórtico.**

**Instrucciones** Dibuje los diagramas de fuerza cortante, de fuerza normal y de momento flexionante del marco visualizado en la figura 1-4a.



**SOLUCIÓN**

**Cálculo de las reacciones en los soportes**



**Diagrama de cargas.** Se muestra en la figura 1-4b.

La longitud de los miembros  $A - B$  y  $D - C$  son

$$L_{AB} = \sqrt{(4m)^2 + (5m)^2} = \sqrt{41}m$$

En consecuencia,

$$\sin\theta_2 = \frac{4}{\sqrt{41}} \quad \cos\theta_2 = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

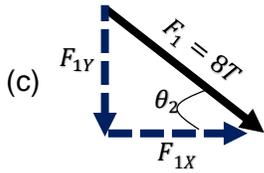
$$\frac{4m}{\sqrt{41}m} = \frac{2m}{b} \Rightarrow b = \frac{(2m)(\sqrt{41}m)}{4m} = \frac{\sqrt{41}}{2}m \quad \frac{4m}{5m} = \frac{2m}{a} \Rightarrow a = \frac{(5m)(2m)}{4m} = 2.5m$$

$$L_{DC} = \sqrt{(5m)^2 + (5m)^2} = 5\sqrt{2}m$$

Por lo tanto,

$$\sin\theta_4 = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos\theta_4 = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \theta_3 = \theta_4$$

Con base en la figura 1-4c, las componentes rectangulares de la carga puntual de  $8T$  para el plano  $X - Y$  son



$$\sin\theta_2 = \frac{F_{1Y}}{F_1} \Rightarrow F_{1Y} = F_1 \sin\theta_2 = 8T \left( \frac{4}{\sqrt{41}} \right) = \frac{32\sqrt{41}}{41}T$$

$$\cos\theta_2 = \frac{F_{1X}}{F_1} \Rightarrow F_{1X} = F_1 \cos\theta_2 = 8T \left( \frac{5}{\sqrt{41}} \right) = \frac{40\sqrt{41}}{41}T$$

A continuación se efectúa un análisis de la carga con variación lineal.

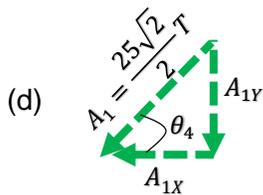
La carga concentrada equivalente es

$$A_1 = \frac{(5\sqrt{2}m)(5T/m)}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}T$$

y su punto de aplicación se localiza a una distancia de

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{3}(5\sqrt{2}m) = \frac{5}{3}\sqrt{2}m$$

A partir de la figura 1-4d, las componentes rectangulares de la resultante  $A_1$  son



$$\sin\theta_4 = \frac{A_{1Y}}{A_1} \Rightarrow A_{1Y} = A_1 \sin\theta_4 = \frac{25\sqrt{2}}{2}T \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{25}{2}T$$

$$\cos\theta_4 = \frac{A_{1X}}{A_1} \Rightarrow A_{1X} = A_1 \cos\theta_4 = \frac{25\sqrt{2}}{2}T \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{25}{2}T$$

Las distancias  $c$  y  $d$  pueden ser deducidas por trigonometría como sigue:

$$\frac{5m}{5\sqrt{2}m} = \frac{c}{\frac{5}{3}\sqrt{2}m} \Rightarrow c = \frac{5m\left(\frac{5}{3}\sqrt{2}m\right)}{5\sqrt{2}m} = \frac{5}{3}m$$

$$d = \sqrt{\left[(5\sqrt{2}m) - \left(\frac{5}{3}\sqrt{2}m\right)\right]^2 - \left(5m - \frac{5}{3}m\right)^2} = \frac{10}{3}m$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum MA = 0 &\Rightarrow \left(\frac{40\sqrt{41}}{41}\right)(2.5) + \left(\frac{32\sqrt{41}}{41}\right)(2) + (12)(6) - (10)(5) + \left(\frac{25}{2}\right)\left(9 + \frac{10}{3}\right) \\ &- \left(\frac{25}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right) - (R_{DY})(14) = 0 \Rightarrow R_{DY} = 12.9247 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 12.9247T \uparrow \end{aligned}$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} + \frac{40\sqrt{41}}{41} - 10 - \frac{25}{2} = 0 \Rightarrow R_{AX} = 16.253 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 16.253T \rightarrow$$

$$\uparrow + \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - \frac{32\sqrt{41}}{41} - 12 - \frac{25}{2} + 12.9247 = 0 \Rightarrow R_{AY} = 16.5729$$

$$\therefore R_{AY} = 16.5729T \uparrow$$

Como comprobación, se debe cumplir que la suma de momentos respecto de  $D$  es nula.

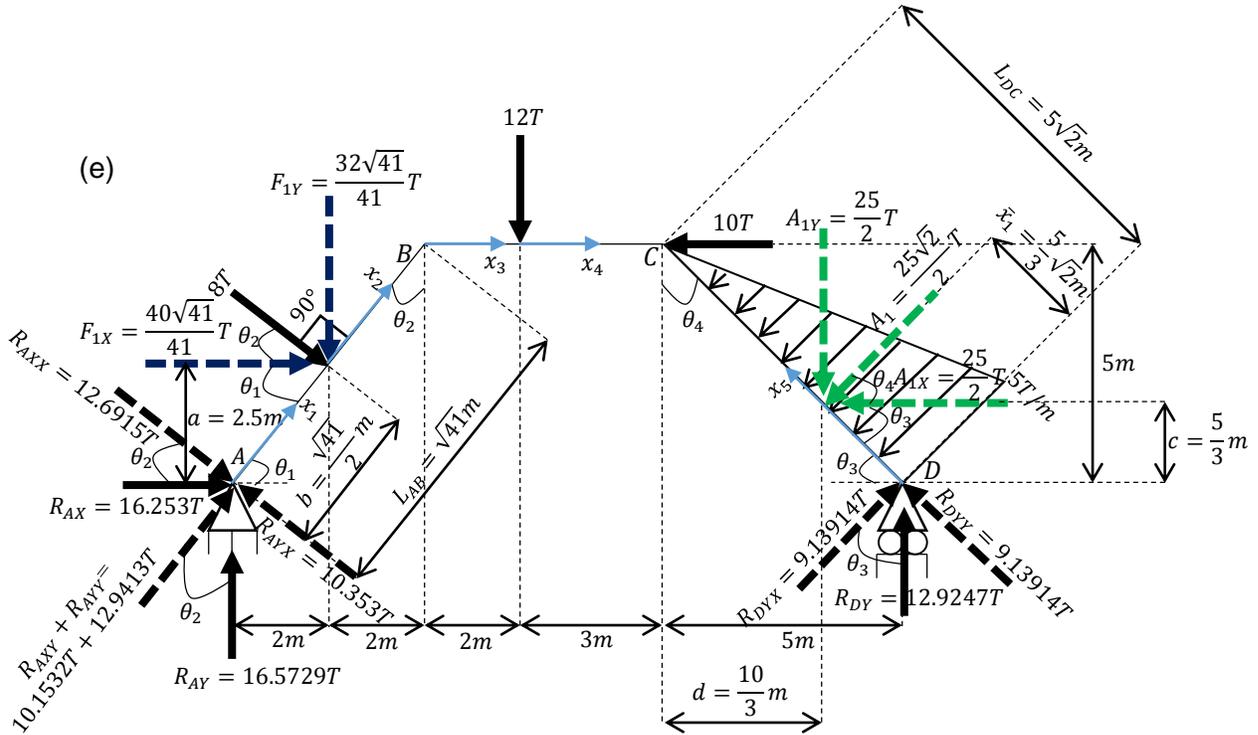
$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum MD &= -\left(\frac{25}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right) - \left(\frac{25}{2}\right)\left(5 - \frac{10}{3}\right) - (10)(5) - (12)(8) - \left(\frac{32\sqrt{41}}{41}\right)(12) \\ &+ \left(\frac{40\sqrt{41}}{41}\right)(2.5) + (16.5729)(14) \approx 0 \text{ ok} \end{aligned}$$

**Funciones de la fuerza cortante, de la fuerza normal y del momento flector**

Los resultados obtenidos se muestran en el diagrama de la figura 1-4e.

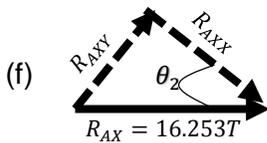
En el marco se pueden distinguir cinco regiones distintas. En el miembro  $A - B$ , un primer tramo va desde  $A$  hasta el punto de aplicación de la carga puntual de  $8T$  y un segundo tramo sería la parte restante del miembro. Un tercer y cuarto tramo se observan por inspección en el miembro  $B - C$  debido a la aplicación de la carga puntual de  $12T$ . En el miembro  $C - D$  no hay variación en la distribución de la carga, por lo que toda su longitud comprendería el quinto tramo. Para obtener funciones que definan la variación de las acciones internas es necesario cortar la estructura a través de secciones arbitrarias en los tramos mencionados.

Aunque se puede establecer una sola coordenada  $x$  por miembro, en este caso se opta por definir una coordenada  $x$  para cada tramo distinto, lo cual también es válido. En la figura pueden notarse claramente la forma en las que han sido definidas las coordenadas  $x_1, x_2, x_3, x_4$  y  $x_5$ , las cuales cubren perfectamente cada una de las regiones de la estructura.



Con base en las figuras 1-4f, 1-4g y 1-4h, se calculan las componentes rectangulares de las reacciones en los apoyos que serán útiles al efectuar el equilibrio en algunos diagramas de cuerpo libre originados al cortar la estructura.

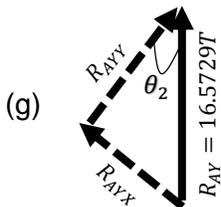
- Para  $R_{AX} = 16.253T$



$$\sin \theta_2 = \frac{R_{AXY}}{R_{AX}} \Rightarrow R_{AXY} = R_{AX} \sin \theta_2 = 16.253T \left( \frac{4}{\sqrt{41}} \right) = 10.1532T$$

$$\cos \theta_2 = \frac{R_{AXX}}{R_{AX}} \Rightarrow R_{AXX} = R_{AX} \cos \theta_2 = 16.253T \left( \frac{5}{\sqrt{41}} \right) = 12.6915T$$

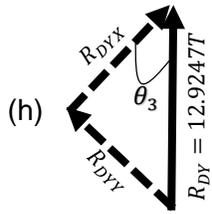
- Para  $R_{AY} = 16.5729T$



$$\sin \theta_2 = \frac{R_{AYX}}{R_{AY}} \Rightarrow R_{AYX} = R_{AY} \sin \theta_2 = 16.5729T \left( \frac{4}{\sqrt{41}} \right) = 10.353T$$

$$\cos \theta_2 = \frac{R_{AYY}}{R_{AY}} \Rightarrow R_{AYY} = R_{AY} \cos \theta_2 = 16.5729T \left( \frac{5}{\sqrt{41}} \right) = 12.9413T$$

- Para  $R_{DY} = 12.9247T$

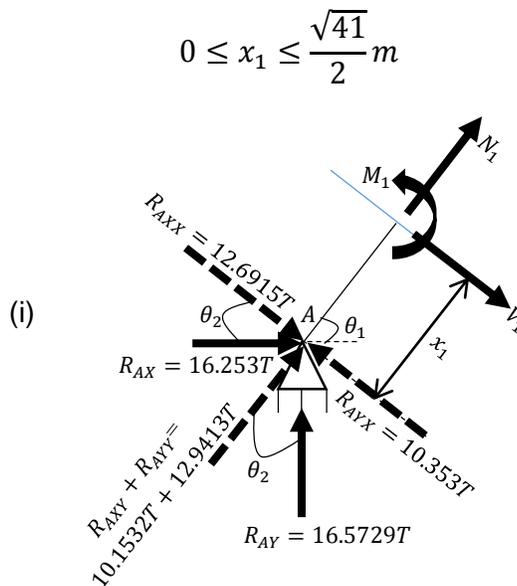


$$\sin \theta_3 = \frac{R_{DYY}}{R_{DY}} \Rightarrow R_{DYY} = R_{DY} \sin \theta_3 = 12.9247T \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 9.13914T$$

$$\cos \theta_3 = \frac{R_{DYX}}{R_{DY}} \Rightarrow R_{DYX} = R_{DY} \cos \theta_3 = 12.9247T \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 9.13914T$$

Miembro A - B.

Corte en el tramo ①. Se secciona la estructura perpendicularmente al eje del miembro a una distancia  $x_1$  de A, antes del punto donde se encuentra aplicada la carga puntual de  $8T$ ; el diagrama de cuerpo libre de la sección cortada, figura 1-4i, con su análisis son



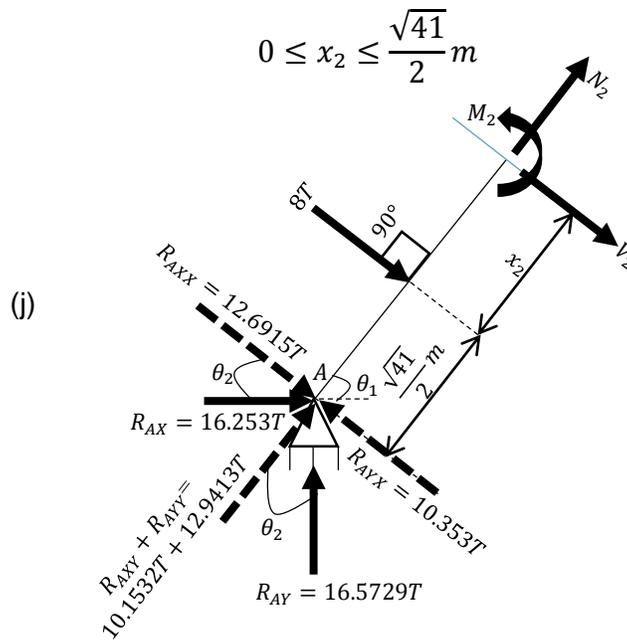
$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow 10.353(x_1) - 12.6915(x_1) - M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = -2.3385x_1$$

$$\text{en } x_1 = \frac{\sqrt{41}}{2} m, M_1 = -7.48685T \cdot m$$

$$\sum FX = 0 \Rightarrow 12.6915 - 10.353 + V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = -2.3385$$

$$\sum FY = 0 \Rightarrow 10.1532 + 12.9413 + N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = -23.0945$$

Corte en el tramo ②. Se secciona al marco perpendicularmente al eje del miembro a una distancia  $x_2$  del punto de aplicación de la carga puntual de  $8T$ ; en la figura 1-4j se muestra el diagrama de cuerpo libre de la porción inferior de la estructura para definir las acciones internas. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene



$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow (10.353 - 12.6915) \left( \frac{\sqrt{41}}{2} + x_2 \right) - 8(x_2) - M_2 = 0$$

$$M_2 = -10.3385x_2 - 7.48685$$

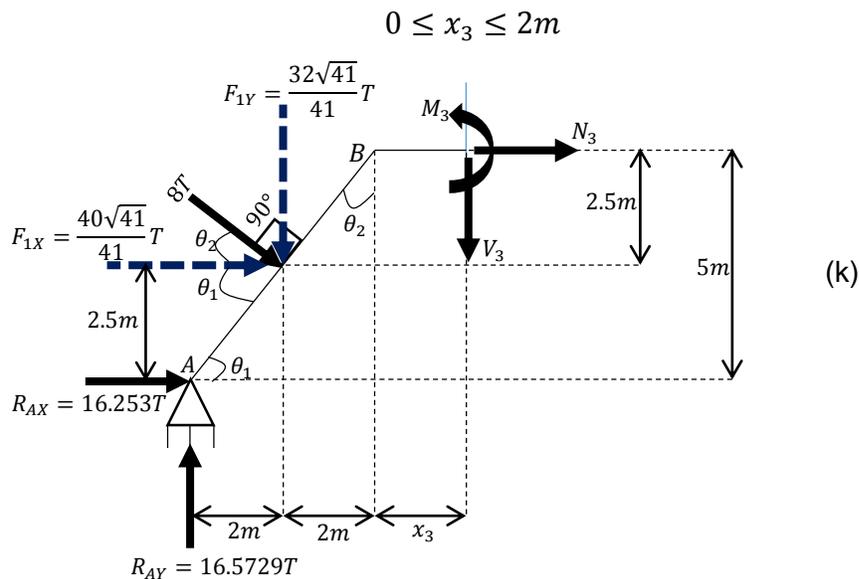
en  $x_2 = 0, M_2 = -7.48685T \cdot m$ ; en  $x_2 = \frac{\sqrt{41}}{2}m, M_2 = -40.5862T \cdot m$

$$\sum FX = 0 \Rightarrow 12.6915 - 10.353 + 8 + V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = -10.3385$$

$$\sum FY = 0 \Rightarrow N_2 = -23.0945$$

Miembro B - C.

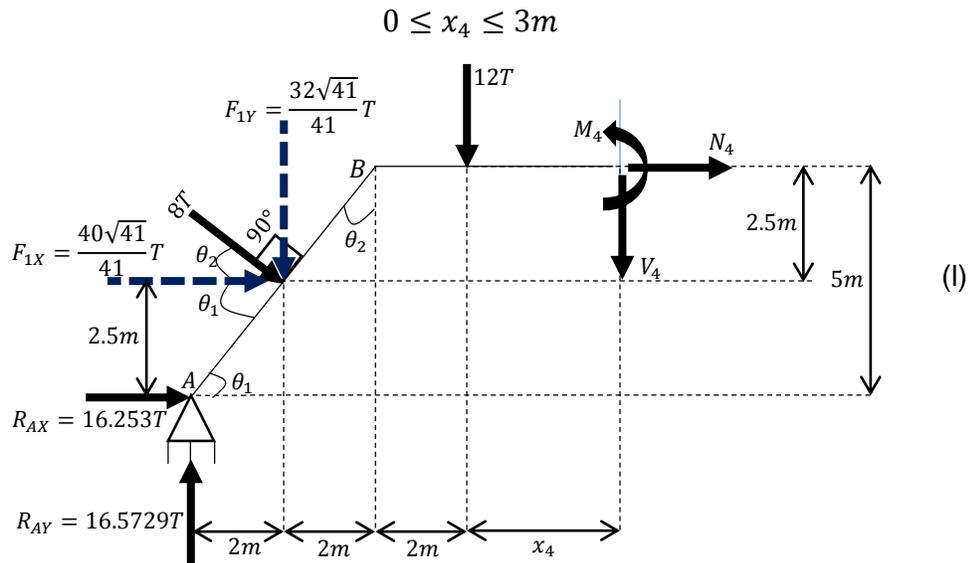
Corte en el tramo (3). Se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a



la porción izquierda de la estructura que se produce al cortarla (perpendicularmente al eje del miembro) en algún sitio intermedio del tramo comprendido desde  $B$  hasta el punto de ubicación de la fuerza de  $12T$ , figura 1-4k. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum M_{corte} &= 0 \\ (16.5729)(4 + x_3) - 16.253(5) - \left(\frac{40\sqrt{41}}{41}\right)(2.5) - \left(\frac{32\sqrt{41}}{41}\right)(2 + x_3) - M_3 &= 0 \\ M_3 &= 11.5753x_3 - 40.5859 \\ x_3 = 0, M_3 &= -40.5859T.m; x_3 = 2m, M_3 = -17.4352T.m \\ +\uparrow \sum F_Y &= 0 \Rightarrow 16.5729 - \frac{32\sqrt{41}}{41} - V_3 = 0 \Rightarrow V_3 = 11.5753 \\ +\rightarrow \sum F_X &= 0 \Rightarrow 16.253 + \frac{40\sqrt{41}}{41} + N_3 = 0 \Rightarrow N_3 = -22.5 \end{aligned}$$

Corte en el tramo ④. Se secciona al marco perpendicularmente al eje del miembro a una distancia  $x_4$  del punto donde está aplicada la fuerza de  $12T$ ; en la figura 1-4l se muestra el diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la estructura. El equilibrio estático del cuerpo libre implica que



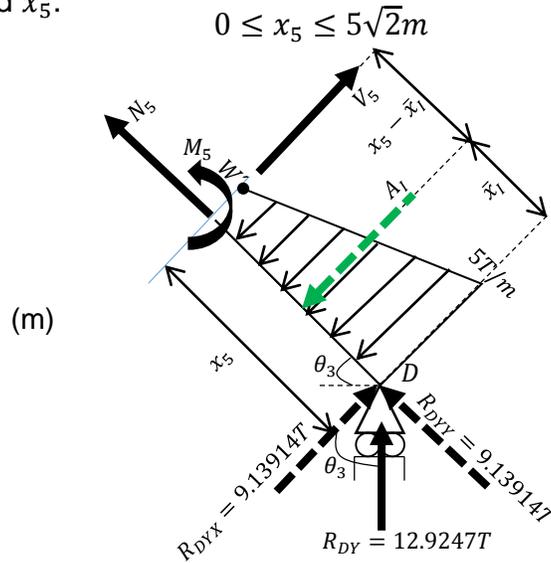
$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum M_{corte} &= 0 \\ 16.5729(6 + x_4) - 16.253(5) - \frac{40\sqrt{41}}{41}(2.5) - \frac{32\sqrt{41}}{41}(4 + x_4) - 12(x_4) - M_4 &= 0 \\ M_4 &= -0.42466x_4 - 17.4352 \\ \text{en } x_4 = 0, M_4 &= -17.4352T.m; \text{ en } x_4 = 3m, M_4 = -18.7092T.m \end{aligned}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 16.5729 - \frac{32\sqrt{41}}{41} - 12 - V_4 = 0 \Rightarrow V_4 = -0.42466$$

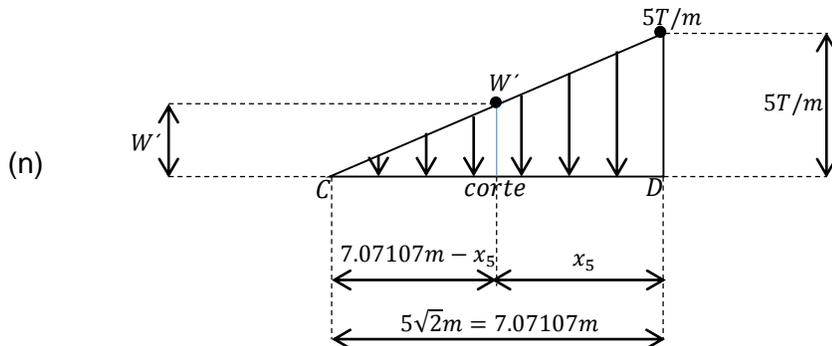
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_4 = -22.5$$

Miembro  $D - C$ .

Corte en el tramo ⑤. Se secciona la estructura perpendicularmente al eje del miembro en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $D - C$ ) a una distancia  $x_5$  de  $D$ ; en la figura 1-4m se muestra un diagrama de cuerpo libre del segmento de estructura con longitud  $x_5$ .

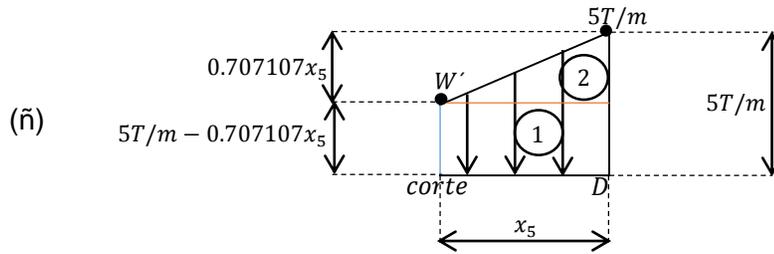


Se procede a realizar un análisis de la carga trapezoidal. El siguiente esquema, figura 1-4n, en el que se ha rotado el miembro  $D - C$ , es útil para determinar el valor en función de  $x_3$  de la intensidad  $W_3$ . Aplicando triángulos semejantes se tiene



$$\frac{5}{7.07107} = \frac{W'}{7.07107 - x_5} \Rightarrow W' = \frac{5(7.07107 - x_5)}{7.07107} = 5 - 0.707107x_5$$

A partir de la figura 1-4ñ se determina el área  $A_I$  bajo la recta que representa la fuerza resultante. Esta fuerza actúa a través del centroide de su área  $\bar{x}_I$ .



$$A_I = A_1 + A_2 = (x_5)(5 - 0.707107x_5) + \frac{(x_5)(0.707107x_5)}{2}$$

$$= (5x_5 - 0.707107x_5^2) + (0.353554x_5^2) = 5x_5 - 0.353554x_5^2$$

$$\bar{x}_I = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{(5x_5 - 0.707107x_5^2)\left(\frac{1}{2}x_5\right) + (0.353554x_5^2)\left(\frac{1}{3}x_5\right)}{5x_5 - 0.353554x_5^2} = \frac{2.5x_5^2 - 0.235702x_5^3}{5x_5 - 0.353554x_5^2}$$

Si se aplican las ecuaciones de equilibrio en el diagrama de cuerpo libre, resulta

$$\curvearrowright \sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$-9.13914x_5 + (5x_5 - 0.353554x_5^2)\left(x_5 - \frac{2.5x_5^2 - 0.235702x_5^3}{5x_5 - 0.353554x_5^2}\right) - M_5 = 0$$

$$M_5 = -0.117851x_5^3 + 2.5x_5^2 - 9.13914x_5$$

$$\text{en } x_5 = 5\sqrt{2}m, M_5 = 18.7098T \cdot m$$

$$\nearrow + \sum FX = 0 \Rightarrow 9.13914 - (5x_5 - 0.353554x_5^2) + V_5 = 0$$

$$V_5 = -0.353554x_5^2 + 5x_5 - 9.13914$$

$$\nwarrow + \sum FY = 0 \Rightarrow N_5 + 9.13914 = 0 \Rightarrow N_5 = -9.13914$$

### Diagramas de fuerza cortante, de momento flector y de fuerza normal

Diagrama de fuerza cortante, figura 1-4o.

Para encontrar la posición del cortante igual a cero en el miembro  $D - C$ , es decir, donde el momento es máximo, hacemos

$$0 = -0.353554x_5^2 + 5x_5 - 9.13914$$

Al resolver la ecuación de segundo grado resulta

$$x_5 = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(-0.353554)(-9.13914)}}{2(-0.353554)} \Rightarrow x_{5,1} = 2.15674; x_{5,2} = 11.9854$$

Como la solución debe de estar dentro del intervalo real del miembro  $[0, 5\sqrt{2}m]$ , se infiere que  $x_{5max} = 2.15674m$ .

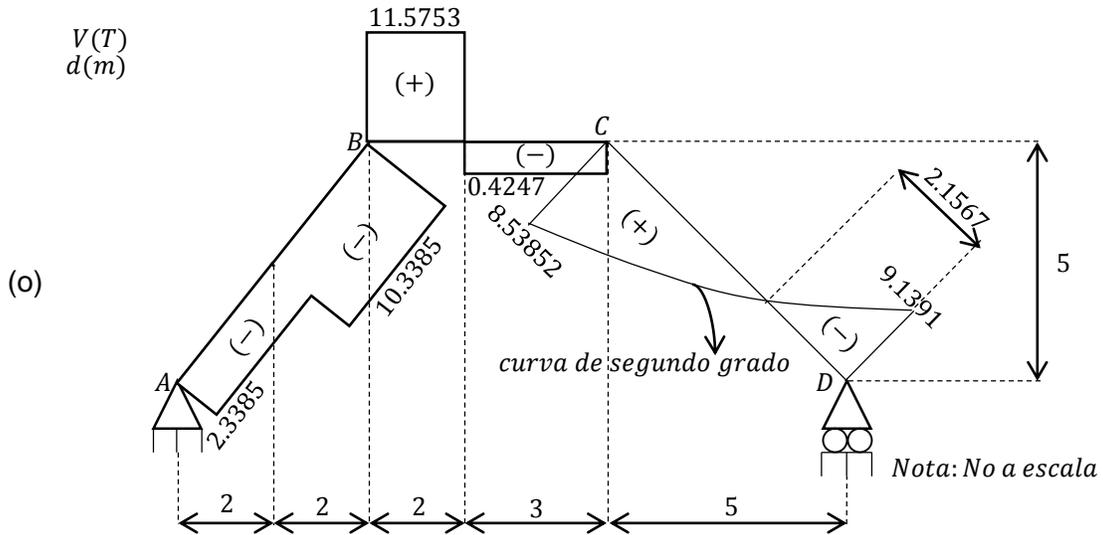
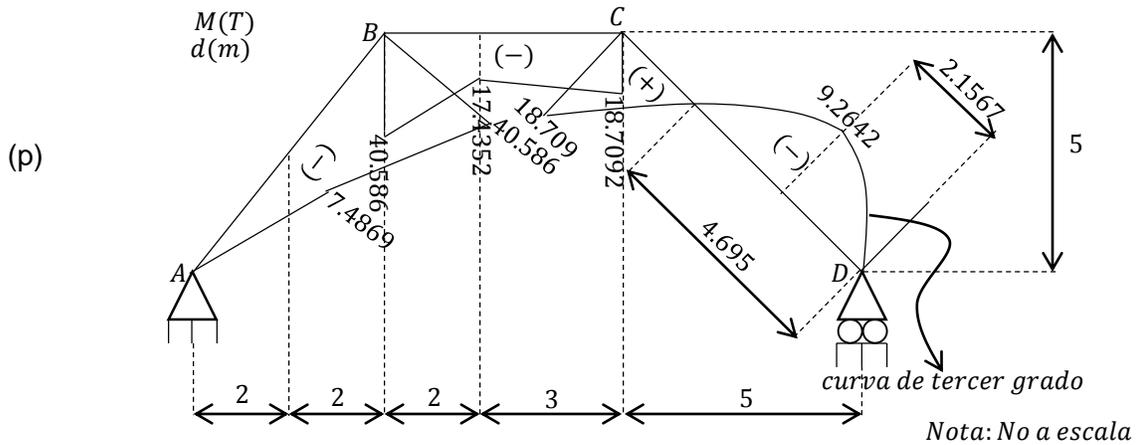


Diagrama de momento flexionante, figura 1-4p.



Un valor máximo del momento en el miembro  $D - C$  puede ser hallado sustituyendo  $x_5 = x_{5max}$  en la ecuación de  $M_5$ .

$$M_{5max1} = -0.117851(2.15674)^3 + 2.5(2.15674)^2 - 9.13914(2.15674) = -9.26423T.m$$

El otro momento máximo se determina evaluando  $M_5$  en el extremo  $x_5 = 5\sqrt{2}m$ .

$$M_{5max2} = -0.117851(5\sqrt{2})^3 + 2.5(5\sqrt{2})^2 - 9.13914(5\sqrt{2}) = 18.7099T.m$$

La posición del momento igual a cero en este mismo miembro puede hallarse al hacer

$$0 = -0.117851x_5^3 + 2.5x_5^2 - 9.13914x_5$$

Como el momento nulo debe estar posicionado en el intervalo real del miembro  $[0, 5\sqrt{2}m]$ , se cumple que una de las tres raíces esté dentro del rango de valores citado; tal raíz puede ser calculada aplicando el método de tanteos. Para ello, evaluamos el polinomio  $f(x) = -0.117851x_5^3 + 2.5x_5^2 - 9.13914x_5$  en el intervalo mencionado y en donde haya un cambio de signo tenemos una solución; iteramos "n" veces hasta que nuestra solución sea exacta o lo más exacta posible (cuando  $f(x) = 0$  o  $f(x) \sim 0$ ). Los resultados obtenidos se visualizan en la tabla 1-3.

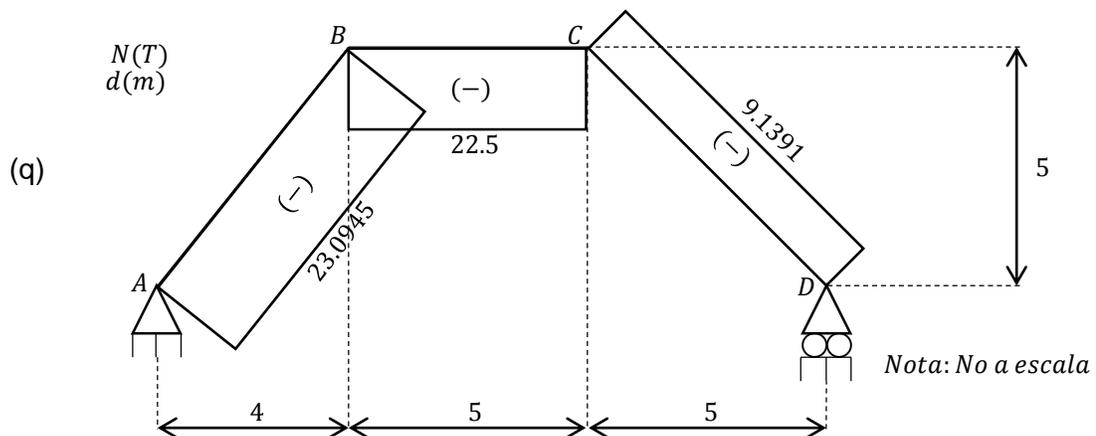
$x_5$	$f(x_5)$	4	-4.099	$x_5$	$f(x_5)$	4.68	-0.095
0	0	4.1	-3.567	4.6	-0.611	4.69	-0.03
1	-6.756	4.3	-3.015	4.61	-0.547	4.7	0.0354
2	-9.221	4.3	-2.443	4.62	-0.483	4.69	-0.03
3	-8.099	4.4	-1.851	4.63	-0.419	4.691	-0.023
4	-4.099	4.5	-1.24	4.64	-0.354	4.692	-0.016
5	2.0729	4.6	-0.611	4.65	-0.29	4.693	-0.01
6	9.7093	4.7	0.0353	4.66	-0.255	4.694	-0.0039
7.0711	18.7099	4.8	0.69875	4.67	-0.16	4.695	0.0027

Tabla 1-3

$$\therefore x_{5,1} = 4.695m$$

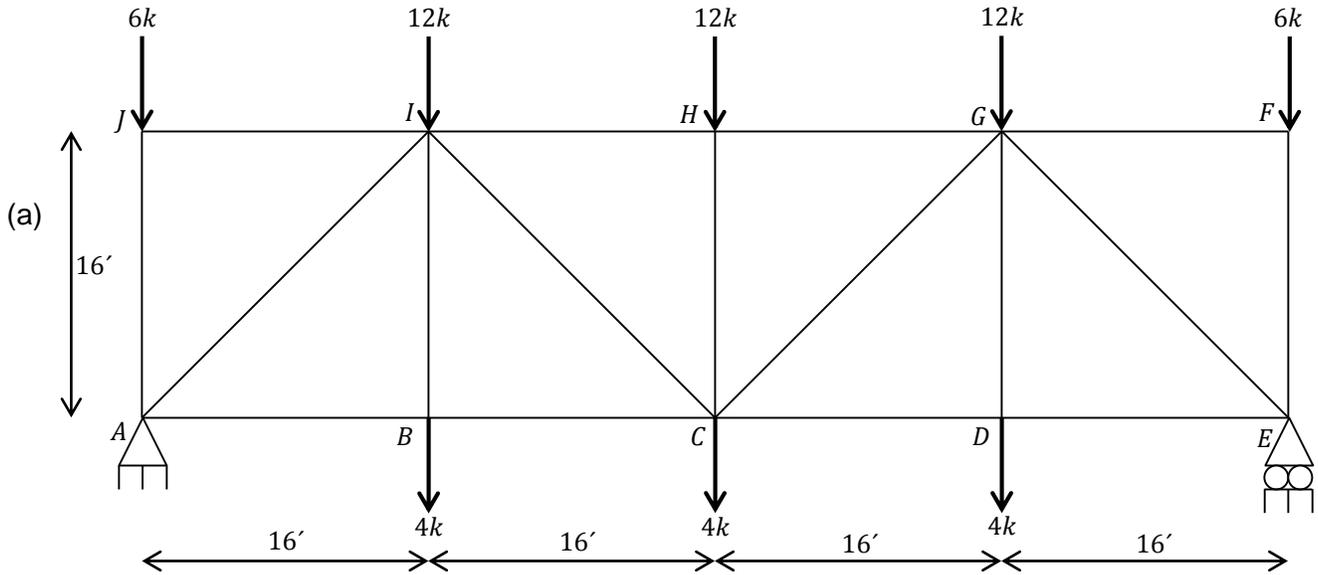
Evidentemente el momento también es cero en  $x_{5,2} = 0$ , es decir, en el punto D.

Diagrama de fuerza normal, figura 1-4q.



**Ejercicio 1.5 Fuerzas en las barras de una armadura simétrica.**

**Instrucciones** Calcule las reacciones en los soportes y use el método de los nodos para determinar las fuerzas internas de la armadura que se observa en la figura 1-5a. Indique si los elementos están en tensión o compresión.



**Figura 1-5**

**SOLUCIÓN**

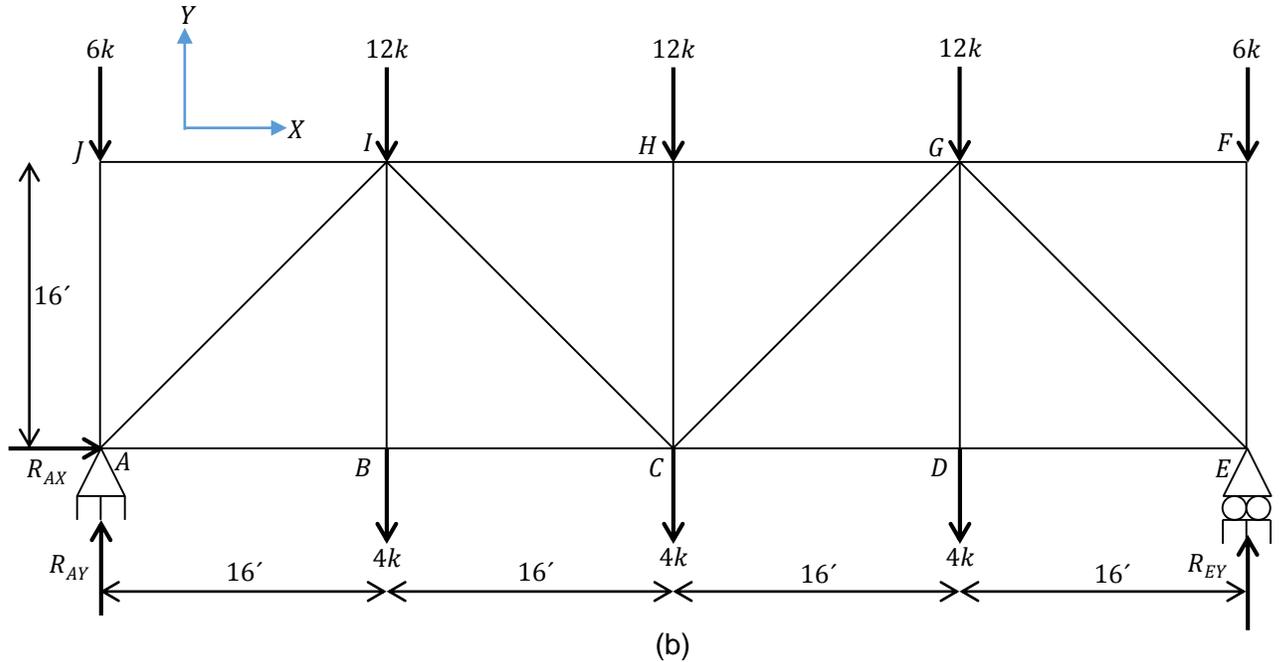
**Verificación del grado de indeterminación**

La armadura de este ejemplo es isostática externamente debido a que se tienen  $r = 3$  reacciones de apoyo (una horizontal y una vertical en el soporte articulado A, y una vertical en el soporte simple E), tres equilibrios de equilibrio ( $\sum FX = 0, \sum FY = 0, \sum M = 0$ ) y ninguna ecuación de condición, es decir,  $c = 0$ . Por otra parte, hay  $b = 17$  barras y  $j = 10$  nodos (etiquetados desde A hasta J). Si  $b + r = 17 + 3 = 20$  y  $2j = 2(10) = 20$ , entonces  $b + r = 2j$ . Por lo tanto, la armadura es isostática internamente.

**Cálculo de las reacciones en los apoyos**

Las reacciones en los soportes se determinan de la misma forma que en las vigas y los marcos. Se realiza un diagrama de cargas en el que aparezcan las fuerzas externas que se aplican a la armadura y las fuerzas reactivas cuyos sentidos deben suponerse arbitrariamente por ser incógnitas. Se orientan los ejes X y Y a lo largo de las líneas que ofrecen la reducción de fuerzas más simple en sus componentes X y Y. Se plantean las ecuaciones de equilibrio y en su caso, las ecuaciones de

condición, y se resuelven; se invierte el sentido de cada fuerza que se propuso en el diagrama cuya magnitud resulte negativa en la solución de las ecuaciones de equilibrio. En la figura 1-5b se representa el diagrama de cargas de la estructura.



Al aplicar las ecuaciones de equilibrio en una secuencia y al emplear los resultados calculados previamente, se obtiene

$$\curvearrowright \sum MA = 0$$

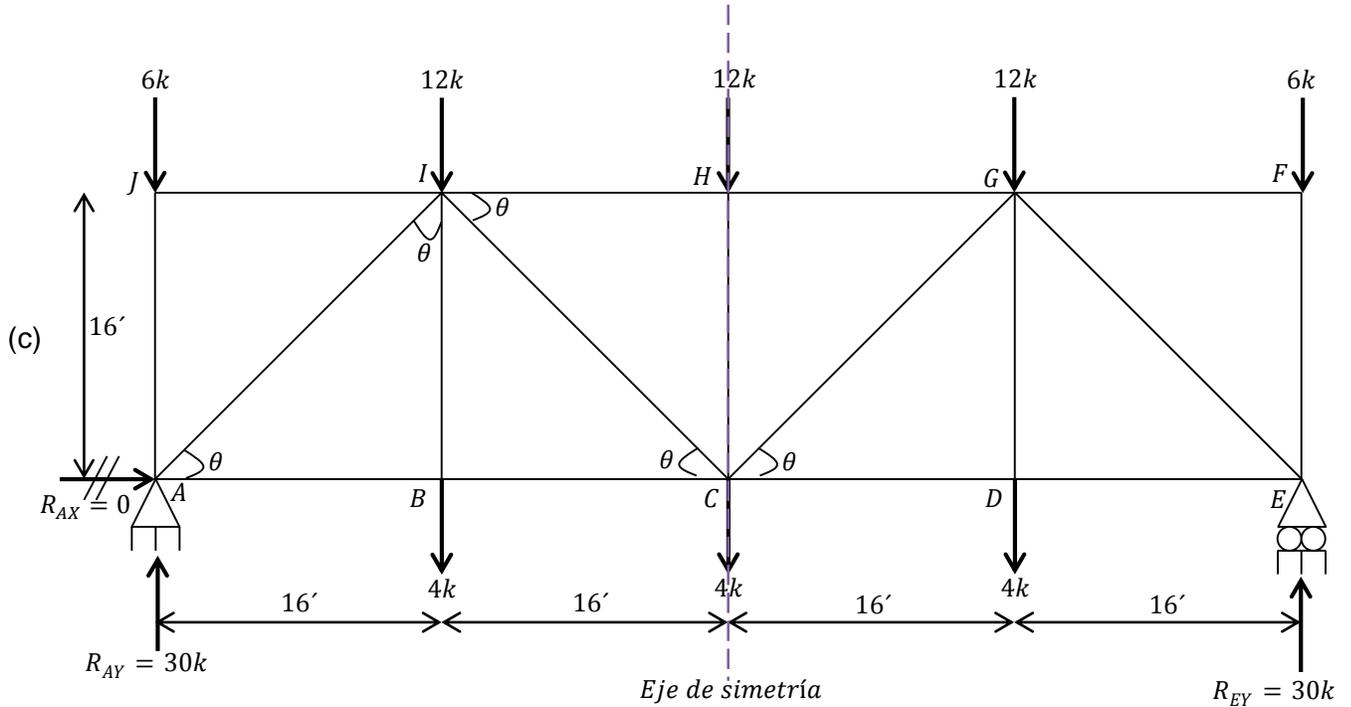
$$12(16) + 4(16) + 12(32) + 4(32) + 12(48) + 4(48) + 6(64) - R_{EY}(64) = 0$$

$$R_{EY} = -\frac{1920}{-64} \Rightarrow \therefore R_{EY} = 30k \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -6 - 12 - 4 - 12 - 4 - 12 - 4 - 6 + 30 + R_{AY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 30k \uparrow$$

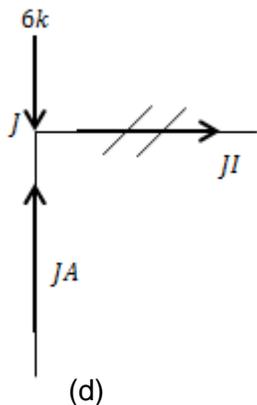
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 0$$

Como era de esperarse, al ser todas las cargas verticales, la reacción horizontal es nula. Los resultados obtenidos se visualizan en la figura 1-5c; obsérvese que sólo es necesario determinar las fuerzas en la mitad de los elementos debido a la simetría en la estructura tanto con respecto a la carga como a la geometría.



**Método de los nodos**

Nodo *J*. Para calcular las fuerzas internas, se empieza con el nodo (junta) *J*, ya que en él sólo hay dos fuerzas desconocidas, que es el número máximo de fuerzas desconocidas que puede haber en un nodo a analizar, así que también se pudo haber iniciado con el nodo *F*. Se representa el diagrama de cuerpo libre del nodo, figura 1-5d; el sentido de las incógnitas *JA* y *JI* se propone arbitrariamente. Los ejes *X – Y* han sido orientados de manera horizontal y vertical para mayor facilidad. Se plantearon entonces, para este nodo, las dos ecuaciones de equilibrio que corresponden a fuerzas concurrentes en un plano, y a partir de estas ecuaciones se determinaron ambas fuerzas desconocidas. Una respuesta positiva indica que el sentido propuesto es correcto, mientras que una respuesta negativa indica que el sentido que se supuso debe ser invertido. Así mismo, recuerde que un elemento en

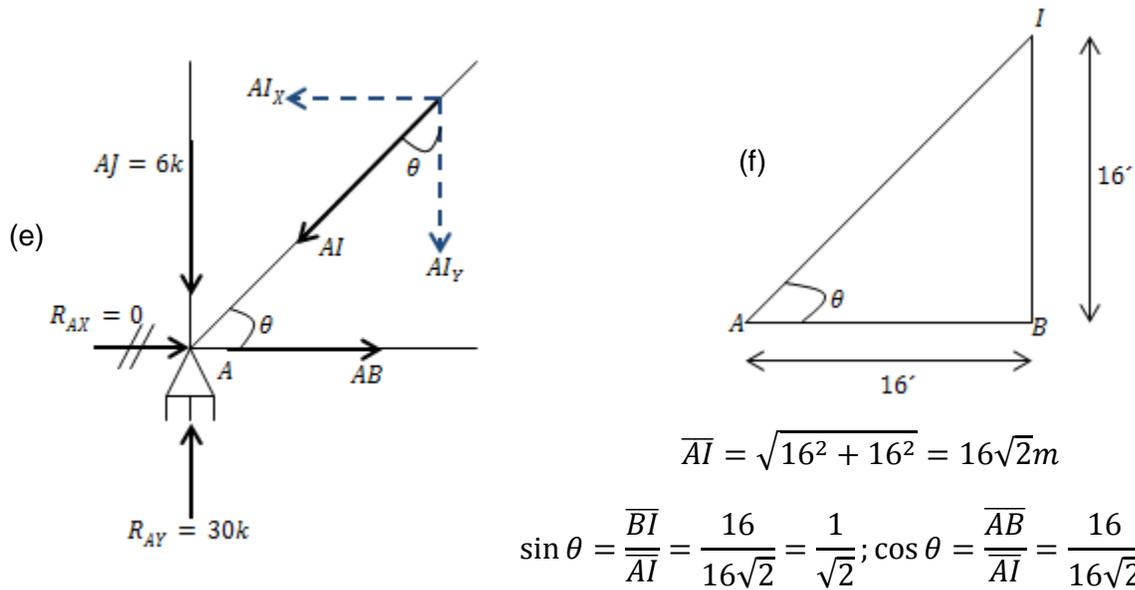


$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore JI = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -6 + JA = 0 \Rightarrow \therefore JA = 6k \text{ (Compresión)}$$

compresión “empuja” a la junta y un elemento en tensión “jala” a la junta. Una vez calculada una fuerza de barra desconocida, deben usarse su magnitud y sentido correctos (tensión o compresión) en los diagramas de cargas de los nodos subsecuentes. Lo explicado corresponde al algoritmo que debe seguirse para analizar un nodo.

Nodo A, figura 1-5e. A continuación se analiza este nodo, ya que al haber calculado anteriormente la fuerza del elemento  $J - A$ , sólo quedaban dos incógnitas, las fuerzas  $AB$  y  $AI$ .



Con base en la figura 1-5f, se han determinado  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$  debido a que las componentes rectangulares horizontal y vertical de la fuerza  $AI$  involucran esos términos, en forma respectiva. Como el carácter (tensión o compresión) debe ser el mismo en los dos nodos que definen el elemento, se observa que la fuerza interna de la barra  $A - J$  empuja a la junta  $A$  tal y como lo hace con  $J$ . El análisis se hace también con las dos ecuaciones de equilibrio correspondientes a fuerzas concurrentes en un plano.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - AJ - AI_y = 0 \Rightarrow 30 - 6 - AI(\cos \theta) = 0$$

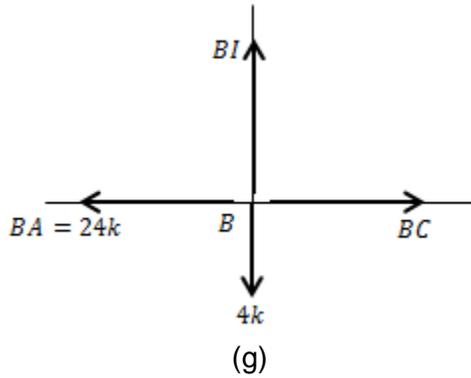
$$24 - AI\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \Rightarrow AI = -\frac{24}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \therefore AI = 33.9411k \text{ (Compresión)}$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow AB - AI_x = 0 \Rightarrow AB - AI(\sin \theta) = 0$$

$$AB = (33.9411) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \therefore AB = 24k \text{ (Tensión)}$$

De forma análoga, se efectúa el análisis de cada uno de los nodos restantes.

Nodo B, figura 1-5g.



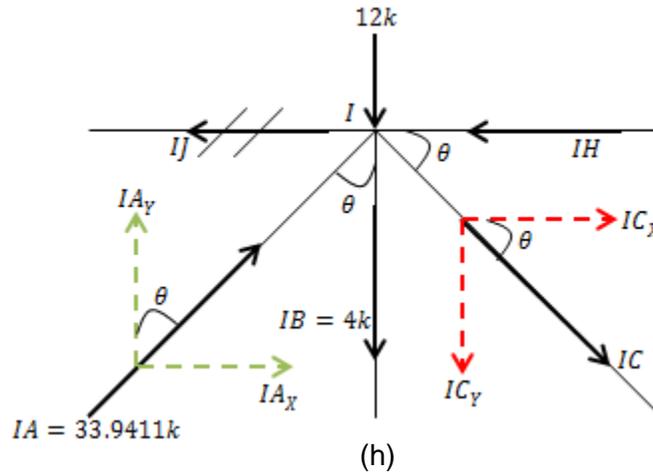
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -BA + BC = 0 \Rightarrow BC = BA$$

$$\therefore BC = 24k \text{ (Tensión)}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow BI - 4 = 0$$

$$\therefore BI = 4k \text{ (Tensión)}$$

Nodo I, figura 1-5h.



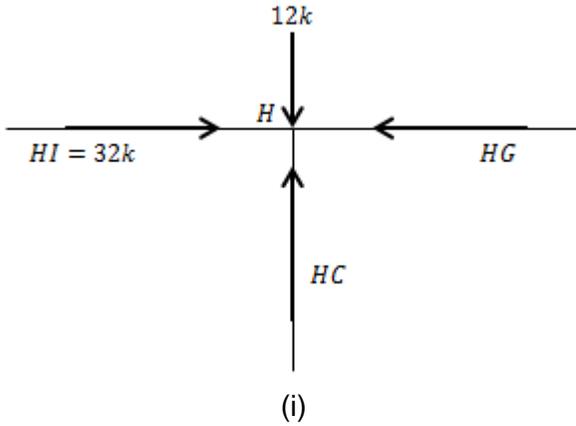
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -12 - IB + AI_y - IC_y = 0 \Rightarrow IC(\sin \theta) = -12 - 4 + IA(\cos \theta)$$

$$IC \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -16 + (33.9411) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow IC = \frac{8}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \therefore IC = 11.3137k \text{ (Tensión)}$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow IA_x + IC_x - IH - IJ = 0 \Rightarrow IA(\sin \theta) + IC(\cos \theta) - IH - 0 = 0$$

$$IH = (33.9411) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + (11.3137) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \therefore IH = 32k \text{ (Compresión)}$$

Nodo H, figura 1-5i.



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$HI - HG = 0 \Rightarrow HI = HG$$

$$\therefore HG = 32k \text{ (Compresión)}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$HC - 12 = 0 \Rightarrow \therefore HC = 12k \text{ (Compresión)}$$

Por lo tanto,

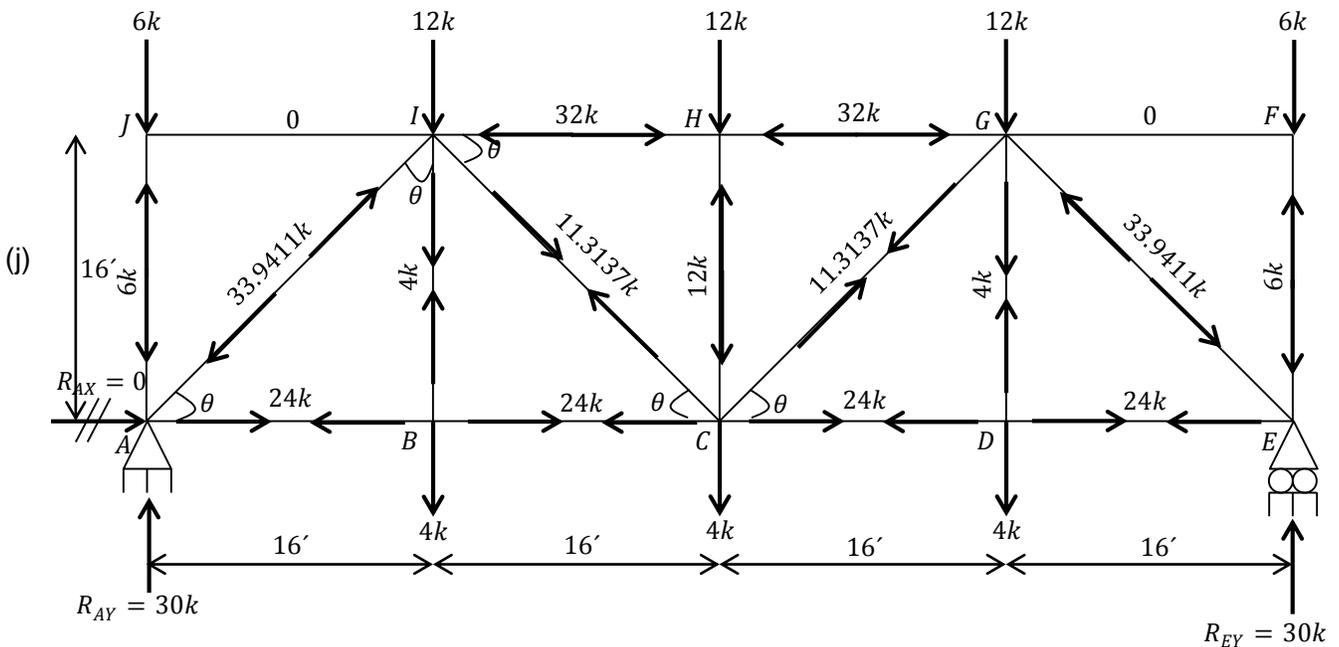
$$FG = JI = 0$$

$$EF = JA = 6k \text{ (Compresión)} \quad EG = AI = 33.9411k \text{ (Compresión)}$$

$$ED = AB = 24k \text{ (Tensión)} \quad CD = BC = 24k \text{ (Tensión)}$$

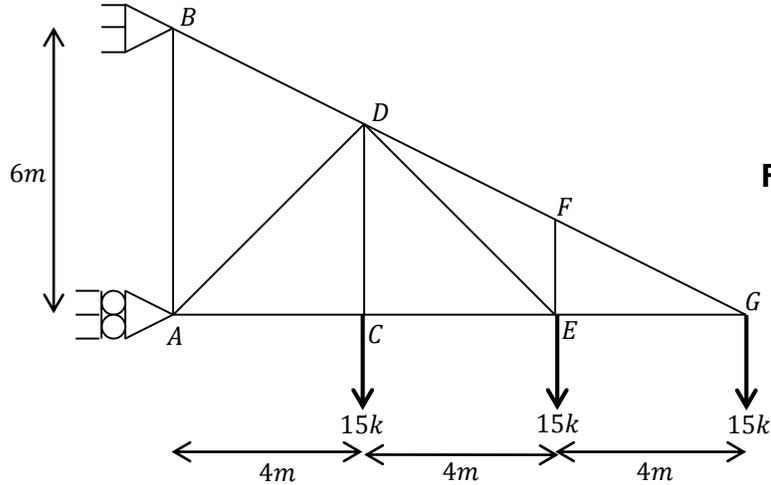
$$DG = BI = 4k \text{ (Tensión)} \quad CG = IC = 11.3137k \text{ (Tensión)}$$

Los resultados obtenidos se visualizan en la figura 1-5j.



**Ejercicio 1.6 Fuerzas en las barras de una armadura no simétrica.**

**Instrucciones** Determine la fuerza en cada elemento de la armadura que se muestra en la figura 1-6a.

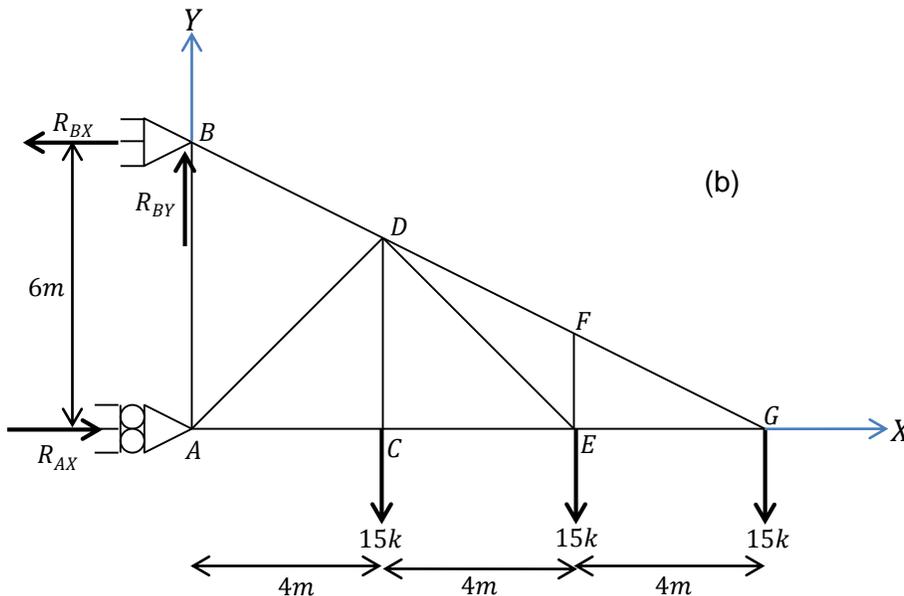


(a)  
**Figura 1-6**

**SOLUCIÓN**

**Verificación del grado de indeterminación**

Obsérvese que  $b = 11, r = 3, j = 7$  y  $c = 0$ . Debido a que  $r - c = 3$  se cumple, la armadura se describe como determinada externamente desde el punto de vista estático. Además,  $b + r = 11 + 3 = 14$  y  $2j = 2(7) = 14$  conducen a  $b + r = 2j$ , así que la armadura es estáticamente determinada externamente.



### Cálculo de las reacciones en los apoyos

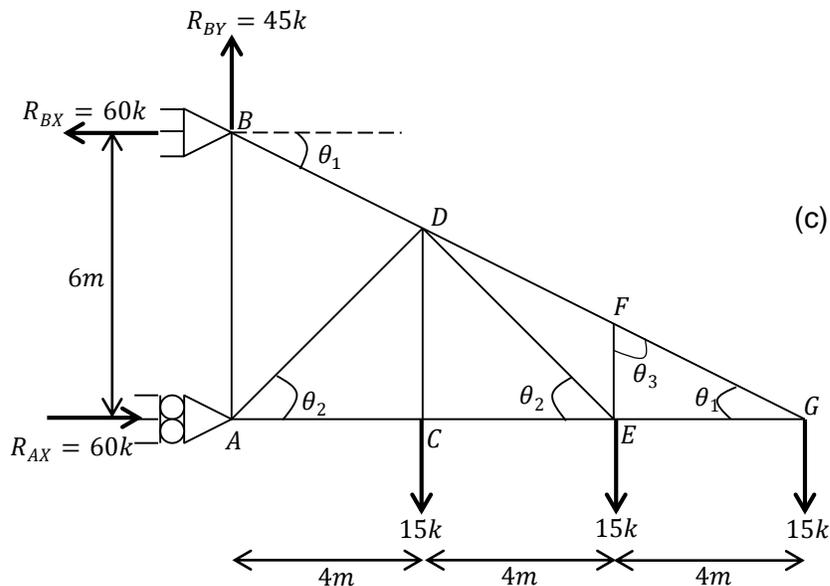
Al aplicar las ecuaciones de equilibrio en el diagrama de cargas, figura 1-6b, resulta

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -15 - 15 - 15 + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = 45k \uparrow$$

$$\curvearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 15(4) + 15(8) + 15(12) - R_{BX}(6) = 0 \Rightarrow R_{BX} = -\frac{360}{-6} \Rightarrow R_{BX} = 60k \leftarrow$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow R_{AX} - 60 = 0 \Rightarrow R_{AX} = 60k \rightarrow$$

Los resultados obtenidos se visualizan esquemáticamente en la figura 1-6c.



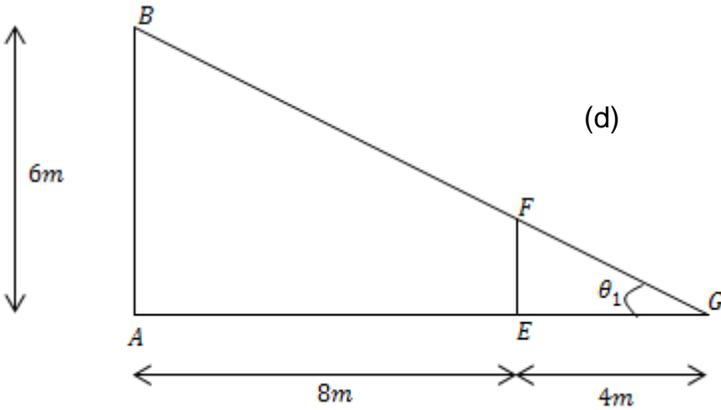
### Método de los nodos

Para calcular las fuerzas en los elementos, no hubo otra opción más que iniciar con el nodo G por ser el único en poseer dos incógnitas, las fuerzas GE y GF. A continuación se analizó el nodo F, debido a que al haber calculado anteriormente la fuerza en el elemento F-E, sólo quedaban dos incógnitas en este nodo. Después se pasó al nodo E, se siguió con los nodos C y A, y se concluyó con la junta B, ya que conforme se obtenían resultados, se iban utilizando en los diagramas de cuerpo libre de las juntas subsecuentes.

Un cambio en la orientación de los ejes X y Y en el nodo F, lo cual puede ser observado en el correspondiente diagrama, evitó una solución simultánea de ecuaciones.

Las fuerzas internas de la armadura son

Nodo G, figura 1-6e. Con base en la figura 1-6d, se tiene



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{EG}} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{\overline{FE}}{4}$$

$$\overline{FE} = \frac{6(4)}{12} = 2m$$

$$\tan \theta_1 = \frac{\overline{FE}}{\overline{EG}} = \frac{2}{4}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{2}{4} = 26.5651^\circ$$

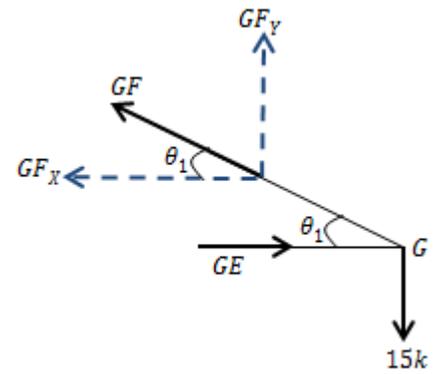
$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow GF_Y - 15 = 0 \Rightarrow GF(\sin \theta_1) - 15 = 0$$

$$GF(\sin 26.5651^\circ) = 15 \Rightarrow GF = \frac{15}{\sin 26.5651^\circ}$$

$$\therefore GF = 33.5410k \text{ (Tensión)}$$

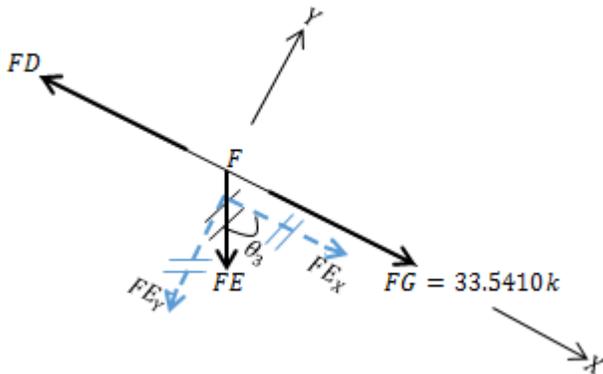
$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow GE - GF_X = 0 \Rightarrow GE - GF(\cos \theta_1) = 0$$

$$GE = (33.5410)(\cos 26.5651^\circ) \Rightarrow \therefore GE = 30k \text{ (Compresión)}$$



(e)

Nodo F, figura 1-6f.



(f)

$$\uparrow + \sum F_Y = 0 \Rightarrow -FE_Y = 0$$

$$FE(\sin \theta_3) = 0 \Rightarrow FE = \frac{0}{\cos \theta_3} \Rightarrow \therefore FE = 0$$

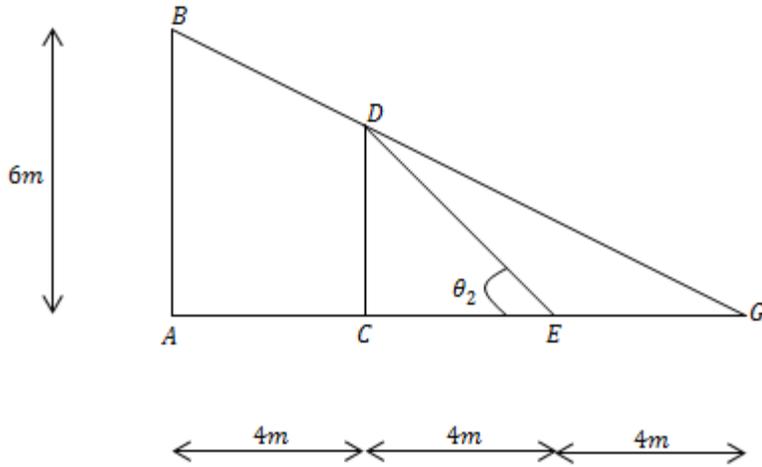
$$\rightarrow + \sum F_X = 0$$

$$-FD + FG + FE_X = 0 \Rightarrow FD = FG + FE(\cos \theta_3)$$

$$FD = 33.5410 + 0(\cos \theta_3)$$

$$\therefore FD = 33.5410k \text{ (Tensión)}$$

Nodo E, figura 1-6h. A partir de la figura 1-6g, se obtiene



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CG}} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{\overline{DC}}{8}$$

$$\overline{DC} = \frac{6(8)}{12} = 4m$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\overline{FE}}{\overline{EG}} = \frac{4}{4}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{4}{4} = 45^\circ$$

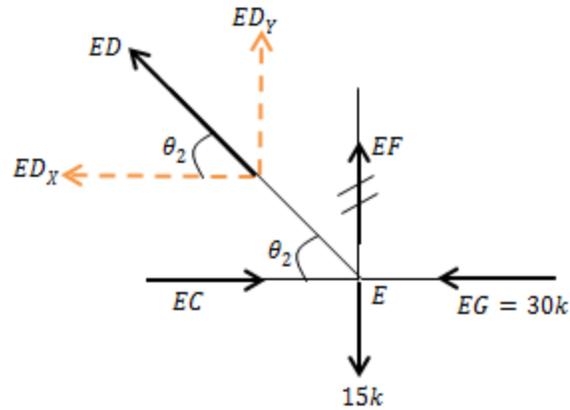
(g)

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -15 + EF + ED_Y = 0 \Rightarrow ED(\cos \theta_2) = 15 + 0$$

$$ED(\cos 45^\circ) = 15 \Rightarrow ED = \frac{15}{\cos 45^\circ} \Rightarrow \therefore ED = 21.2132k \text{ (Tensión)}$$

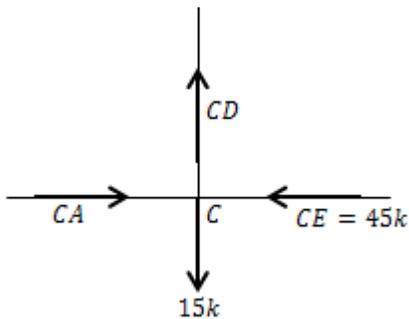
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -ED_X + EC - EG = 0 \Rightarrow EC = ED(\sin \theta_2) + EG$$

$$EC = (21.2132)(\sin 45^\circ) + 30 \Rightarrow \therefore EC = 45k \text{ (Compresión)}$$



(h)

Nodo C, figura 1-6i.



(i)

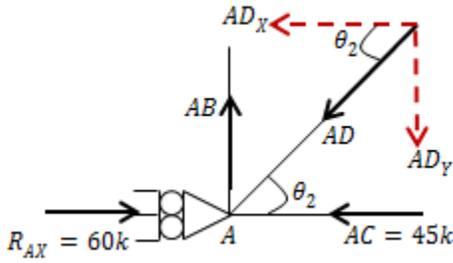
$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$CD - 15 = 0 \Rightarrow \therefore CD = 15k \text{ (Tensión)}$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$CA - CE = 0 \Rightarrow CA = CE \Rightarrow \therefore CA = 45k \text{ (Compresión)}$$

Nodo A, figura 1-6j.



(j)

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - AC - AD_x = 0 \Rightarrow AD(\cos \theta_2) = 60 - 45$$

$$AD = \frac{15}{\cos 45^\circ} \Rightarrow \therefore AD = 21.2132k \text{ (Compresión)}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow AB - AD_y = 0 \Rightarrow AB = AD(\sin \theta_2)$$

$$AB = 21.2132(\sin 45^\circ) \Rightarrow \therefore AB = 15k \text{ (Tensión)}$$

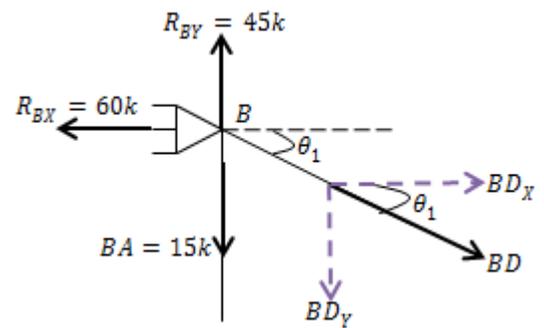
Nodo B, figura 1-6k.

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{BX} + BD_x = 0 \Rightarrow BD(\cos \theta_1) = 60$$

$$BD = \frac{60}{\cos 26.5651^\circ} \Rightarrow \therefore BD = 67.0821k \text{ (Compresión)}$$

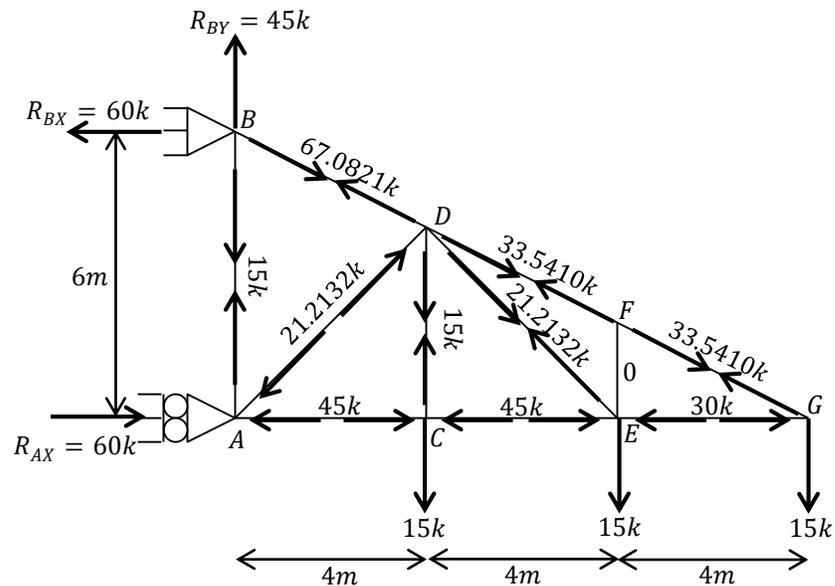
$$+\uparrow \sum FY = R_{BY} - BA - BD_y = 45 - 15 - BD(\sin \theta_1)$$

$$= 45 - 15 - 67.0821(\sin 26.5651^\circ) = 0 \quad \text{ok}$$



(k)

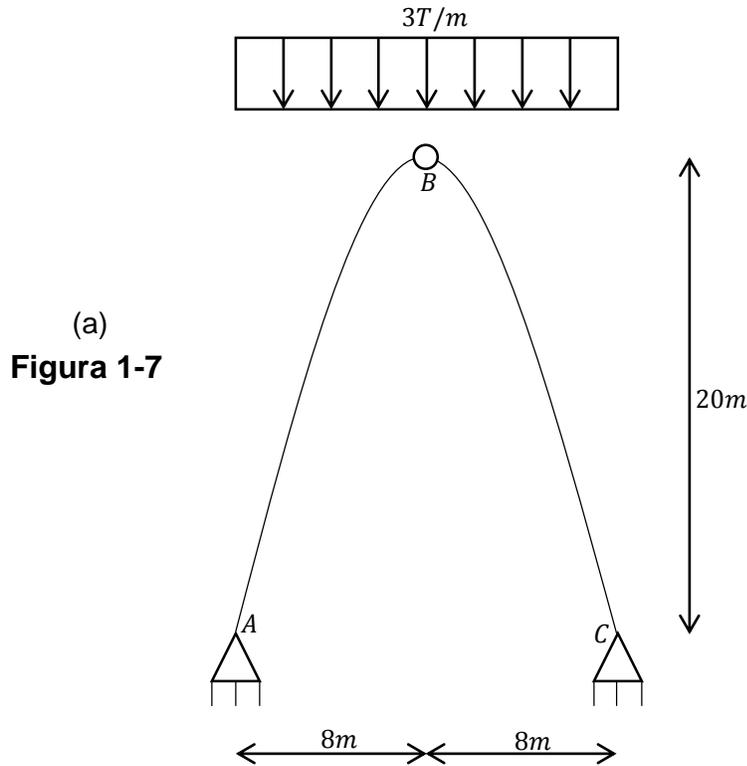
En la figura 1-6l se muestran los resultados obtenidos.



(l)

**Ejercicio 1.7 Resolución de un arco triarticulado parabólico**

**Instrucciones** El arco de tres articulaciones que se muestra en la figura 1-7a tiene una forma parabólica. El arco soporta una carga uniforme distribuida de  $3T/m$  y tiene las dimensiones indicadas, lo cual hace que sea simétrico. Demuestre que toda la estructura está sometida únicamente a compresión axial.



**SOLUCIÓN**

**Cálculo de las reacciones en los soportes**

Como todo arco triarticulado, el de este ejemplo es isostático. Para calcular las reacciones en los soportes, el arco se desmonta y luego se realiza un diagrama de cuerpo libre de cada segmento, figura 1-7b. La articulación se ubica en la clave, es decir, en el punto  $B$ . Entonces, se aíslan los segmentos  $A - B$  y  $B - C$ . Obsérvese que se tienen seis incógnitas de reacción (el sentido de cada una se supone arbitrariamente), pero como se pueden aplicar las tres ecuaciones de la estática a cada segmento, hay seis ecuaciones de equilibrio disponibles. En los diagramas se indican las resultantes de las cargas distribuidas y su punto de aplicación de cada una.

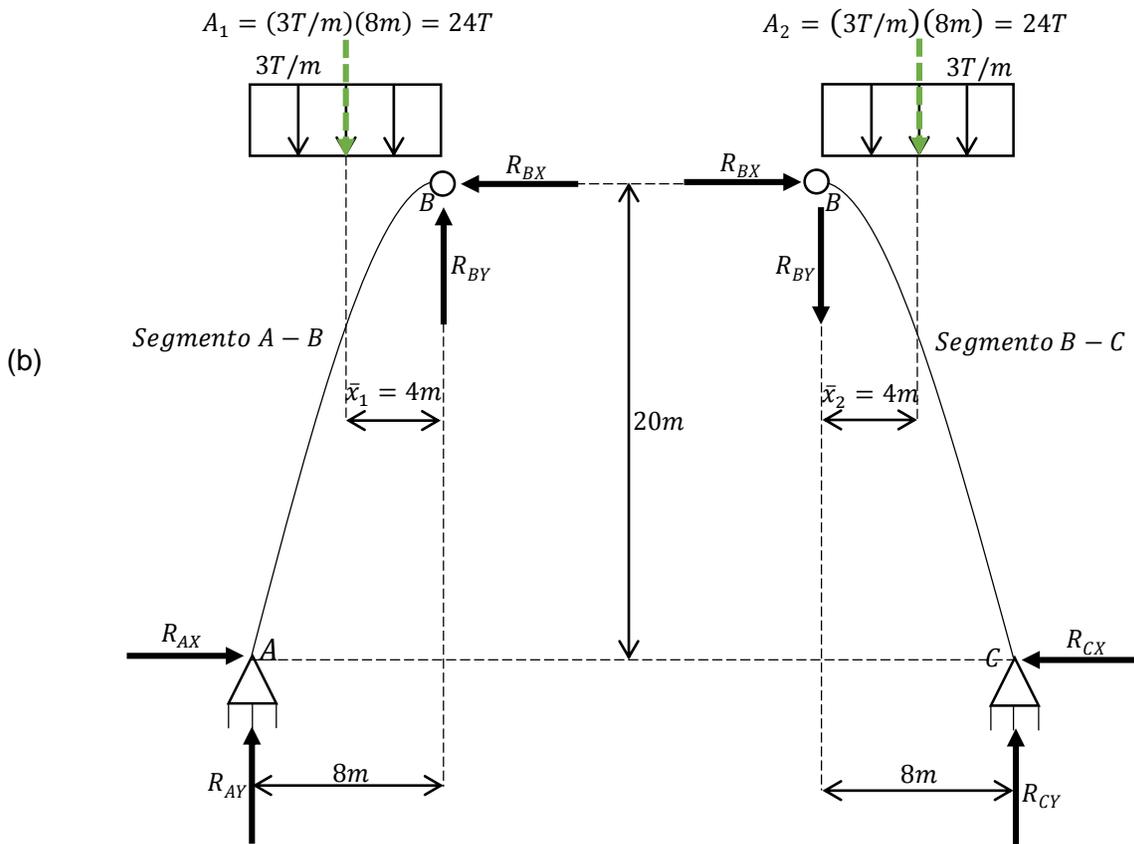
Para determinar las reacciones  $B_X$  y  $B_Y$  en la articulación, tomamos momentos alrededor de  $A$  en el segmento  $A - B$  y alrededor de  $C$  en el segmento  $B - C$ . Las dos ecuaciones resultantes se resuelven simultáneamente.

Segmento  $A - B$  del arco:

$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow -R_{BX}(20) - R_{BY}(8) + 24(4) = 0 \Rightarrow -20R_{BX} - 8R_{BY} = -96 \text{ --- (1)}$$

Segmento  $B - C$  del arco:

$$\curvearrowright \sum MC = 0 \Rightarrow R_{BX}(20) - R_{BY}(8) - 24(4) = 0 \Rightarrow 20R_{BX} - 8R_{BY} = 96 \text{ --- (2)}$$



Si se despeja  $R_{BY}$  de la ecuación (1) se tiene

$$R_{BY} = \frac{-96 + 20R_{BX}}{-8} = 12 - \frac{5}{2}R_{BX} \text{ --- (3)}$$

Combinando las ecuaciones (3) y (2) resulta

$$20R_{BX} - 8\left(12 - \frac{5}{2}R_{BX}\right) = 96 \Rightarrow R_{BX} = \frac{96 + 8(12)}{20 + 8\left(\frac{5}{2}\right)} \Rightarrow R_{BX} = \frac{24}{5}$$

Reemplazando el valor calculado de  $R_{BX}$  en la expresión (3) da

$$R_{BY} = 12 - \frac{5}{2} \left( \frac{24}{5} \right) = 0$$

Dado que se obtuvo una magnitud positiva para  $R_{BX}$ , el sentido de esta reacción es el mismo que se muestra en ambas porciones del arco; luego, note como en realidad  $R_{BY}$  no existe. A continuación se determinan las reacciones en los soportes con base en las ecuaciones de equilibrio de fuerzas.

Segmento A – B del arco:

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - \frac{24}{5} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = \frac{24}{5} T \rightarrow$$

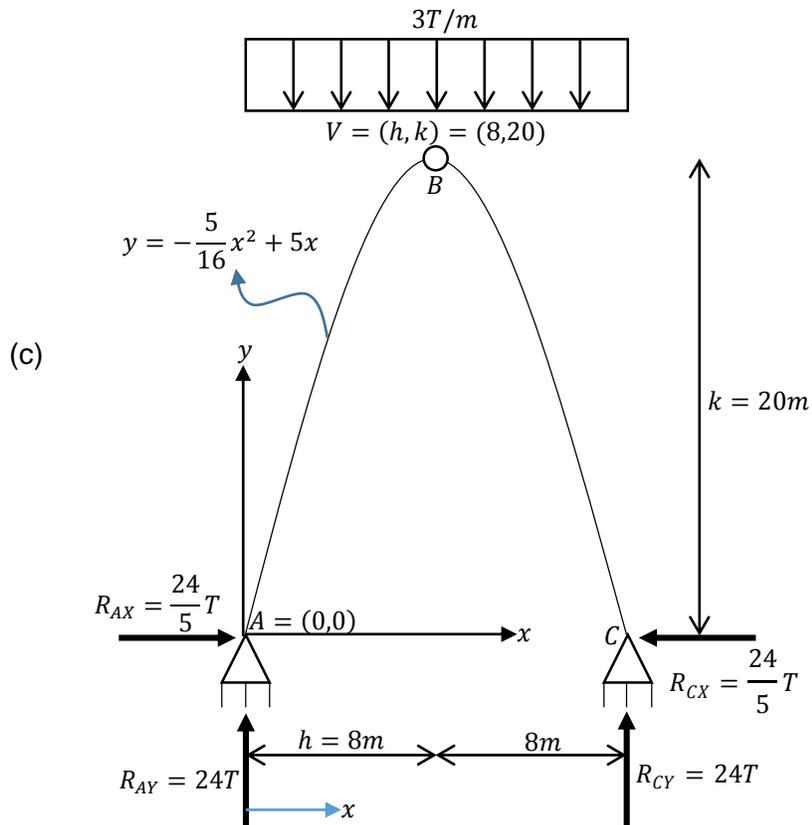
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 24 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 24T \uparrow$$

Segmento B – C del arco:

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{24}{5} - R_{CX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{CX} = \frac{24}{5} T \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{CY} - 24 = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 24T \uparrow$$

Se dibuja un diagrama del arco completo mostrando los resultados, figura 1-7c; las reacciones de la articulación se omiten por anularse entre sí.



**Ecuación que define al arco parabólico**

Se ha elegido al punto  $A$  como el origen del sistema de coordenadas, sin embargo, el lector debe estar consciente de que el origen bien pudo haberse seleccionado en cualquier otro punto. Por consiguiente, el vértice  $V$ , ubicado en  $B$ , no está en el origen. La ecuación de una parábola es

$$(x - h)^2 = -4p(y - k) \text{ --- (a)}$$

Al sustituir  $h = 8$  y  $k = 20$  en la ecuación (a) se tiene

$$(x - 8)^2 = -4p(y - 20) \text{ --- (b)}$$

Si se despeja  $p$  de la ecuación (b) se llega a

$$p = -\frac{(x - 8)^2}{4(y - 20)} \text{ --- (c)}$$

Reemplazando las coordenadas del origen en la ecuación (c) obtenemos

$$p = -\frac{(0 - 8)^2}{4(0 - 20)} = -\frac{64}{-80} = \frac{4}{5}$$

Al expandir la ecuación (b), sustituir el valor calculado de  $p$  y despejar  $y$  da

$$x^2 - 16x + 64 = -4py + 80p \Rightarrow x^2 - 16x + 64 = -4\left(\frac{4}{5}\right)y + 80\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$x^2 - 16x + 64 = -\frac{16}{5}y + 64 \Rightarrow -\frac{16}{5}y = x^2 - 16x$$

$$y = -\frac{5}{16}(x^2 - 16x) = -\frac{5}{16}x^2 + 5x \text{ --- (d)}$$

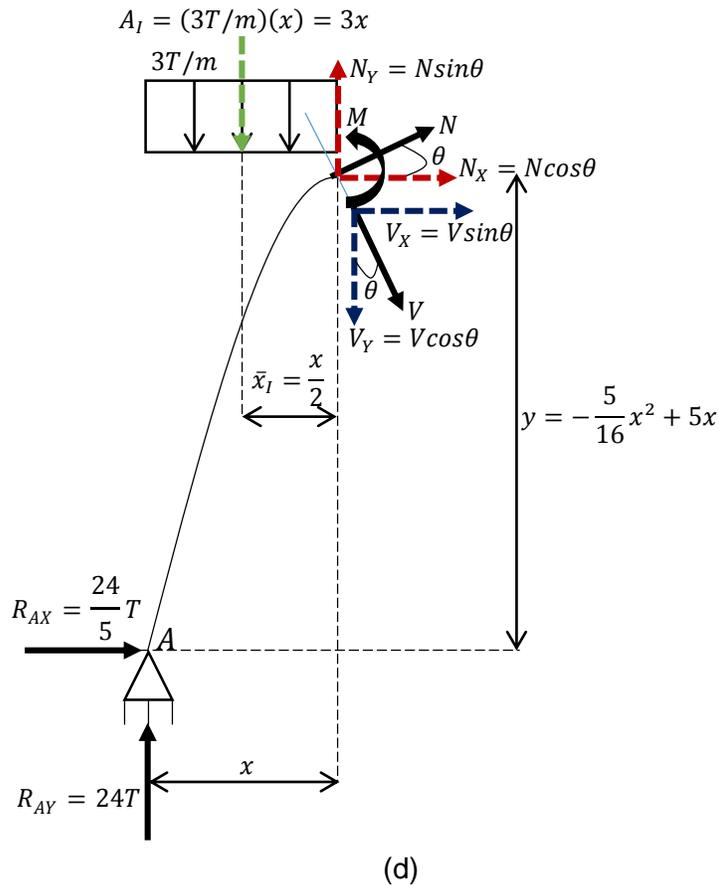
La expresión (d) es la ecuación que define al arco parabólico de este ejemplo.

**Funciones de la fuerza cortante, de la fuerza normal y del momento flector**

Ya que se han calculado las reacciones en los soportes y se ha deducido la ecuación parabólica del arco, es posible determinar las variaciones de las fuerzas normal  $N$  y cortante  $V$  internas, y del momento flector  $M$ , en función de la posición  $x$  empleando el método de las secciones. La distribución de la carga y la geometría de la estructura no varían, así que sólo se distingue un único segmento, el  $A - C$ , por lo que se efectúa nada más un corte perpendicular al eje del arco para definir las acciones internas a lo largo de él. La coordenada  $x$  con origen en  $A$ , es positiva hacia la derecha y puede usarse para analizar en su totalidad a la región mencionada. En la figura 1-7d se proporciona un diagrama de cargas de la sección cortada. Los elementos mecánicos actúan en su dirección positiva. La fuerza

resultante  $A_I$  de la carga distribuida uniforme del corte y su punto de aplicación  $\bar{x}_I$  se determinan como de costumbre. Lógicamente, la fuerza normal, que es tangente a la curva parabólica en el punto de corte, es perpendicular a la fuerza cortante, y esta última a su vez, es perpendicular al eje del arco en tal punto considerado. Estas dos últimas fuerzas deben descomponerse de manera individual en sus componentes rectangulares horizontal y vertical.

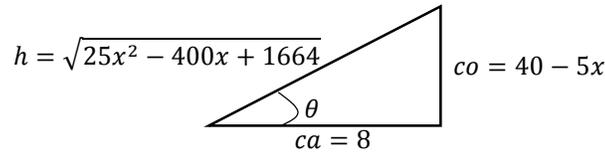
$$0 \leq x \leq 16m$$



La pendiente del segmento cortado en el punto del corte es igual a la derivada.

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(-\frac{5}{16}x^2 + 5x\right)}{dx} = 5 - \frac{5}{8}x = \frac{40 - 5x}{8} = \frac{ca}{ca}$$

Siendo el cociente del cateto opuesto  $co$  entre el cateto adyacente  $ca$  la definición para la tangente de un determinado ángulo  $\theta$ , lo anterior puede ser acomodado en un triángulo rectángulo como el de la figura 1-7e.



(e)

Se calcula la hipotenusa  $h$  a través del Teorema de Pitágoras.

$$h = \sqrt{(8)^2 + (40 - 5x)^2} = \sqrt{25x^2 - 400x + 1664}$$

Ahora, ya es posible determinar los valores en función de  $x$  de  $\sin\theta$  y  $\cos\theta$ , los cuales son útiles cuando se resuelven las fuerzas  $N$  y  $V$  en sus componentes.

$$\sin\theta = \frac{co}{h} = \frac{40 - 5x}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}}$$

$$\cos\theta = \frac{ca}{h} = \frac{8}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}}$$

Se aplican las ecuaciones de equilibrio en el cuerpo libre. Tomando momentos respecto del punto del corte, se calcula el momento interno  $M$ .

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow 24(x) - \frac{24}{5} \left( -\frac{5}{16}x^2 + 5x \right) - 3x \left( \frac{x}{2} \right) - M = 0 \Rightarrow M = 0$$

A partir del planteamiento de las ecuaciones de equilibrio para fuerzas en las direcciones horizontal y vertical, se origina un sistema simultáneo de ecuaciones que al resolverse proporciona los valores de las fuerzas normal  $N$  y cortante  $V$  internas.

$$\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{24}{5} + N_x + V_x = 0 \Rightarrow \frac{24}{5} + N\cos\theta + V\sin\theta = 0$$

$$\frac{24}{5} + N \left( \frac{8}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) + V \left( \frac{40 - 5x}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) = 0 \dots (I)$$

$$\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 24 - 3x + N_y - V_y = 0 \Rightarrow 24 - 3x + N\sin\theta - V\cos\theta = 0$$

$$24 - 3x + N \left( \frac{40 - 5x}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) - V \left( \frac{8}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) = 0 \text{ --- (II)}$$

Al despejar  $N$  de la ecuación (I) obtenemos

$$N = - \frac{V \left( \frac{40 - 5x}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) + \frac{24}{5}}{\left( \frac{8}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right)} \text{ --- (III)}$$

Al combinar las ecuaciones (II) y (III) resulta

$$24 - 3x + \left( - \frac{V \left( \frac{40 - 5x}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) + \frac{24}{5}}{\left( \frac{8}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right)} \right) \left( \frac{40 - 5x}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) - V \left( \frac{8}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) = 0 \Rightarrow V = 0$$

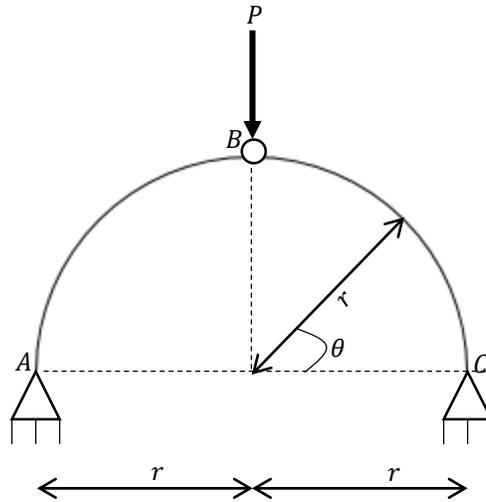
Si se reemplaza el valor calculado de  $V$  en la ecuación (III) da

$$N = - \frac{(0) \left( \frac{40 - 5x}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) + \frac{24}{5}}{\left( \frac{8}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right)} = - \frac{3\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}}{5}$$

De acuerdo con los resultados obtenidos, se concluye que un arco de forma parabólica, con una rótula en la clave y dos apoyos articulados posicionados a la misma altura, que se somete una carga vertical uniformemente distribuida de manera horizontal que abarca una longitud igual a la distancia que hay entre apoyo y apoyo, sólo resistirá fuerzas a compresión axial. Bajo estas condiciones, el arco recibe el nombre de arco funicular, porque dentro de él no se generan fuerzas de flexión ni fuerzas cortantes, ya que como se dedujo, tanto  $V$  como  $M$  son nulos a lo largo de la estructura. Un arco de tres articulaciones, tal y como se mencionó al inicio, es estáticamente determinado, en consecuencia, no se ve afectado por cambios de temperatura o en el asentamiento. Puede ser construido de concreto, madera o metal. El lector puede dibujar fácilmente el diagrama de carga axial (cortante) de este ejemplo al evaluar la función de  $N$  en el intervalo  $0 \leq x \leq 16m$  y después graficar los datos.

**Ejercicio 1.8 Resolución de un arco triarticulado circular**

**Instrucciones** Calcule las reacciones en los soportes y las funciones de las acciones internas en el arco de forma circular mostrado en la figura 1-8a que soporta una carga puntual  $P$  en  $B$ .



(a)

**Figura 1-8**

**SOLUCIÓN**

**Cálculo de las reacciones en los soportes**

El arco circular triarticulado es isostático y además simétrico tanto con respecto a la carga como a la geometría. Para evitar la solución de un sistema simultáneo de ecuaciones, se aplican las ecuaciones de equilibrio en la siguiente secuencia y se van usando los resultados calculados previamente.

Arco completo:

$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow P(r) - R_{CY}(2r) = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = \frac{P}{2} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - P + \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{P}{2} \uparrow$$

Recuerde que el momento en la rótula  $B$  es nulo.

Segmento  $A - B$  del arco:

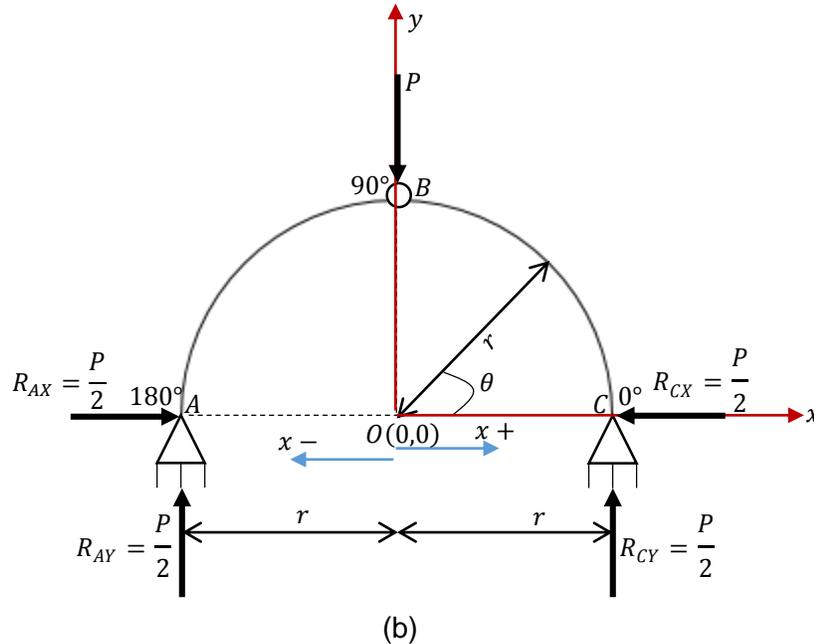
$$\curvearrowright \sum MB = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}(r) - R_{AX}(r) = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = \frac{P}{2} \rightarrow$$

Arco completo:

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - R_{CX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{CX} = \frac{P}{2} \leftarrow$$

**Funciones de la fuerza cortante, de la fuerza normal y del momento flector**

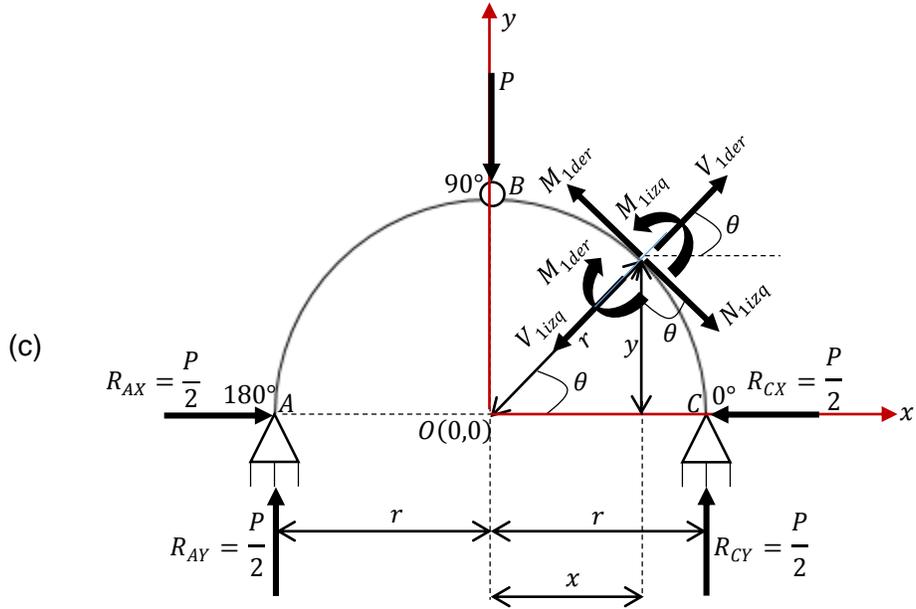
En la figura 1-8b se presentan esquemáticamente los resultados obtenidos.



El centro de la circunferencia se elige en el origen  $O$  de los ejes globales  $x, y$ , los cuales se muestran en la figura en su dirección positiva. Obsérvese como a los puntos  $A, B$  y  $C$  les corresponden, de forma respectiva, los ángulos de  $180^\circ, 90^\circ$  y  $0^\circ$ . Las funciones internas son discontinuas en el punto  $B$  debido a que justo ahí se encuentra aplicada una carga  $P$ . Entonces, la estructura debe seccionarse en dos ocasiones, una en el tramo  $A - B$  y otra en el tramo  $B - C$ . Se utilizará una sola coordenada  $x$  cuyo origen está en  $O$  y que es positiva hacia adelante y negativa hacia atrás. Al emplear el método de las secciones se tiene

Parte  $B - C$ . Se secciona el arco en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $B - C$ ) a una distancia horizontal  $x$  del origen  $O$ , figura 1-8c.

$$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

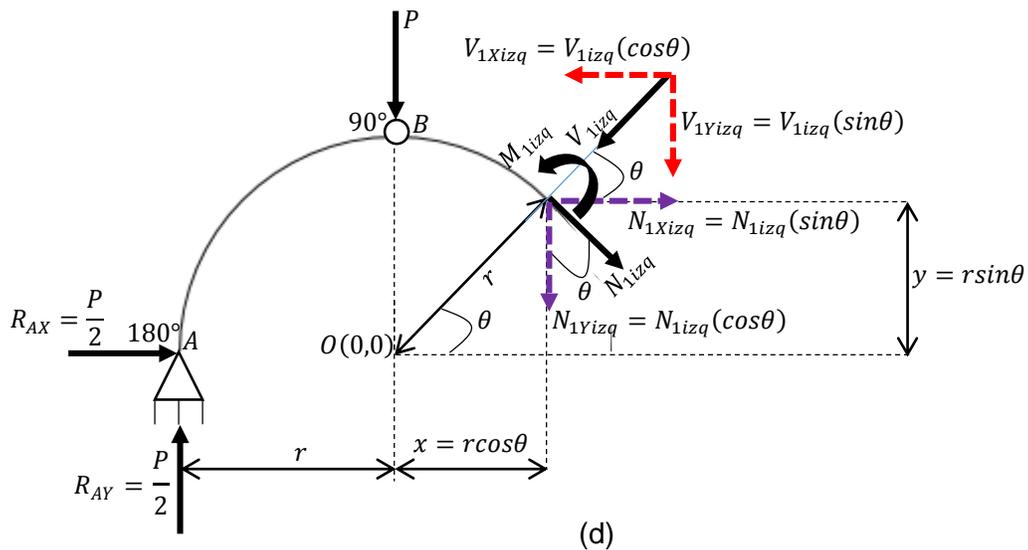


Con base en la figura anterior, del triángulo rectángulo inscrito en el cuarto de circunferencia derecho se deduce

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta$$

Note como en el diagrama anterior aparecen las fuerzas normal y cortante internas, y el momento flector, tanto de la cara izquierda como de la cara derecha del elemento cortado.



En la figura 1-8d se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la porción izquierda.

Ahora veamos las implicaciones del equilibrio estático del cuerpo libre. Tomando momentos alrededor del punto del corte, se determina el momento interno  $M$ .

$$\sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow -\frac{P}{2}(y) + \frac{P}{2}(r+x) - P(x) - M_{1izq} = 0$$

$$-\frac{P}{2}(r\sin\theta) + \frac{P}{2}(r+r\cos\theta) - P(r\cos\theta) - M_{1izq} = 0 \Rightarrow M_{1izq} = \frac{P}{2}r(1 - \sin\theta - \cos\theta)$$

Las fuerzas normal  $N_{1izq}$  y cortante  $V_{1izq}$  internas se obtienen de resolver el sistema simultáneo de ecuaciones que se origina al establecer el equilibrio para fuerzas en las direcciones horizontal y vertical.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - P - V_{1Yizq} - N_{1Yizq} = 0$$

$$\frac{P}{2} - P - V_{1izq}(\sin\theta) - N_{1izq}(\cos\theta) = 0 \Rightarrow V_{1izq}(\sin\theta) + N_{1izq}(\cos\theta) = -\frac{P}{2} \quad \text{--- (1)}$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - V_{1Xizq} + N_{1Xizq} = 0$$

$$\frac{P}{2} - V_{1izq}(\cos\theta) + N_{1izq}(\sin\theta) = 0 \Rightarrow -V_{1izq}(\cos\theta) + N_{1izq}(\sin\theta) = -\frac{P}{2} \quad \text{--- (2)}$$

Al despejar  $V_{1izq}$  de forma individual en las ecuaciones (1) y (2) se tiene

$$V_{1izq} = \frac{-\frac{P}{2} - N_{1izq}(\cos\theta)}{\sin\theta} \quad \text{--- (3)}$$

$$V_{1izq} = \frac{\frac{P}{2} + N_{1izq}(\sin\theta)}{\cos\theta} \quad \text{--- (4)}$$

Al igualar las ecuaciones (3) y (4) y simplificar resulta

$$\frac{-\frac{P}{2} - N_{1izq}(\cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{\frac{P}{2} + N_{1izq}(\sin\theta)}{\cos\theta} \Rightarrow -\frac{P}{2} \frac{1}{\sin\theta} - \frac{N_{1izq}(\cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{P}{2} \frac{1}{\cos\theta} + \frac{N_{1izq}(\sin\theta)}{\cos\theta}$$

$$N_{1izq} \left( \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right) = -\frac{P}{2} \left( \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} \right)$$

$$N_{1izq} \left( \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \right) = -\frac{P}{2} \left( \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} \right) \Rightarrow N_{1izq}(1) = -\frac{P}{2} \left( \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} \right) (\sin\theta\cos\theta)$$

$$N_{1izq} = \frac{P}{2}(-\sin\theta - \cos\theta)$$

Al reemplazar el valor obtenido de  $N_{1izq}$  en la ecuación (4) se obtiene

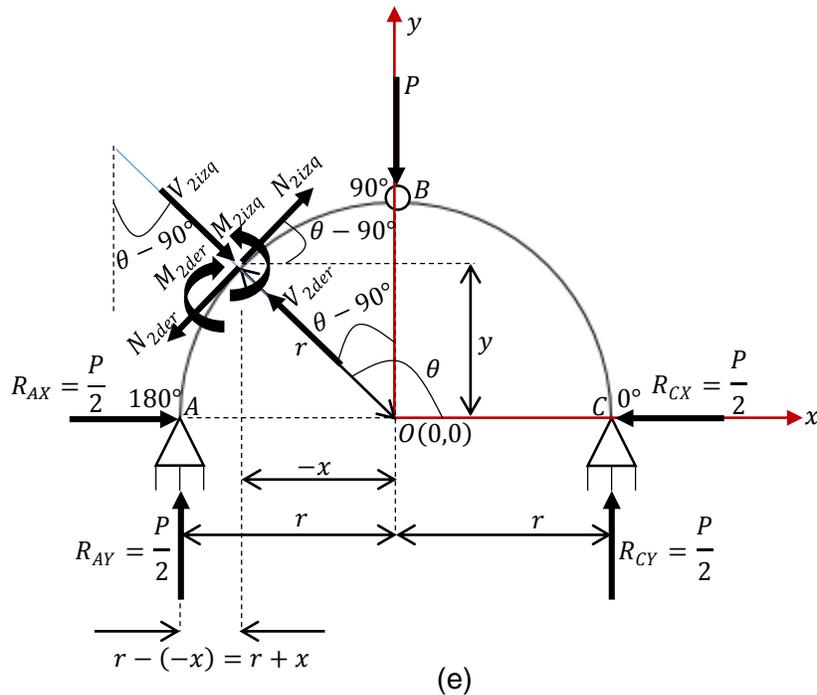
$$V_{1izq} = \frac{\frac{P}{2} + \frac{P}{2}(-\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta)}{\cos\theta} = \frac{P}{2} \left( \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta} \right)$$

$$= \frac{P}{2} \left( \frac{1}{\cos\theta} (1 - \sin^2\theta - \cos\theta\sin\theta) \right) = \frac{P}{2} \left( \frac{1}{\cos\theta} (\cos^2\theta - \cos\theta\sin\theta) \right) = \frac{P}{2} (\cos\theta - \sin\theta)$$

Si se quiere evitar la solución simultánea de ecuaciones, el equilibrio de fuerzas puede ser efectuado en las direcciones que coinciden con las líneas de acción de las fuerzas  $V_{1izq}$  y  $N_{1izq}$ . De ser así, reacciones  $R_{AX}$  y  $R_{AY}$  y la carga  $P$  tendrían que resolverse en sus componentes rectangulares para tales direcciones. Por otra parte, cabe mencionar que las acciones internas se pudieron haber calculado analizando la porción derecha del seccionamiento.

Parte  $A - B$ . Se secciona el arco en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $A - B$ ) a una distancia horizontal  $-x$  del origen  $O$ , figura 1-8e.

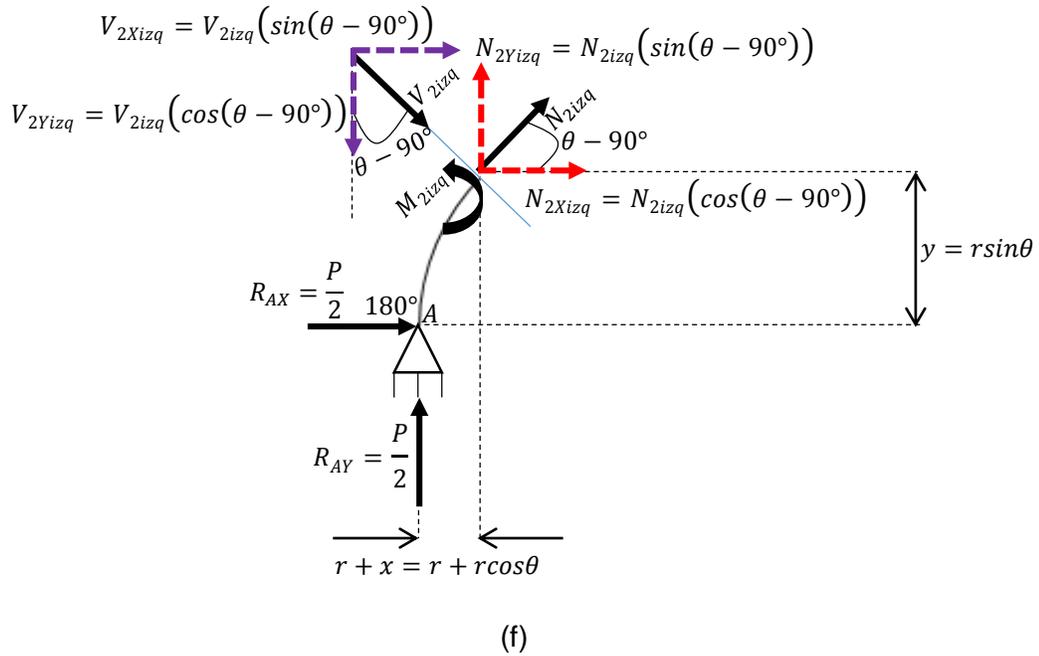
$$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$



En la figura 1-8f se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la porción izquierda y se aplican las ecuaciones de equilibrio en él.

$$\sum \curvearrowright M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}(r+x) - \frac{P}{2}(y) - M_{2izq} = 0$$

$$\frac{P}{2}(r+r\cos\theta) - \frac{P}{2}(r\sin\theta) - M_{2izq} = 0 \Rightarrow M_{2izq} = \frac{P}{2}r(\cos\theta + 1 - \sin\theta)$$



$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} + V_{2Xizq} + N_{2Xizq} = 0$$

$$\frac{P}{2} + V_{2izq}[\sin(\theta - 90^\circ)] + N_{2izq}[\cos(\theta - 90^\circ)] = 0$$

Si se tienen las siguientes identidades trigonométricas

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Entonces,

$$\sin(\theta - 90^\circ) = \sin \theta \cos 90^\circ - \cos \theta \sin 90^\circ$$

$$\cos(\theta - 90^\circ) = \cos \theta \cos 90^\circ + \sin \theta \sin 90^\circ$$

Puesto que

$$\sin 90^\circ = 1 \quad \cos 90^\circ = 0$$

Se llega a

$$\sin(\theta - 90^\circ) = (\sin \theta)(0) - (\cos \theta)(1) = -\cos \theta$$

$$\cos(\theta - 90^\circ) = (\cos \theta)(0) + (\sin \theta)(1) = \sin \theta$$

En consecuencia,

$$\frac{P}{2} - V_{2izq}(\cos \theta) + N_{2izq}(\sin \theta) = 0 \quad \text{--- (1')}$$

$$+\rightarrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - V_{2Yizq} + N_{2Yizq} = 0$$

$$\frac{P}{2} - V_{2izq}[\cos(\theta - 90^\circ)] + N_{2izq}[\sin(\theta - 90^\circ)] = 0$$

$$\frac{P}{2} - V_{2izq}(\sin \theta) - N_{2izq}(\cos \theta) = 0 \quad \text{--- (2')}$$

Se resuelve el sistema simultáneo de ecuaciones (1') y (2'). El despeje de  $V_{2izq}$  en las ecuaciones mencionadas conlleva a

$$V_{2izq} = \frac{-\frac{P}{2} - N_{2izq}(\sin \theta)}{-\cos \theta} \quad \text{--- (3')}$$

$$V_{2izq} = \frac{\frac{P}{2} - N_{2izq}(\cos \theta)}{\sin \theta} \quad \text{--- (4')}$$

Al igualar las ecuaciones (3') y (4') y simplificar resulta

$$\frac{-\frac{P}{2} - N_{2izq}(\sin \theta)}{-\cos \theta} = \frac{\frac{P}{2} - N_{2izq}(\cos \theta)}{\sin \theta} \Rightarrow \frac{P}{2} + \frac{N_{2izq}(\sin \theta)}{\cos \theta} = \frac{P}{2} - \frac{N_{2izq}(\cos \theta)}{\sin \theta}$$

$$N_{2izq} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) = \frac{P}{2} \left( \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta} \right)$$

$$N_{2izq} \left( \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right) = \frac{P}{2} \left( \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right) \Rightarrow N_{2izq}(1) = -\frac{P}{2} \left( \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right) (\sin \theta \cos \theta)$$

$$N_{2izq} = \frac{P}{2} (-\sin \theta + \cos \theta)$$

Al reemplazar el valor obtenido de  $N_{2izq}$  en la ecuación (4') se obtiene

$$V_{2izq} = \frac{\frac{P}{2} - \frac{P}{2}(-\sin\theta + \cos\theta)(\cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{P}{2} \left( \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{\sin\theta} \right)$$

$$= \frac{P}{2} \left( \frac{1}{\sin\theta} (1 - \cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta) \right) = \frac{P}{2} \left( \frac{1}{\sin\theta} (\sin^2\theta + \cos\theta\sin\theta) \right) = \frac{P}{2} (\cos\theta + \sin\theta)$$

A continuación, en la tabla 1-4 se muestran los resultados que se obtienen al evaluar en ciertos ángulos las funciones de las acciones internas. Luego, el lector puede graficar los resultados obtenidos y así obtener fácilmente los diagramas de fuerza cortante, fuerza normal y momento flector del arco.

$\theta$	$M$	$V$	$N$
<i>grados</i>	<i>ton.m</i>	<i>ton</i>	<i>ton</i>
0	0	0.5P	-0.5P
30	-0.18Pr	0.18P	-0.69P
45	-0.20Pr	0	-0.70P
60	-0.18Pr	-0.18P	-0.69P
90	0	-0.5P	-0.5P
120	-0.18Pr	0.18P	-0.69P
135	-0.20Pr	0	-0.70P
150	-0.18Pr	-0.18P	-0.69P
180	0	-0.5P	-0.5P

**Tabla 1-4**

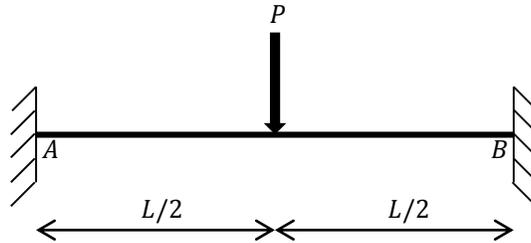


# CAPÍTULO 2

## ANÁLISIS ESTRUCTURAL

### Ejercicio 2.1 Método de flexibilidades aplicado a una viga.

**Instrucciones** Calcule las reacciones en los soportes de la viga doblemente empotrada que se observa en la figura 2-1a empleando el método de flexibilidades.



Estructura real (ER)

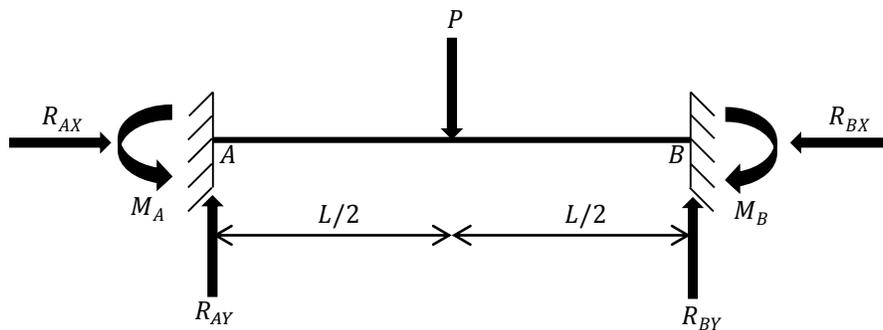
(a)

Figura 2-1

### SOLUCIÓN

#### Verificación del grado de indeterminación

En primer lugar debe determinarse el grado de indeterminación de la estructura real (ER), figura 2-1a, para saber cuántas restricciones hiperestáticas eliminar; ese mismo número nos indicará la cantidad de ecuaciones simultáneas a plantear más adelante para la resolución del problema. Con base en el diagrama de cargas, figura 2-1b, hay  $r = 6$  incógnitas de reacción, las cuales son  $R_{AX}$ ,  $R_{AY}$ ,  $M_A$ ,  $R_{BX}$ ,  $R_{BY}$  y  $M_B$  (cabe mencionar que cuando se identifican las reacciones en los soportes, el sentido de cada una de ellas debe ser supuesto arbitrariamente al desconocerse la magnitud correspondiente), así mismo, no se tiene alguna condición impuesta por la construcción (articulación o rótula, conector cortante, etc.), es decir,  $c = 0$ . Por otra parte, existen  $n = 3$  ecuaciones de equilibrio en el plano, que son  $\sum M = 0$ ,  $\sum FX = 0$ ,  $\sum FY = 0$ .



(b)

A partir de la ecuación  $\rightarrow \sum FX = 0$ , dado que la viga no está sometida a cargas horizontales, se obtiene directamente que  $R_{AX}$  y  $R_{BX}$  son nulas. Por consiguiente, ahora únicamente se tienen  $r = 4$  fuerzas reactivas y  $n = 2$  ecuaciones de la Estática. En consecuencia, la viga es estáticamente

indeterminada o hiperestática de segundo grado ya que  $r > (n + c)$ , puesto que  $4 > (2 + 0)$  con una diferencia de  $4 - 2 = 2$ .

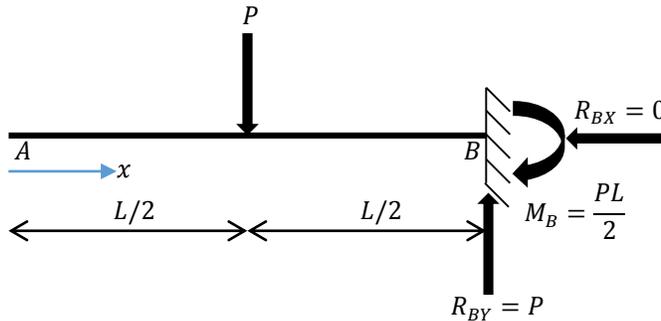
### Elección de las reacciones redundantes o fuerzas correctivas

Como la viga es estáticamente indeterminada en grado dos, hay dos redundantes, lo cual significa que existe tal cantidad de fuerzas en exceso de las fuerzas primarias o son sobrantes o superabundantes de las necesarias para mantener el equilibrio estático. Las redundantes deben seleccionarse de tal modo que al suprimirlas de la viga, esta sea isostática y estable. Por lo tanto, para el tipo de vigas doblemente empotradas se cuenta con dos alternativas: 1) eliminar los momentos reactivos o 2) retirar un momento y una reacción vertical con un punto de aplicación coincidente.

Basándose en la opción 2, se opta porque  $R_{AY}$  y  $M_A$  sean las redundantes, pero tome en cuenta que de la misma opción, las fuerzas correctivas pueden ser  $R_{BY}$  y  $M_B$ , o bien, de la opción 1, se pudo haber considerado como fuerzas sobrantes a  $M_A$  y  $M_B$ . Cuando ya se tiene un buen dominio del método de secciones, es más fácil visualizar la alternativa mayormente conveniente para hacer menos tedioso el análisis.

### Planteamiento de la estructura primaria

Con lo anterior, es posible idealizar una nueva estructura denominada estructura primaria o isostática fundamental ( $EP$ ); como se dejó entrever previamente, se trata de convertir la viga hiperestática en una isostática y estable desapareciendo precisamente las redundantes seleccionadas. Siendo así, la capacidad de la viga para resistir  $R_{AY}$  y  $M_A$  se elimina si se quita el empotramiento en  $A$ . Esta estructura liberada forzosamente debe soportar las carga reales, figura 2-1c.



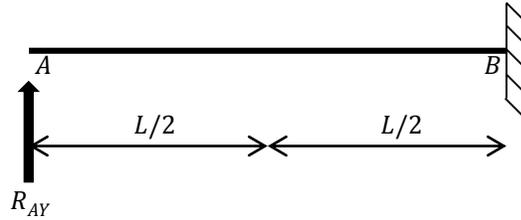
Estructura primaria ( $EP$ )  $\Rightarrow M$

(c)

### Principio de superposición

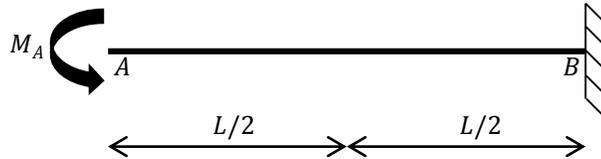
Aquí se esquematiza claramente que la estructura estáticamente indeterminada puede ser igual a la suma de una serie de estructuras estáticamente determinadas compuesta por la estructura primaria y otro número de estructuras igual a la cantidad de redundantes ( $ERd_i$ ). Por lo tanto, la estructura real es igual a la adición de la estructura liberada sometida a: A) las cargas reales, figura 1-c, y B) la acción individual de cada una de las reacciones redundantes (con un sentido propuesto de forma indistinta), figuras 2-1d y 2-1e. Para este ejercicio

$$ER = EP + ERd_1 + ERd_2$$



Estructura liberada con fuerza redundante  $R_{AY}$  aplicada ( $ERd_1$ )

(d)



Estructura liberada con momento redundante  $M_A$  aplicado ( $ERd_2$ )

(e)

Contrariamente a la viga de la figura 2-1a, las vigas representadas en las figuras 2-1c, 2-1d y 2-1e experimentan de forma respectiva un desplazamiento vertical o deflexión en  $A$  ( $\delta_{VA}$ ) y una pendiente o rotación en  $A$  ( $\theta_A$ ) dado que no hay soporte alguno en ese nodo que los impida.

Suponga que tales deflexiones y pendientes son iguales a una cierta cantidad. Entonces, para la viga  $EP$  se tiene que  $\delta_{VAEP} = d_1$  y  $\theta_{AEP} = d_2$ . A su vez, para la viga  $ERd_1$  tenemos que  $\delta_{VAERd_1} = R_{AY}(f_{11})$  y  $\theta_{AERd_1} = R_{AY}(f_{21})$ . De forma análoga, en la viga  $ERd_2$ ,  $\delta_{VAERd_2} = M_A(f_{12})$  y  $\theta_{AERd_2} = M_A(f_{22})$ . Posteriormente se ofrecerá una explicación de la razón por la cual se empleó la nomenclatura citada.

### Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica

Para obtener ecuaciones adicionales que coadyuven a la solución del problema hacemos uso del principio de superposición formulado en el apartado precedente y tomamos en cuenta la compatibilidad del desplazamiento vertical y la pendiente en el empotramiento  $A$ ; por lo tanto, las ecuaciones de compatibilidad para la deflexión en  $A$  y la rotación en  $A$  son, respectivamente

$$\delta_{VAER} = \delta_{VAEP} + \delta_{VAERd_1} + \delta_{VAERd_2} \quad \text{--- (1)}$$

$$\theta_{AER} = \theta_{AEP} + \theta_{AERd_1} + \theta_{AERd_2} \quad \text{--- (2)}$$

Si en la viga  $ER$  tanto el desplazamiento vertical como la rotación en  $A$  no existen debido a que la reacción vertical y el momento reactivo del soporte en  $A$  los impiden, entonces  $\delta_{VAER} = \theta_{AER} = 0$ . Efectuando las sustituciones correspondientes en las ecuaciones (1) y (2), el sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica pasa a ser el siguiente:

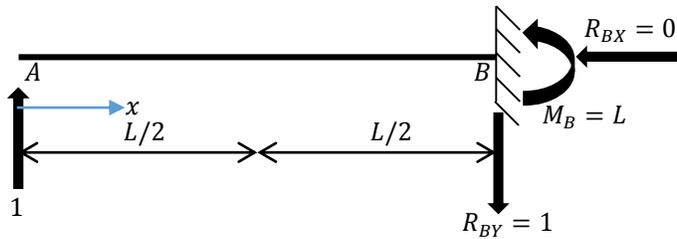
CAPÍTULO 2 ANÁLISIS ESTRUCTURAL

$$0 = d_1 + f_{11}R_{AY} + f_{12}M_A \text{ --- (3)}$$

$$0 = d_2 + f_{21}R_{AY} + f_{22}M_A \text{ --- (4)}$$

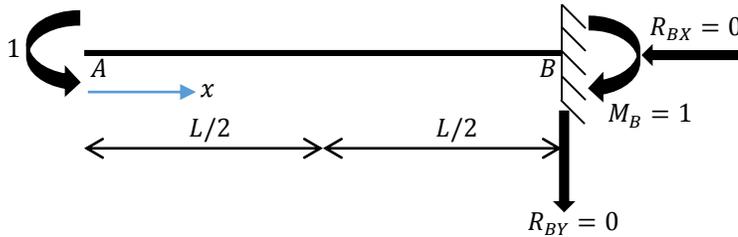
Cada desplazamiento del punto de aplicación de la acción redundante  $R_i$  o  $M_i$  en la dirección de esta, producido al actuar la carga original sobre la estructura liberada es expresado por  $d_i$ . Estos en conjunto se denominan incompatibilidades geométricas porque en la estructura real no ocurren.

Los coeficientes de flexibilidad  $f_{ij}$  anteriores conforman la matriz de flexibilidad de la estructura y pueden calcularse sencillamente si en la estructura liberada aplicamos una carga unitaria correspondiente a cada fuerza redundante ( $ECu_i$ ), figuras 2-1f y 2-1g.



Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en A ( $ECu_1$ )  $\Rightarrow m_1$

(f)



Estructura liberada con momento unitario aplicado en A ( $ECu_2$ )  $\Rightarrow m_2$

(g)

Entonces, directamente de la viga  $ECu_1$  tenemos que la deflexión y la rotación en A son equivalentes de forma respectiva a un determinado valor de  $\delta_{V_{AECu_1}} = f_{11}$  y  $\theta_{AECu_1} = f_{21}$ . Así mismo, para la viga  $ECu_2$ ,  $\delta_{V_{AECu_2}} = f_{12}$  y  $\theta_{AECu_2} = f_{22}$ .

**Cálculo de las incompatibilidades geométricas y de los coeficientes de flexibilidad**

En resumen, para poder resolver el sistema simultáneo de ecuaciones (3) y (4), el cual nos permite calcular las redundantes, en las vigas visualizadas en las figuras 2-1c, 2-1f y 2-1g es necesario

conocer cuánto valen el desplazamiento vertical en  $A$  dado que  $R_{AY}$  (fuerza reactiva vertical en el empotramiento del punto  $A$ ) fue suprimida y la pendiente en  $A$  debido a que  $M_A$  (momento reactivo en el empotramiento del punto  $A$ ) fue eliminado.

Los desplazamientos requeridos pueden obtenerse con cualquiera de los métodos apropiados del análisis estructural; en la presente obra se empleará el **método del principio del trabajo virtual** (es lo más recomendable) y se considerarán únicamente las deformaciones debidas a la flexión. En términos generales, este principio indica que debe incorporarse una carga ficticia unitaria sobre la viga descargada en el punto y en la dirección donde se requiere conocer el desplazamiento. Si debe determinarse la pendiente, se coloca un momento de par virtual unitario en el punto.

Para asociar a los momentos internos (se obtendrán a partir del **método de secciones**) con las estructuras, le hemos denominado  $M$  a la viga primaria,  $m_1$  a la viga liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en  $A$  y  $m_2$  a la viga liberada con momento unitario aplicado en  $A$ . Es importante recordar que las coordenadas  $x$  a emplear y las direcciones positivas de los momentos internos entre las tres estructuras recién mencionadas deben ser iguales. En las figuras 2-1c, 2-1f y 2-1g se puede observar que usaremos únicamente la coordenada  $x$  para determinar la energía de deformación, cuyo origen se asocia en  $A$ , es positiva hacia la derecha y es válida para  $0 \leq x \leq L$ , pero el lector puede usar otra(s) coordenada(s) distinta(s) que sea(n) correcta(s) para cubrir la longitud de la viga. Con base en el principio del trabajo virtual, se tiene

$$d_1 = \delta_{VAEP} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI} dx \quad \text{--- (I)}$$

$$d_2 = \theta_{AEP} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI} dx \quad \text{--- (II)}$$

$$f_{11} = \delta_{VAECu_1} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1m_1}{EI} dx \quad \text{--- (III)}$$

$$f_{21} = \theta_{AECu_1} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1m_2}{EI} dx \quad \text{--- (IV)}$$

$$f_{12} = \delta_{VAECu_2} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2m_1}{EI} dx \quad \text{--- (V)}$$

$$f_{22} = \theta_{AECu_2} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2m_2}{EI} dx \quad \text{--- (VI)}$$

Note que para determinar  $d_1$  se requiere de la combinación apropiada de los momentos internos  $M$  y  $m_1$ ; algo análogo ocurre con las expresiones restantes. En todas las vigas de este libro,  $EI$  es constante.

A continuación se calculan las reacciones y los momentos internos en las vigas isostáticas de las figuras 2-1c, 2-1f y 2-1g.

Considere que la función del momento flector será discontinua en los puntos donde el tipo o la magnitud de la carga distribuida cambia, o bien donde se apliquen fuerzas concentradas. La carga distribuida, así como la fuerza concentrada, o una de sus componentes, actúan perpendicularmente al eje longitudinal de la viga. Además de lo anterior, habrá discontinuidad en cada punto donde se aplique algún momento de par.

Viga  $EP$ , figura 2-1c.

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio en una secuencia y emplear los resultados calculados previamente, se obtiene

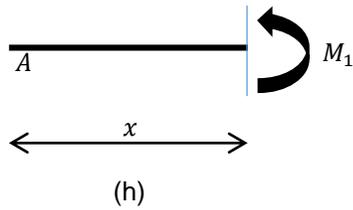
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{BX} = 0$$

CAPÍTULO 2 ANÁLISIS ESTRUCTURAL

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -P + R_{BY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = P \uparrow$$

$$\curvearrowright \sum M_B = 0 \Rightarrow -P \left(\frac{L}{2}\right) + M_B = 0 \Rightarrow \therefore M_B = \frac{PL}{2} \curvearrowright$$

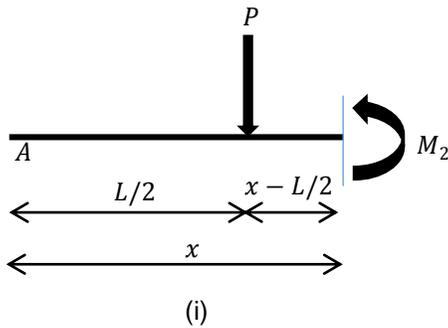
Se formulan los **momentos internos**  $M$ . Las funciones de momento serán discontinuas en el punto de aplicación de la carga  $P$ , así que se requiere de efectuar dos cortes perpendiculares al eje longitudinal de la viga para definir  $M$  a lo largo de la estructura, figuras 2-1h y 2-1i.



$$0 \leq x \leq L/2$$

$$\curvearrowright \sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$M_1 = 0$$



$$L/2 \leq x \leq L$$

$$\curvearrowright \sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$-M_2 - P \left(x - \frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow M_2 = -Px + \frac{PL}{2}$$

Viga  $ECu_1$ , figura 2-1f.

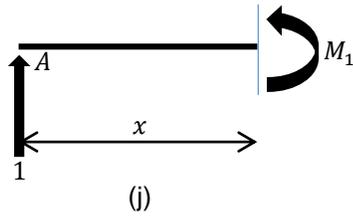
Las fuerzas reactivas en el apoyo empotrado  $B$  son resultado de

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow \therefore R_{BX} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = 0$$

$$\curvearrowright \sum M_B = 0 \Rightarrow -1 + M_B = 0 \Rightarrow \therefore M_B = 1 \curvearrowright$$

Se deduce el **momento interno**  $m_1$ . Como no hay discontinuidad de carga, la viga se secciona ortogonalmente a su eje en una sola ocasión, figura 2-1j.



$$0 \leq x \leq L$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_1 + (1)(x) = 0 \Rightarrow M_1 = x$$

Viga  $ECu_2$ , figura 2-1g.

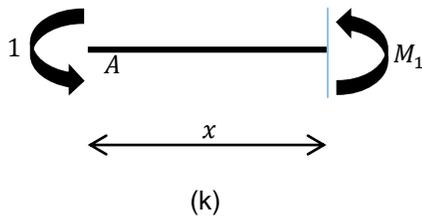
Las reacciones en el empotramiento  $B$  equivalen a

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{BX} = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 1 - R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = 1$$

$$\sum MB = 0 \Rightarrow 1(L) - M_B = 0 \Rightarrow M_B = L$$

Se infiere el momento interno  $m_2$  a partir de la figura 2-1k.



$$0 \leq x \leq L$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_1 - 1 = 0 \Rightarrow M_1 = -1$$

Obsérvese que la coordenada  $x$  seleccionada conlleva a que no haya necesidad de determinar las reacciones con el fin de encontrar los momentos internos.

Enseguida se presenta el cálculo de las incompatibilidades geométricas.

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} (0)(x) dx + \int_{L/2}^L \left(-Px + \frac{PL}{2}\right)(x) dx \right] = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(-Px^2 + \frac{PL}{2}x\right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ -\frac{P}{3}x^3 + \frac{PL}{4}x^2 \right]_{L/2}^L = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{P}{3} \left( L^3 - \left(\frac{L}{2}\right)^3 \right) + \frac{PL}{4} \left( L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right) \right] = \frac{1}{EI} \left( -\frac{7PL^3}{24} + \frac{3PL^3}{16} \right) = -\frac{5PL^3}{48EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} (0)(-1) dx + \int_{L/2}^L \left(-Px + \frac{PL}{2}\right)(-1) dx \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left( Px - \frac{PL}{2} \right) dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{P}{2} x^2 - \frac{PL}{2} x \right]_{L/2}^L = \frac{1}{EI} \left[ \frac{P}{2} \left( L^2 - \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right) - \frac{PL}{2} \left( L - \frac{L}{2} \right) \right]$$

$$\frac{1}{EI} \left( \frac{3PL^2}{8} - \frac{PL^2}{4} \right) = \frac{PL^2}{8EI}$$

Ahora se muestra el cálculo de los **coeficientes de flexibilidad**.

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^L = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(-1) dx = -\frac{1}{EI} \int_0^L x dx = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^L = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{12} = \frac{1}{EI} \int_0^L (-1)(x) dx = -\frac{1}{EI} \int_0^L x dx = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^L = -\frac{L^2}{2EI}$$

Obsérvese que como una consecuencia del teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos, se cumple que  $f_{12} = f_{21}$ . De forma más generalizada, se tiene que  $f_{ij} = f_{ji}$ , lo cual hace que mientras más grande sea el grado de hiperestaticidad, más se evita el cálculo de varios coeficientes de flexibilidad.

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^L (-1)(-1) dx = \frac{1}{EI} \int_0^L dx = \frac{1}{EI} [x]_0^L = \frac{L}{EI}$$

### Cálculo de las redundantes

Al sustituir los coeficientes en el sistema simultáneo de ecuaciones (3) y se (4) tiene

$$-\frac{5PL^3}{48EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0 \quad \text{--- (5)}$$

$$\frac{PL^2}{8EI} - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0 \quad \text{--- (6)}$$

Despejando  $M_A$  de las expresiones (4) y (5) respectivamente, resulta

$$M_A = \frac{\frac{5PL^3}{48EI} - \frac{L^3}{3EI} R_{AY}}{-\frac{L^2}{2EI}} \quad \text{--- (7)}$$

$$M_A = \frac{-\frac{PL^2}{8EI} + \frac{L^2}{2EI} R_{AY}}{\frac{L}{EI}} \quad \text{--- (8)}$$

Igualando (7) con (8) y simplificando da

$$\frac{\frac{5PL^3}{48EI} - \frac{L^3}{3EI} R_{AY}}{-\frac{L^2}{2EI}} = \frac{-\frac{PL^2}{8EI} + \frac{L^2}{2EI} R_{AY}}{\frac{L}{EI}} \Rightarrow R_{AY} = \frac{P}{2} \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{P}{2} \uparrow$$

Si se reemplaza el resultado previamente obtenido en (7), entonces

$$M_A = \frac{PL}{8} \Rightarrow \therefore M_A \curvearrowright$$

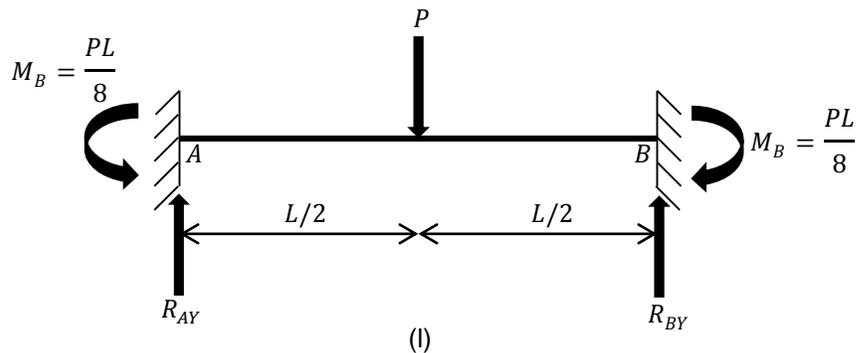
La magnitud positiva obtenida tanto para  $R_{AY}$  como  $M_A$  indica que tales redundantes tiene el mismo sentido que el propuesto para su correspondiente carga unitaria. En caso de haber resultado negativas, el sentido es opuesto al observado en la figuras 2-1d y 2-1e.

### Ecuaciones de equilibrio

Como las reacciones redundantes ya han sido calculadas, los valores de las reacciones desconocidas faltantes pueden deducirse aplicando las ecuaciones de equilibrio, figura 2-1l.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - P + R_{BY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = \frac{P}{2} \uparrow$$

$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow -\frac{PL}{8} + P\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}(L) + M_B = 0 \Rightarrow \therefore M_B = \frac{PL}{8} \curvearrowright$$

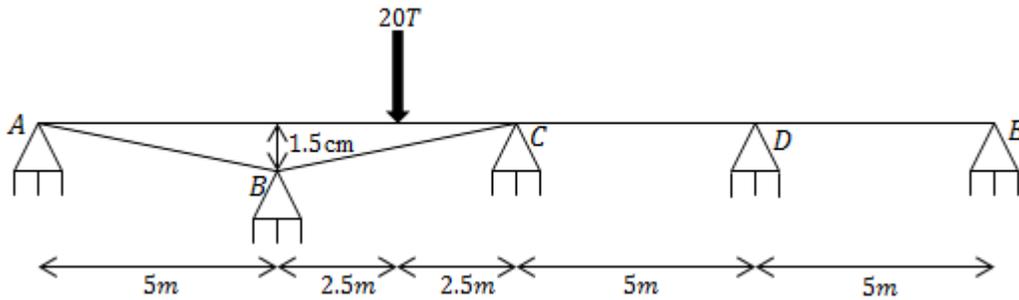


**Ejercicio 2.2 Método de flexibilidades aplicado a una viga con un asentamiento en un soporte.**

**Instrucciones** Calcular las reacciones en los soportes de la viga continua que se muestra en la ilustración 2-2a cuyo apoyo *B* sufre un asentamiento de  $1.5\text{cm}$ .

Datos:

$$E = 2 * \frac{10^7 T}{m^2}, I = 0.00171 m^4, \therefore EI = 3.42 * 10^4 T - m^2$$



Estructura real (*ER*)

(a)

**Figura 2-2**

**SOLUCIÓN**

**Verificación del grado de indeterminación y elección de las reacciones correctivas**

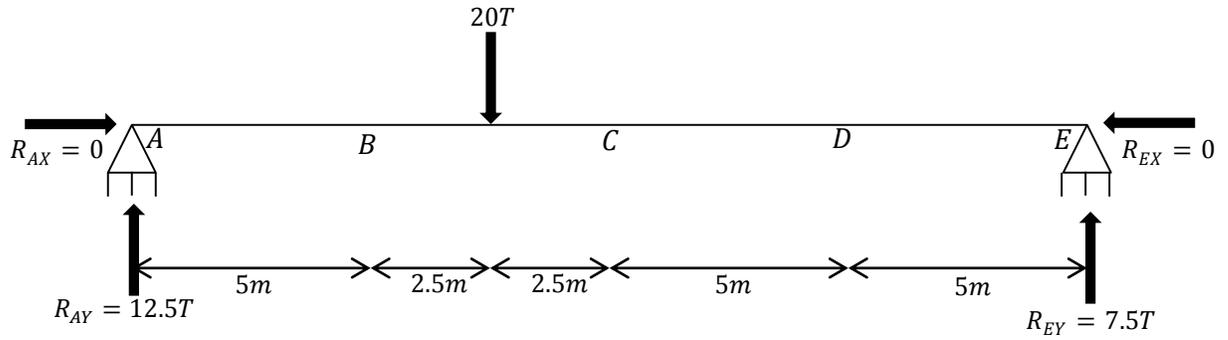
Por inspección, al no soportar cargas en la dirección *X*, las reacciones horizontales en los apoyos de la viga son nulas; es decir,  $R_{AX} = R_{BX} = R_{CX} = R_{DX} = R_{EX} = 0$ .

Entonces, la estructura es estáticamente indeterminada de tercer grado. Se elegirán  $R_{BY}$ ,  $R_{CY}$  y  $R_{DY}$  como redundantes. En consecuencia, los soportes articulados en *B*, *C* y *D* deben ser suprimidos en la estructura primaria.

**Principio de superposición**

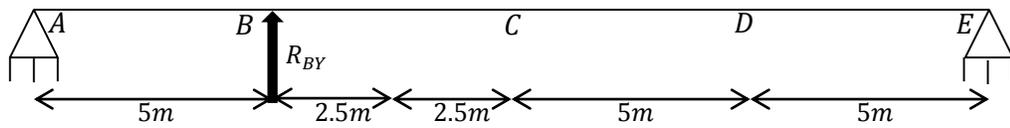
Al aplicar el principio de superposición, se tiene que la estructura real es igual a la suma de las estructuras mostradas en las figuras 2-2b, 2-2c, 2-2d y 2-2e, es decir

$$ER = EP + ERd_1 + ERd_2 + ERd_3$$



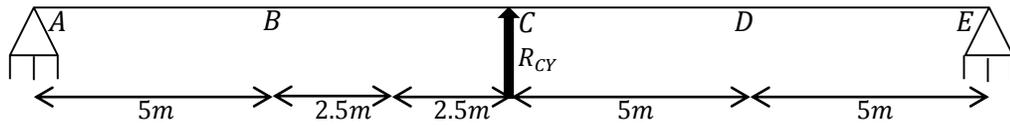
Estructura primaria (EP)  $\Rightarrow M$

(b)



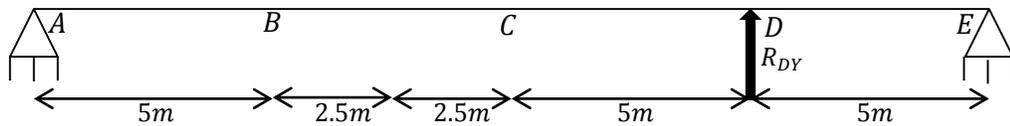
Estructura liberada con fuerza redundante  $R_{BY}$  aplicada ( $ERd_1$ )

(c)



Estructura liberada con fuerza redundante  $R_{CY}$  aplicada ( $ERd_2$ )

(d)



Estructura liberada con fuerza redundante  $R_{DY}$  aplicada ( $ERd_3$ )

(e)

**Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica**

Tomando en cuenta la compatibilidad del desplazamiento vertical en los soportes  $B$ ,  $C$  y  $D$ , puede plantearse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\delta_{VBEP} + \delta_{VBERd_1} + \delta_{VBERd_2} + \delta_{VBERd_3} = \delta_{VBER} \text{ --- (1)}$$

$$\delta_{VCEP} + \delta_{VCErd_1} + \delta_{VCErd_2} + \delta_{VCErd_3} = \delta_{VCEr} \text{ --- (2)}$$

$$\delta_{VDEP} + \delta_{VDErd_1} + \delta_{VDErd_2} + \delta_{VDErd_3} = \delta_{VDER} \text{ --- (3)}$$

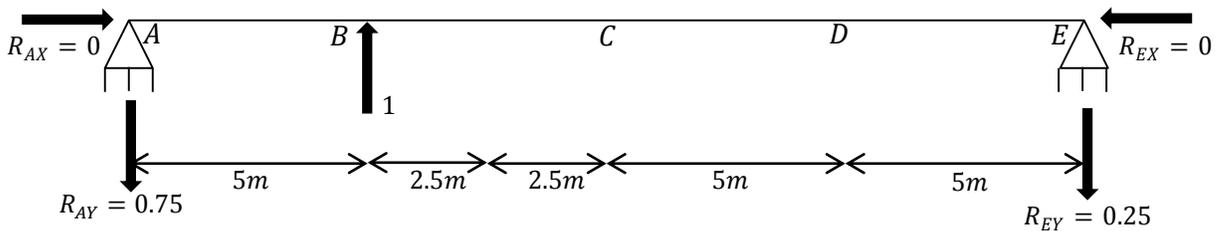
Obsérvese que en la viga real los puntos  $C$  y  $D$  no experimentan desplazamiento vertical debido a que las reacciones verticales de sus respectivos apoyos lo impiden, por lo que  $\delta_{VCEr}$  y  $\delta_{VDER}$  son nulos. Aunque en el punto  $B$  también hay un pasador, existe la condición de que éste sufre un asentamiento de  $0.015m$  y como las cargas unitarias se propondrán hacia arriba un desplazamiento en ese sentido se considera positivo,  $\therefore \delta_{VBER} = -0.015$ . Si hacemos las sustituciones correspondientes y expresamos el sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica en función de las incógnitas obtenemos

$$d_1 + f_{11}R_{BY} + f_{12}R_{CY} + f_{13}R_{DY} = -0.015 \text{ --- (4)}$$

$$d_2 + f_{21}R_{BY} + f_{22}R_{CY} + f_{23}R_{DY} = 0 \text{ --- (5)}$$

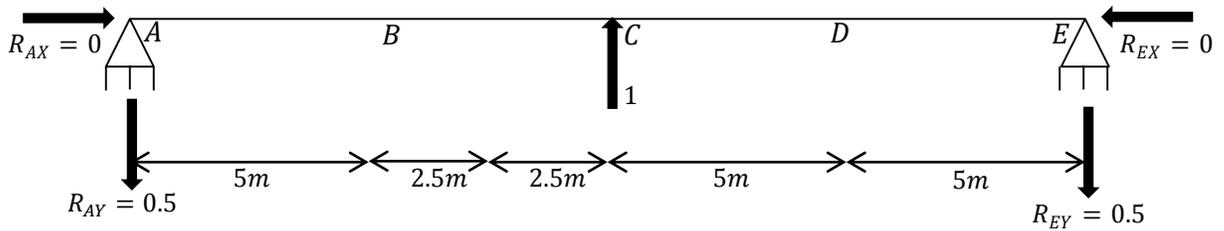
$$d_3 + f_{31}R_{BY} + f_{32}R_{CY} + f_{33}R_{DY} = 0 \text{ --- (6)}$$

Las estructuras visualizadas en las figuras 2-2f, 2-2g y 2-2h auxilian a obtener el valor de los coeficientes de flexibilidad fácilmente ya que sólo soportan una unidad de carga vertical en  $B$ ,  $C$  y  $D$ , respectivamente.



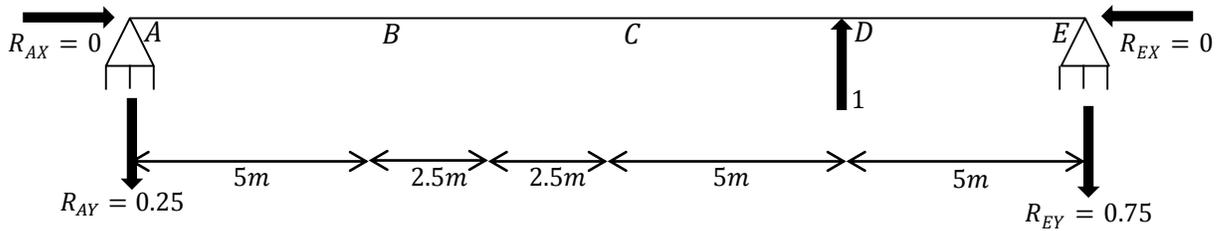
Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en  $B(ECu_1) \Rightarrow m_1$

(f)



Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en C ( $ECu_2$ )  $\Rightarrow m_2$

(g)



Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en D ( $ECu_3$ )  $\Rightarrow m_3$

(h)

### Cálculo de las incompatibilidades geométricas y de los coeficientes de flexibilidad

En resumen, en las vigas mostradas en las figuras 2-2b, 2-2f, 2-2g y 2-2h es necesario determinar los valores del desplazamiento vertical en B dado que  $R_{BY}$  (fuerza reactiva vertical en el pasador del punto B) fue suprimida, del desplazamiento vertical en C dado que  $R_{CY}$  (fuerza reactiva vertical en el pasador del punto C) fue eliminada y del desplazamiento vertical en D dado que  $R_{DY}$  (fuerza reactiva vertical en el pasador del punto D) se ha quitado.

El orden en el que se calcularán los desplazamientos citados aplicando el método del trabajo virtual, considerando sólo las deformaciones debidas a flexión, se proporciona enseguida.

$$d_1 = \delta_{VBEP} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI} dx; d_2 = \delta_{VCEP} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI} dx; d_3 = \delta_{VDEP} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_3}{EI} dx$$

$$f_{11} = \delta_{VBEcu_1} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1m_1}{EI} dx; f_{21} = \delta_{VCEcu_2} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1m_2}{EI} dx; f_{31} = \delta_{VDEcu_3} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1m_3}{EI} dx$$

$$f_{12} = \delta_{VBECu_1} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2 m_1}{EI} dx; f_{22} = \delta_{VCECu_2} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2 m_2}{EI} dx; f_{32} = \delta_{VDECu_3} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2 m_3}{EI} dx$$

$$f_{13} = \delta_{VBECu_1} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_3 m_1}{EI} dx; f_{23} = \delta_{VCECu_2} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_3 m_2}{EI} dx; f_{33} = \delta_{VDECu_3} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_3 m_3}{EI} dx$$

Se analiza la viga *EP*, figura 2-1b.

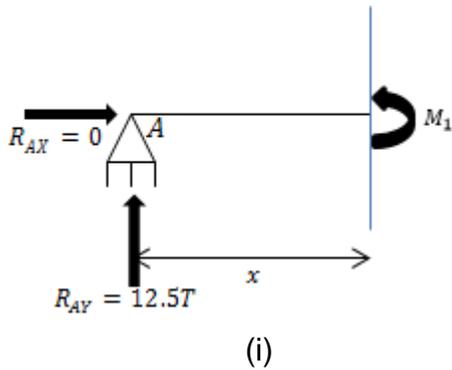
Al aplicar las ecuaciones de equilibrio se obtiene

$$+\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow 20(7.5) - R_{EY}(20) = 0 \Rightarrow \therefore R_{EY} = 7.5T \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 20 + 7.5 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 12.5T \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = R_{EX} = 0$$

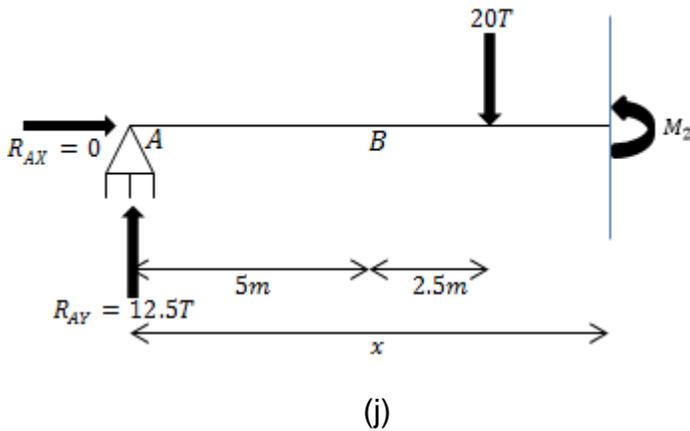
Los momentos internos *M* se obtienen con base en las figuras 2-2i y 2-2j.



$$0 \leq x \leq 7.5m$$

$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 12.5x$$



$$7.5m \leq x \leq 20m$$

$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 12.5x - 20(x - 7.5) = 150 - 7.5x$$

Viga  $ECu_1$ , figura 2-1f.

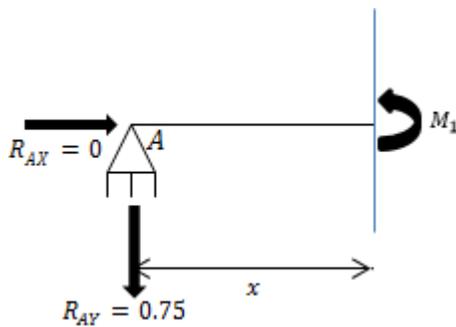
Se calculan las reacciones en los soportes.

$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow -1(5) + R_{EY}(20) = 0 \Rightarrow \therefore R_{EY} = 0.25 \downarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 1 - 0.25 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0.75 \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = R_{EX} = 0$$

Se deducen los momentos internos  $m_1$  a partir de las figuras 2-2k y 2-2l.

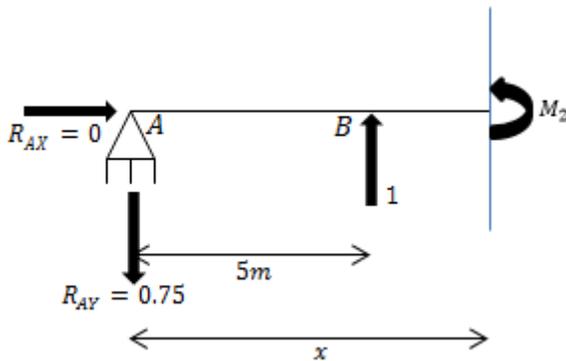


(k)

$$0 \leq x \leq 5m$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -0.75x$$



(l)

$$5m \leq x \leq 20m$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -0.75x + 1(x - 5) = 0.25x - 5$$

Viga  $ECu_2$ , figura 2-1g.

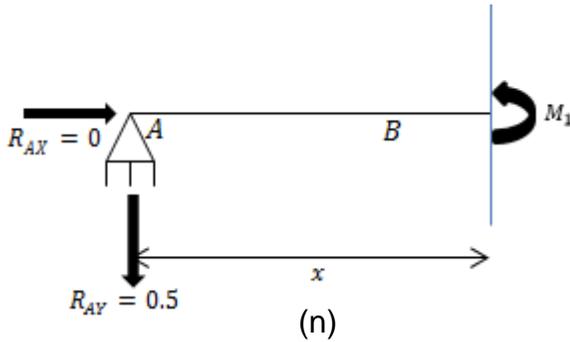
Las fuerzas reactivas en los apoyos son resultado de

$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow -1(10) + R_{EY}(20) = 0 \Rightarrow \therefore R_{EY} = 0.5 \downarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 1 - 0.5 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0.5 \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = R_{EX} = 0$$

Se proporcionan los momentos internos  $m_2$ , figuras 2-2n y 2-2ñ.

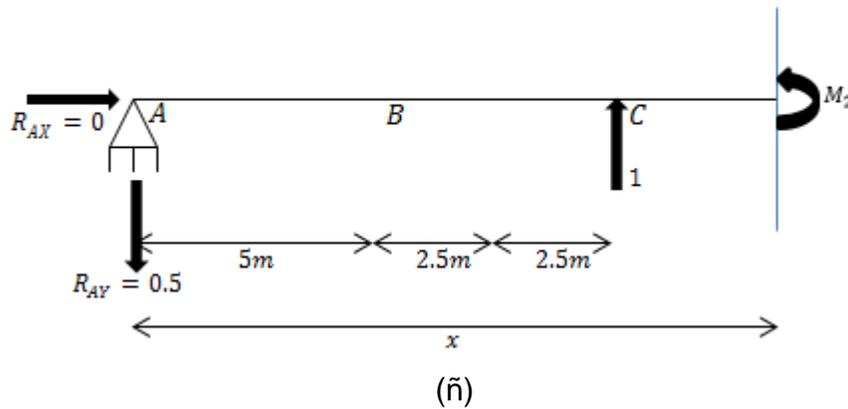


$$0 \leq x \leq 10m$$

$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -0.5x$$

$$10m \leq x \leq 20m$$



$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow M_2 = -0.5x + 1(x - 10) = 0.5x - 10$$

Viga  $ECu_3$ , figura 2-1h.

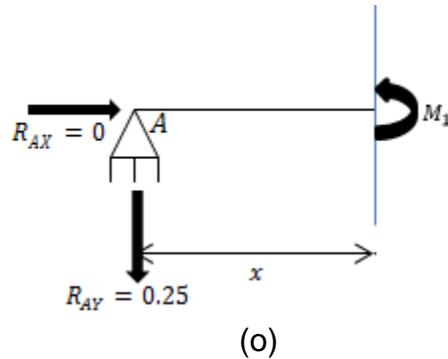
Las reacciones en los soportes son

$$+\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow 0 - 1(15) + R_{EY}(20) = 0 \Rightarrow \therefore R_{EY} = 0.75 \downarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 1 - 0.75 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0.25 \downarrow$$

$$\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = R_{EX} = 0$$

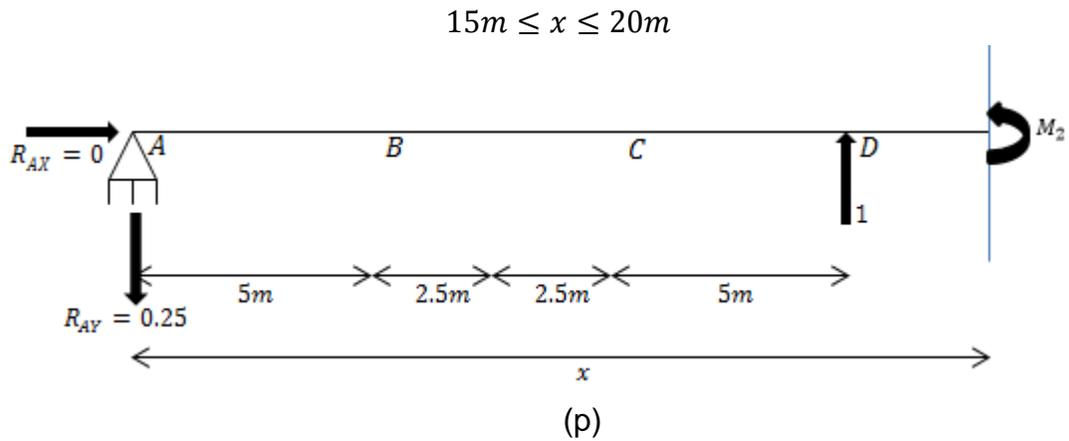
Se muestran los momentos internos  $m_3$ .



$$0 \leq x \leq 15m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -0.25x$$



$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow M_2 = -0.25x + 1(x - 15) = 0.75x - 15$$

Se presenta el cálculo de las incompatibilidades geométricas.

$$d_1 = \frac{1}{34200} \left[ \int_0^5 (12.5x)(-0.75x) dx + \int_5^{7.5} (12.5x)(0.25x - 5) dx \right. \\ \left. + \int_{7.5}^{20} (150 - 7.5x)(0.25x - 5) dx \right] = -0.066627m$$

$$d_2 = \frac{1}{34200} \left[ \int_0^{7.5} (12.5x)(-0.5x) dx + \int_{7.5}^{10} (150 - 7.5x)(-0.5x) dx \right. \\ \left. + \int_{10}^{20} (150 - 7.5x)(0.5x - 10) dx \right] = -0.08909m$$

$$d_3 = \frac{1}{34200} \left[ \int_0^{7.5} (12.5x)(-0.25x)dx + \int_{7.5}^{15} (150 - 7.5x)(-0.25x)dx \right. \\ \left. + \int_{15}^{20} (150 - 7.5x)(0.75x - 15)dx \right] = -0.058251m$$

Se muestra el cálculo de los coeficientes de flexibilidad.

$$f_{11} = \frac{1}{34200} \left[ \int_0^5 (-0.75x)(-0.75x)dx + \int_{15}^{20} (0.25x - 5)(0.25x - 5)dx \right] = 0.002741m$$

$$f_{21} = \frac{1}{34200} \left[ \int_0^5 (-0.75x)(-0.5x)dx + \int_5^{10} (0.25x - 5)(-0.5x)dx \right. \\ \left. + \int_{10}^{20} (0.25x - 5)(0.5x - 10)dx \right] = 0.00335m$$

$$f_{31} = \frac{1}{34200} \left[ \int_0^5 (-0.75x)(-0.25x)dx + \int_5^{15} (0.25x - 5)(-0.25x)dx \right. \\ \left. + \int_{15}^{20} (0.25x - 5)(0.75x - 15)dx \right] = 0.002132m$$

$$f_{12} = f_{21} = 0.00335m$$

$$f_{22} = \frac{1}{34200} \left[ \int_0^{10} (-0.5x)(-0.5x)dx + \int_{10}^{20} (0.5x - 10)(0.5x - 10)dx \right] = 0.004873m$$

$$f_{32} = \frac{1}{34200} \left[ \int_0^{10} (-0.5x)(-0.25x)dx + \int_{10}^{15} (0.5x - 10)(-0.25x)dx \right. \\ \left. + \int_{15}^{20} (0.5x - 10)(0.75x - 15)dx \right] = 0.00335m$$

$$f_{13} = f_{31} = 0.002132m$$

$$f_{23} = f_{32} = 0.00335m$$

$$f_{33} = \frac{1}{34200} \left[ \int_0^{15} (-0.25x)(-0.25x)dx + \int_{15}^{20} (0.75x - 15)(0.75x - 15)dx \right] \\ = 0.002741m$$

### Cálculo de las redundantes

Al sustituir los resultados en las ecuaciones (4), (5) y (6) se tiene

$$-0.066627 + 0.002741R_{BY} + 0.00335R_{CY} + 0.002132R_{DY} = -0.015 \text{ --- (7)}$$

$$-0.08909 + 0.00335R_{BY} + 0.004873R_{CY} + 0.00335R_{DY} = 0 \text{ --- (8)}$$

$$-0.058251 + 0.002132R_{BY} + 0.00335R_{CY} + 0.002741R_{DY} = 0 \text{ --- (9)}$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$R_{BY} = -29.0593, R_{CY} = 50.7592, R_{DY} = -18.1824$$

Los signos negativos indican que tales reacciones tienen un sentido opuesto al propuesto en su respectiva carga unitaria. Por lo tanto,

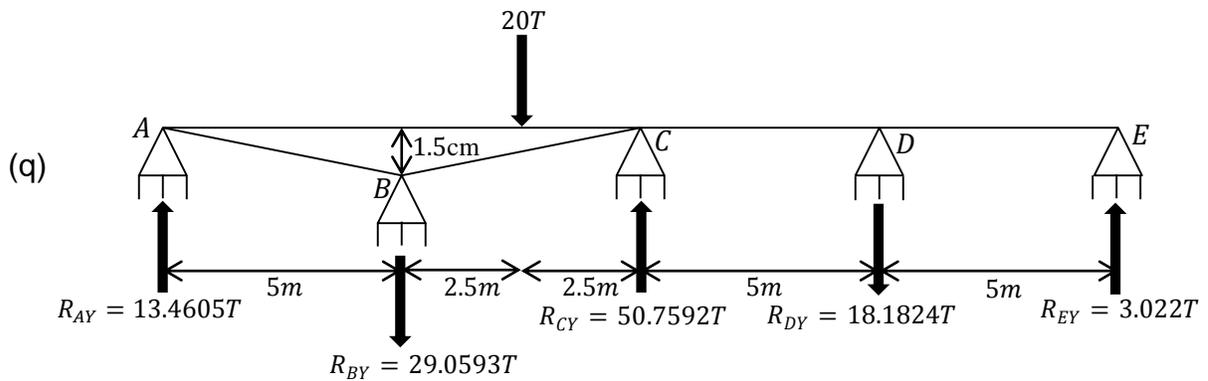
$$R_{BY} = 29.0593T \downarrow$$

$$R_{CY} = 50.7592T \uparrow$$

$$R_{DY} = 18.1824T \downarrow$$

### Ecuaciones de equilibrio

En el diagrama de la figura 2-2q se visualizan los valores de todas las reacciones en los soportes de la viga real.



Las reacciones restantes se obtiene de

$$+\curvearrowright \sum MA = 0$$

$$29.0593(5) + 20(7.5) - 50.7592(10) + 18.1824(15) - R_{EY}(20) = 0$$

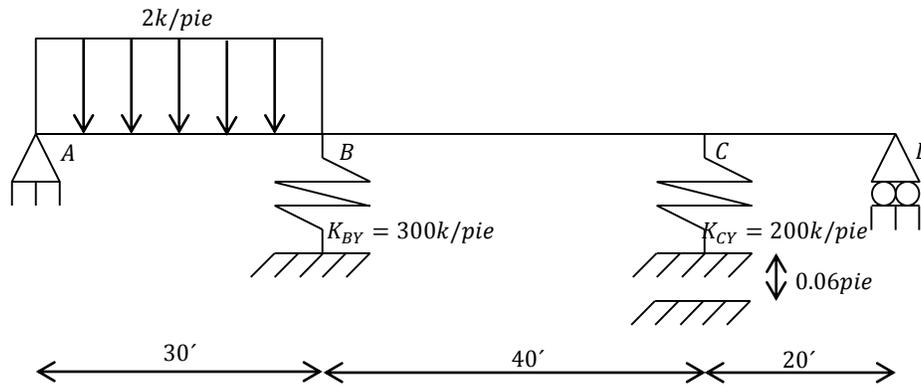
$$\therefore R_{EY} = 3.022T \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$R_{AY} - 29.0593 - 20 + 50.7592 - 18.1824 + 3.022 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 13.4605T \uparrow$$

**Ejercicio 2.3 Método de flexibilidades aplicado a una viga con un asentamiento en un soporte modelado como resorte helicoidal.**

**Instrucciones** Calcule las reacciones en los apoyos de la viga continua de tres tramos representada en la figura 2-3a. Sobre el tramo  $A - B$  actúa una carga de  $2k/pie$  y un error de construcción desplazó al apoyo  $C$   $0.06pie$  por debajo de la posición prevista. Los apoyos  $B$  y  $C$  se modelan como resortes elásticos de compresión o helicoidales; las constantes de resorte respectivas se especifican en la ilustración.  $E$  e  $I$  son constantes para toda la viga y  $EI = 276000k - pie^2$ .



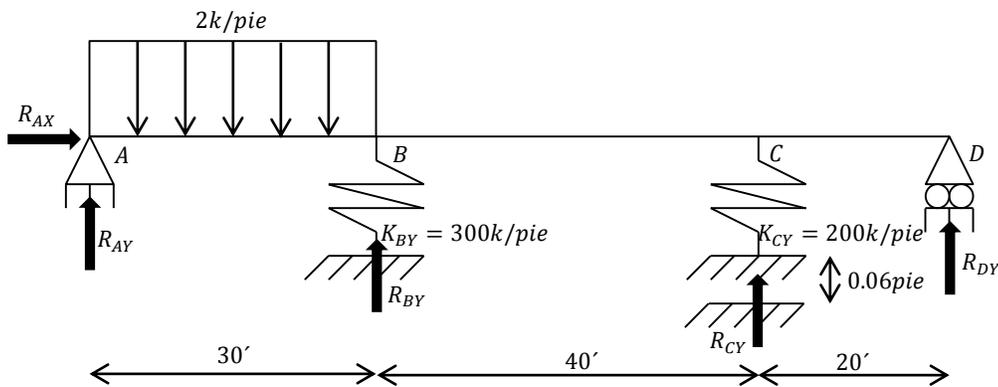
Estructura real (ER)

(a)

**Figura 2-3**

**SOLUCIÓN**

**Verificación del grado de indeterminación y elección de las reacciones redundantes**



(b)

Las reacciones en los soportes han sido debidamente identificadas, figura 2-3b.

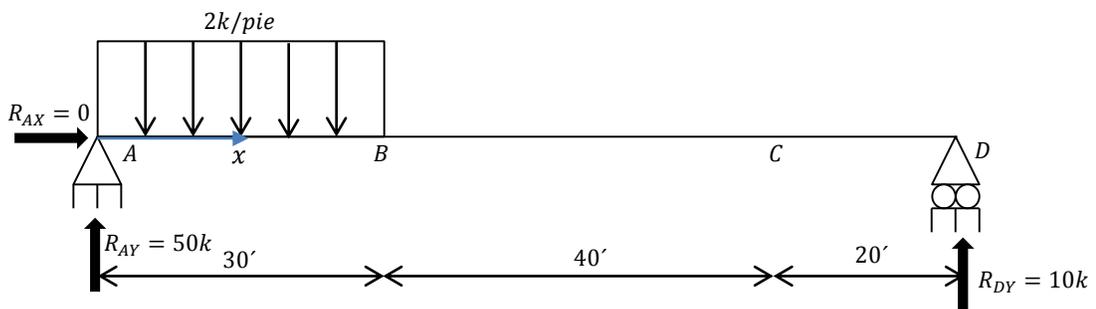
Como la viga no soporta alguna fuerza horizontal, directamente de suma de fuerzas en la dirección  $X$  se obtiene que  $R_{AX} = 0$ .

Entonces, la viga es estáticamente indeterminada de segundo grado. Se Seleccionan como redundantes las reacciones de los soportes modelados con resortes helicoidales.

### Principio de superposición

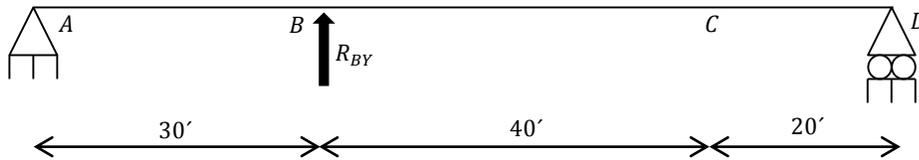
Por superposición, la viga real ( $ER$ ) es igual a la suma de las vigas observadas en las figuras 2-3c, 2-3d y 2-3e:

$$ER = EP + ERd_1 + ERd_2$$



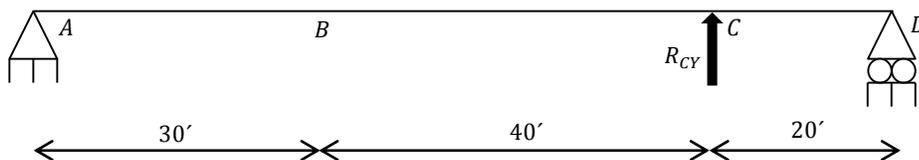
Estructura primaria ( $EP$ )  $\Rightarrow M$

(c)



Estructura liberada con fuerza redundante  $R_{BY}$  aplicada ( $ERd_1$ )

(d)



Estructura liberada con fuerza redundante  $R_{CY}$  aplicada ( $ERd_2$ )

(e)

**Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica**

Tomando en cuenta la compatibilidad del desplazamiento vertical tanto en el soporte *B* como en el *C*, puede plantearse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\delta_{VBEP} + \delta_{VBERd_1} + \delta_{VBERd_2} = \delta_{VBER} \text{ --- (1)}$$

$$\delta_{VCEP} + \delta_{VCErd_1} + \delta_{VCErd_2} = \delta_{VCEr} \text{ --- (2)}$$

Obsérvese que en la viga real (*ER*) el punto *B*, debido al resorte helicoidal, experimenta un desplazamiento vertical opuesto a su fuerza reactiva que equivale a ésta última entre su correspondiente constante de resorte. Algo análogo ocurre en el punto *D*, pero además ahí se ha impuesto un desplazamiento vertical hacia abajo de 0.006 *pies*.

Las redundantes se han propuesto hacia arriba, por lo que las cargas unitarias para la estructura liberada también tendrán esa dirección; ello indica que estamos adoptando una convención de signo en la que un desplazamiento hacia arriba se considera positivo. Por todo lo anterior, el desplazamiento vertical en el punto *B* de la viga real equivale a  $\delta_{VBER} = -\frac{R_{BY}}{K_{BY}}$  y el desplazamiento vertical en el punto *C* es igual a  $\delta_{VCEr} = -\frac{R_{CY}}{K_{CY}} - 0.06$ . Si hacemos las sustituciones correspondientes y expresamos el sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica en función de las incógnitas obtenemos

$$d_1 + f_{11}R_{BY} + f_{12}R_{CY} = -\frac{R_{BY}}{K_{BY}} \text{ --- (3)}$$

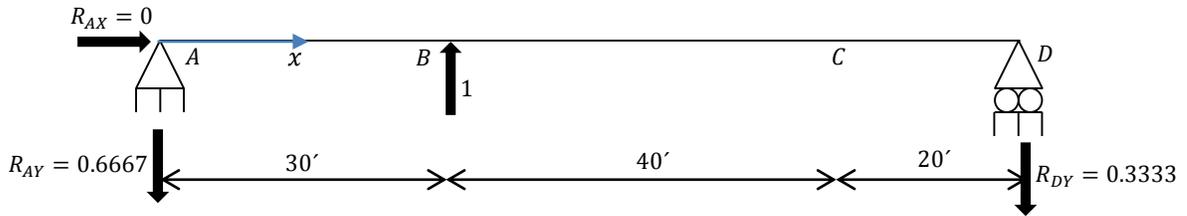
$$d_2 + f_{21}R_{BY} + f_{22}R_{CY} = -\frac{R_{CY}}{K_{CY}} - 0.06 \text{ --- (4)}$$

Al agrupar términos semejantes se tiene

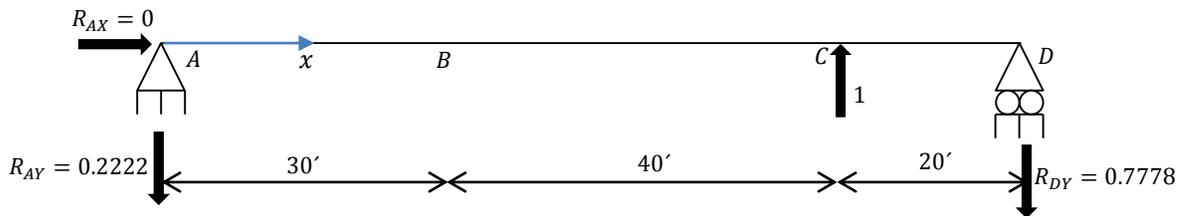
$$d_1 + \left(f_{11} + \frac{1}{K_{BY}}\right)R_{BY} + f_{12}R_{CY} = 0 \text{ --- (5)}$$

$$d_2 + f_{21}R_{BY} + \left(f_{22} + \frac{1}{K_{CY}}\right)R_{CY} = -0.06 \text{ --- (6)}$$

Las siguientes estructuras, figuras 2-3f y 2-3g, auxilian a obtener el valor de los coeficientes de flexibilidad fácilmente ya que sólo soportan una unidad de carga vertical en *B* y *C*, respectivamente.



Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en B ( $ECu_1$ )  $\Rightarrow m_1$   
(f)



Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en C ( $ECu_2$ )  $\Rightarrow m_2$   
(g)

### Cálculo de las incompatibilidades geométricas y de los coeficientes de flexibilidad

En resumen, en las vigas de las figuras 2-3c, 2-3f y 2-3g es necesario determinar los valores del desplazamiento vertical en B dado que  $R_{BY}$  (fuerza reactiva vertical en el resorte helicoidal del punto B) fue suprimida y del desplazamiento vertical en C dado que  $R_{CY}$  (fuerza reactiva vertical en el resorte de compresión del punto C) fue eliminada.

El orden con el que se calcularán los desplazamientos citados aplicando el método del trabajo virtual considerando sólo las deformaciones debidas a flexión, se proporciona en seguida.

$$d_1 = \delta_{VBEP} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI} dx; d_2 = \delta_{VCEP} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI} dx; f_{11} = \delta_{VBEcu_1} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1m_1}{EI} dx$$

$$f_{21} = \delta_{VCEcu_1} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1m_2}{EI} dx; f_{12} = \delta_{VBEcu_2} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2m_1}{EI} dx; f_{22} = \delta_{VCEcu_2} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2m_2}{EI} dx$$

Viga EP, figura 2-3c.

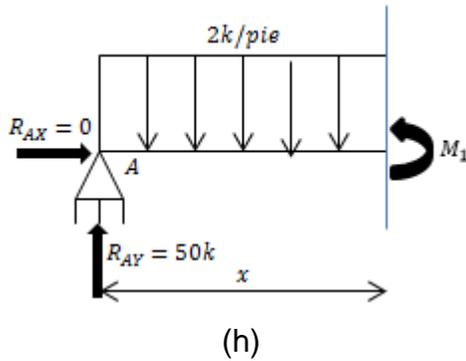
Se calculan las reacciones en los apoyos.

$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow 2(30) \left( \frac{1}{2}(30) \right) - R_{DY}(90) = 0 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 10k \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 2(30) + 10 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 50k \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 0$$

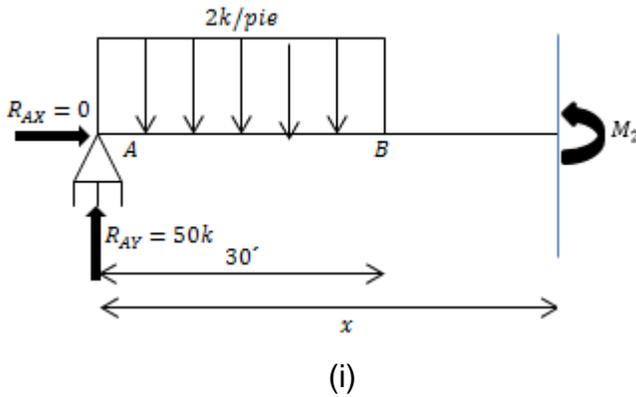
Los momentos internos  $M$ , figuras 2-3h y 2-3i, son



$$0' \leq x \leq 30'$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 50x - 2(x) \left( \frac{x}{2} \right) = 50x - x^2$$



$$30' \leq x \leq 90'$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 50x - 2(30) \left( x - \frac{1}{2}(30) \right) = 900 - 10x$$

Viga  $ECu_1$ , figura 2-3f.

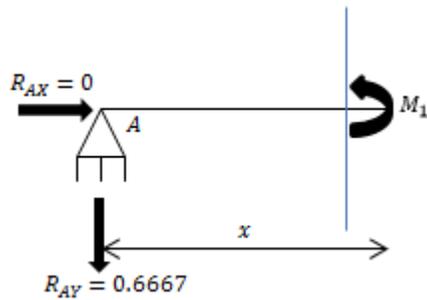
Se muestra el cálculo de las reacciones en los apoyos.

$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow -1(30) + R_{DY}(90) = 0 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 0.3333 \downarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 1 - 0.3333 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0.6667 \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0$$

Se deducen los momentos internos  $m_1$ , figuras 2-3j y 2-3k.

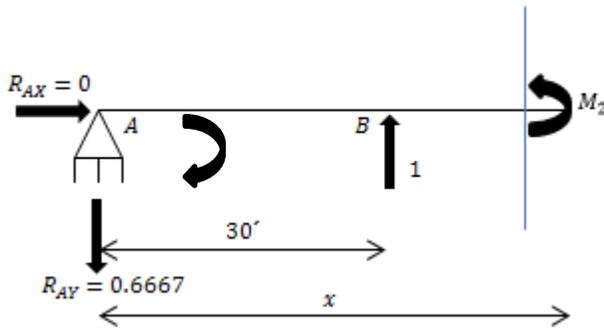


(j)

$$0' \leq x \leq 30'$$

$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -0.6667x$$



(k)

$$30' \leq x \leq 90'$$

$$+\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -0.6667x + 1(x - 30) = 0.3333x - 30$$

Viga  $ECu_2$ , figura 2-3g.

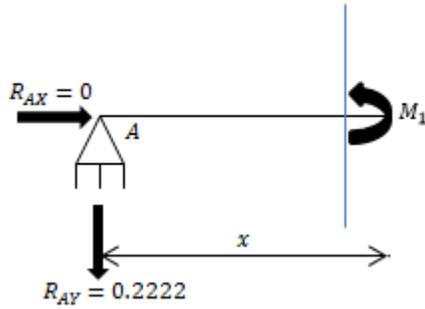
Se determinan las reacciones en los apoyos.

$$+\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow -1(70) + R_{DY}(90) = 0 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 0.7778 \downarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 1 - 0.7778 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0.2222 \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0$$

Se calculan los momentos internos  $m_2$ , figuras 2-3l y 2-3m.



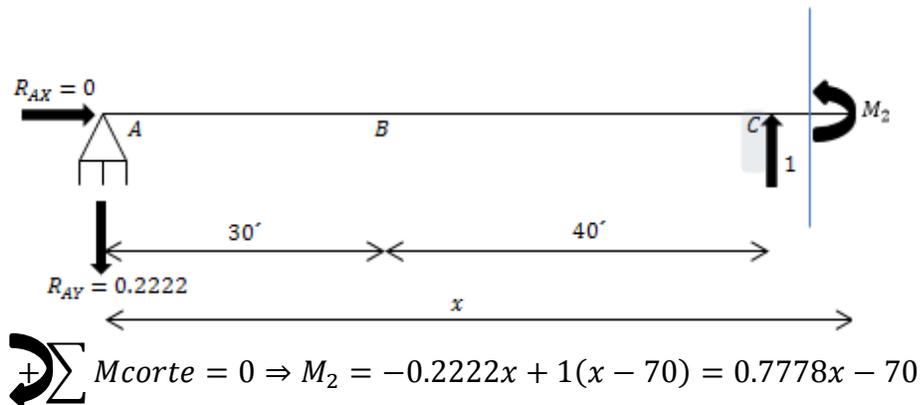
(l)

$$0' \leq x \leq 70'$$

$$+\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -0.2222x$$

$$70' \leq x \leq 90'$$



(m)

$$+\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow M_2 = -0.2222x + 1(x - 70) = 0.7778x - 70$$

Se proporciona el cálculo de las incompatibilidades geométricas.

$$d_1 = \frac{1}{276000} \left[ \int_0^{30} (50x - x^2)(-0.6667x) dx + \int_{30}^{90} (900 - 10x)(0.3333x - 30) dx \right]$$

$$= -1.46753 \text{pies}$$

$$d_2 = \frac{1}{276000} \left[ \int_0^{30} (50x - x^2)(-0.2222x) dx + \int_{30}^{70} (900 - 10x)(-0.2222x) dx \right.$$

$$\left. + \int_{70}^{90} (900 - 10x)(0.7778x - 70) dx \right] = -0.875511 \text{pies}$$

Se presenta el cálculo de los coeficientes de flexibilidad.

$$f_{11} = \frac{1}{276000} \left[ \int_0^{30} (-0.6667x)(-0.6667x)dx + \int_{30}^{90} (0.3333x - 30)(0.3333x - 30)dx \right]$$

$$= 0.043487pies$$

$$f_{21} = \frac{1}{276000} \left[ \int_0^{30} (-0.6667x)(-0.2222x)dx + \int_{30}^{70} (0.3333x - 30)(-0.2222x)dx \right.$$

$$\left. + \int_{70}^{90} (0.3333x - 30)(0.7778x - 70)dx \right] = 0.027377pies$$

$$f_{12} = f_{21} = 0.027377pies$$

$$f_{22} = \frac{1}{276000} \left[ \int_0^{70} (-0.2222x)(-0.2222x)dx + \int_{70}^{90} (0.7778x - 70)(0.7778x - 70)dx \right]$$

$$= 0.026296pies$$

### Cálculo de las reacciones redundantes

Al expresar en forma matricial el sistema de ecuaciones de compatibilidad se tiene

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11} + \frac{1}{K_1} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} + \frac{1}{K_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.06 \end{pmatrix} \dots (7)$$

Sustituyendo los resultados en la expresión (7) y resolviendo se obtiene

$$\begin{pmatrix} -1.46753 \\ -0.875511 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.043487 + \frac{1}{300} & 0.027377 \\ 0.027377 & 0.026296 + \frac{1}{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.06 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.043487 + \frac{1}{300} & 0.027377 \\ 0.027377 & 0.026296 + \frac{1}{200} \end{pmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -0.06 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1.46753 \\ -0.875511 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 32.9728 \\ -2.78584 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$R_{BY} = 32.9728k \uparrow \quad y \quad R_{CY} = 2.78584k \downarrow$$

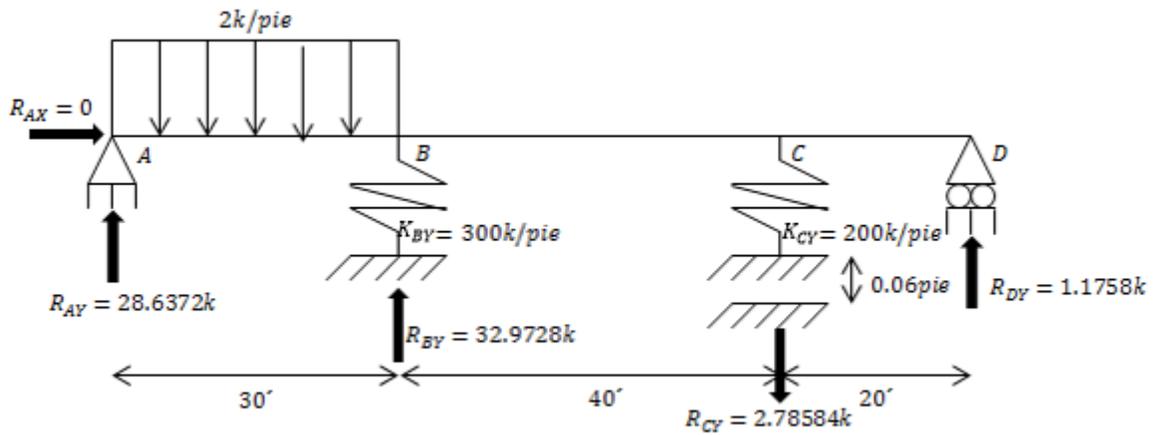
### Ecuaciones de equilibrio

Las reacciones restantes se obtienen de

$$+\circlearrowleft \sum MA = 0 \Rightarrow 2(30) \left( \frac{1}{2}(30) \right) - 32.9728(30) + 2.78584(70) - R_{DY}(90) = 0 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 1.1758k \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 2(30) + 32.9728 - 2.78584 + 1.1758 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 28.6372k \uparrow$$

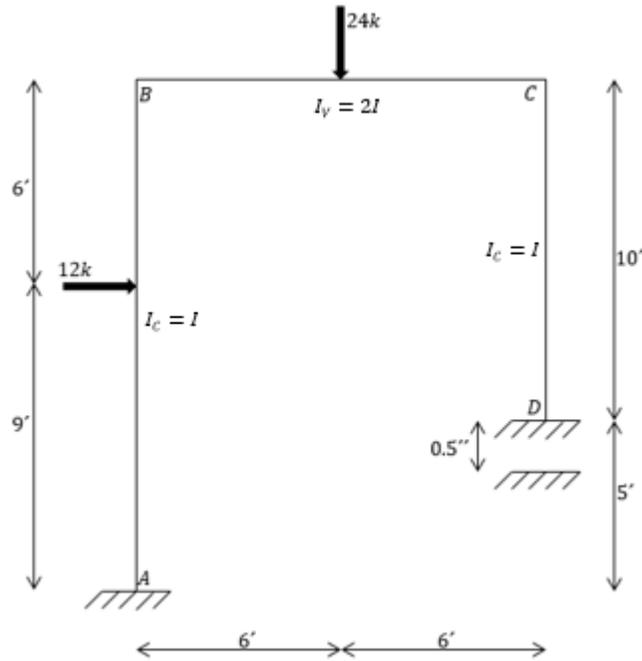
En el diagrama de la figura 2-3n se visualizan los valores de todas las reacciones en los soportes de la viga real.



(n)

**Ejercicio 2.4 Método de flexibilidades aplicado a un pórtico con un asentamiento en un apoyo.**

**Instrucciones** Calcule las reacciones de los apoyos de la estructura plana descrita en la figura 2-4a correspondientes a la carga y perturbación del apoyo  $D$  indicadas; esta última corresponde al asentamiento de 0.50 pulgadas que experimenta el poyo derecho. La estructura esta empotrada en los puntos  $A$  y  $D$ , el momento de inercia de la viga es el doble del momento de inercia de las columnas, el módulo de elasticidad es constante y se sugiere que se consideren únicamente las deformaciones por flexión. Utilice  $E = 30000k/pulg^2$ ;  $I = 200pulg^4$ .



Estructura real (ER)  
(a)

**Figura 2-4**

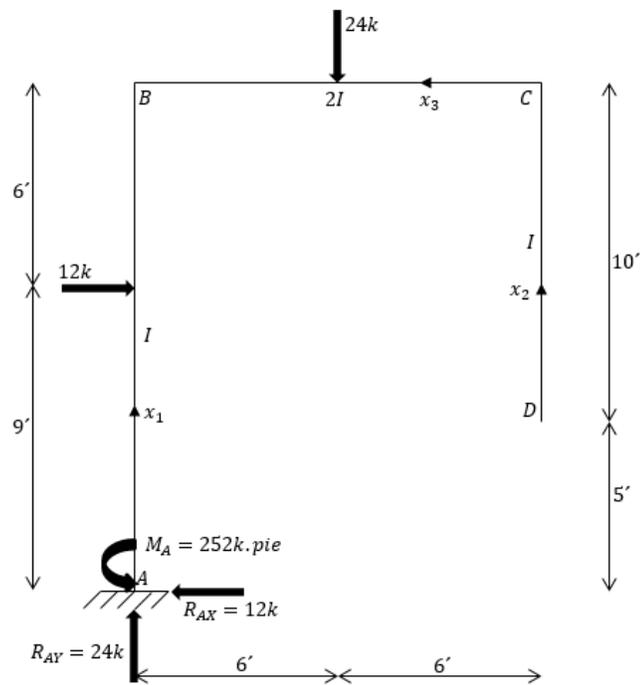
**SOLUCIÓN**

**Verificación del grado de indeterminación**

En esta estructura hay seis incógnitas de reacción, tres en cada empotramiento, es decir,  $r = 6(R_{AX}; R_{AY}; M_A; R_{DX}; R_{DY}; M_D)$ ; debido a que no hay condiciones impuestas por la construcción,  $c = 0$ . Además, está conformada por  $m = 3(A - B; B - C; D - C)$  miembros y el número de nodos es  $j = 4(A; B; C; D)$ . Como  $3m + r > 3j + c$  ya que  $3(3) + 6 > 3(4) + 0 \Rightarrow 15 > 12$ , el marco es estáticamente indeterminado en tercer grado ( $15 - 12 = 3$ ).

### Elección de las reacciones redundantes y planteamiento de la estructura primaria

De acuerdo al grado de hiperestaticidad, tres acciones son redundantes; por conveniencia se escogen las tres reacciones del empotramiento derecho, punto *D*. En consecuencia, la estructura se libera suprimiendo el empotramiento en *D*. Con esta modificación queda definida la estructura primaria, la cual soporta las mismas cargas externas que la estáticamente indeterminada, figura 2-4b.



Estructura primaria (EP)  $\Rightarrow$  M  
(b)

### Principio de superposición

La estructura real es igual a la suma de la estructura liberada bajo la acción: A) de las cargas originales y B) de cada una de las reacciones redundantes por separado.

**Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica**

El asentamiento en el apoyo  $D$  es

$$-0.5\text{pulg} \left( \frac{1\text{pie}}{12\text{pulg}} \right) = -0.041667\text{pies}$$

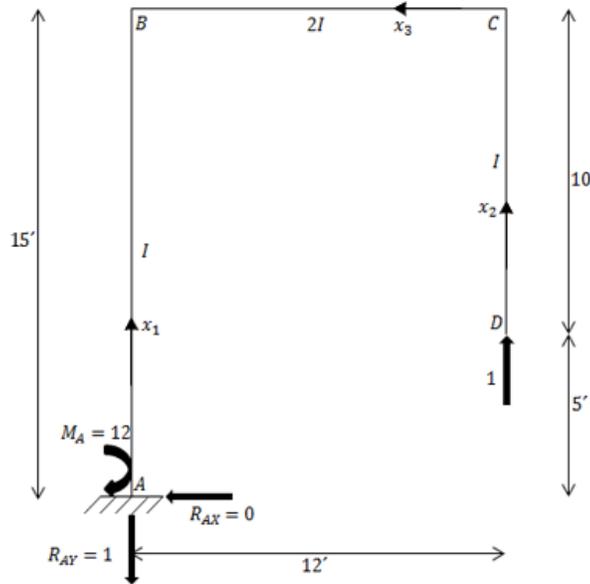
y tiene un valor negativo porque la carga unitaria correspondiente a la redundante  $R_{DY}$  se propondrá hacia arriba y ello definirá una convención de signos en la que los desplazamientos con esa dirección sean considerados positivos. De acuerdo a lo que se ha venido estableciendo en los ejercicios anteriores de flexibilidades, las incógnitas pueden calcularse directamente formulando el siguiente sistema en el que por superposición se establece una ecuación de compatibilidad para los desplazamientos vertical y horizontal, y la rotación, todos en  $D$ , en ese orden.

$$d_1 + f_{11}R_{DY} + f_{12}R_{DX} + f_{13}M_D = -0.041667 \text{ --- (1)}$$

$$d_2 + f_{21}R_{DY} + f_{22}R_{DX} + f_{23}M_D = 0 \text{ --- (2)}$$

$$d_3 + f_{31}R_{DY} + f_{32}R_{DX} + f_{33}M_D = 0 \text{ --- (3)}$$

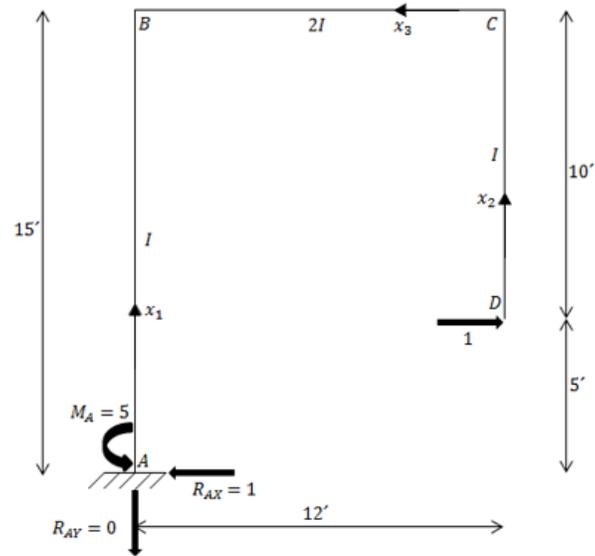
Para el cálculo directo de los coeficientes de flexibilidad  $f_{ij}$  se analizará la estructura liberada bajo la acción individual de una unidad de cada reacción redundante, figuras 2-4c, 2-4d y 2-4e.



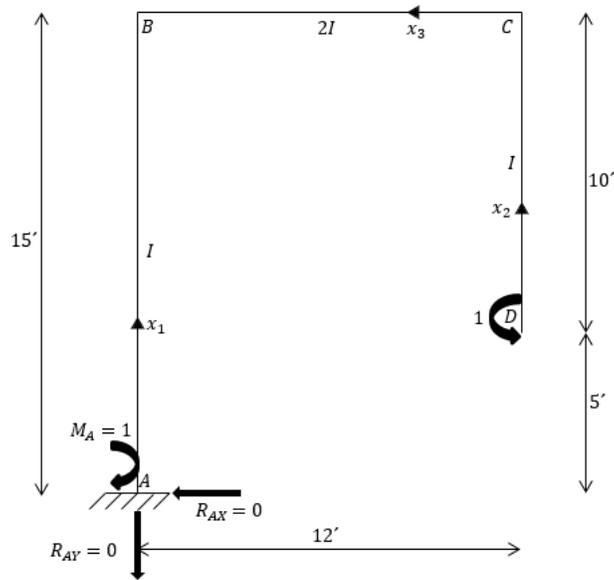
Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en  $D(ECu_1) \Rightarrow m_1$

(c)

CAPÍTULO 2 ANÁLISIS ESTRUCTURAL



Estructura liberada con fuerza horizontal unitaria aplicada en  $D(ECu_2) \Rightarrow m_2$   
(d)



Estructura liberada con momento puntual unitario aplicado en  $D(ECu_3) \Rightarrow m_3$   
(e)

### Cálculo de las incompatibilidades geométricas y de los coeficientes de flexibilidad

En particular, debe calcularse el desplazamiento que experimenta el punto  $D$  en la dirección de la línea de acción de las reacciones redundantes en cada caso de carga de la estructura liberada. Se aplicará el método del trabajo virtual para calcular los desplazamientos y las pendientes.

$$d_1 = \delta_{VD_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI} dx; d_2 = \Delta_{HD_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI} dx; d_3 = \theta_{D_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_3}{EI} dx$$

$$f_{11} = \delta_{VD_{ECu_1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1m_1}{EI} dx; f_{21} = \Delta_{HD_{ECu_1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1m_2}{EI} dx; f_{31} = \theta_{D_{ECu_1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1m_3}{EI} dx$$

$$f_{12} = \delta_{VD_{ECu_2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2m_1}{EI} dx; f_{22} = \Delta_{HD_{ECu_2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2m_2}{EI} dx; f_{32} = \theta_{D_{ECu_2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2m_3}{EI} dx$$

$$f_{13} = \delta_{VD_{ECu_3}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_3m_1}{EI} dx; f_{23} = \Delta_{HD_{ECu_3}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_3m_2}{EI} dx; f_{33} = \theta_{D_{ECu_3}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_3m_3}{EI} dx$$

Se considerará el Teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos para establecer que  $f_{ij} = f_{ji}$ .

Al calcular los momentos internos, se usarán las coordenadas  $x_1, x_2$  y  $x_3$  que se observan en las figuras precedentes, pero el lector puede usar otras que sean válidas para cubrir todas las regiones de cada miembro del marco.

Marco  $EP$ , figura 2-4b.

Las reacciones en los soportes son

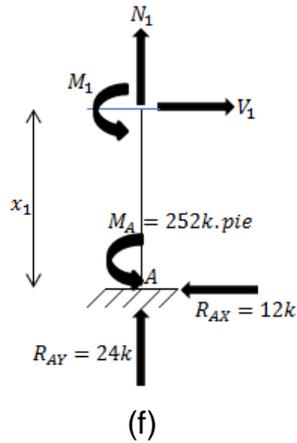
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 12 - R_{AX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 12k \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 24 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 24k \uparrow$$

$$+\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow 24(6) + 12(9) - M_A = 0 \Rightarrow \therefore M_A = 252k \cdot \text{pie} \curvearrowright$$

Se deducen los momentos internos  $M$ , figuras 2-4f hasta 2-4j.

Miembro A – B.



$$0 \leq x_1 \leq 9'$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{corte} = 0$$

$$-M_1 + 12(x_1) - 252 = 0$$

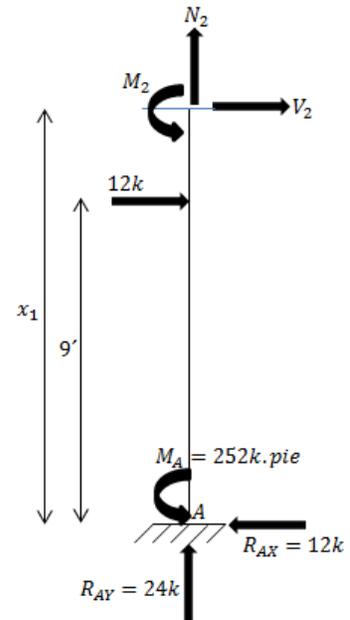
$$M_1 = 12x_1 - 252$$

$$9' \leq x_1 \leq 15'$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{corte} = 0$$

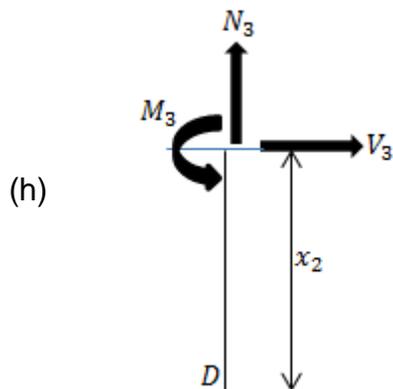
$$-M_2 + 12(x_1) - 12(x_1 - 9) - 252 = 0$$

$$M_2 = 12x_1 - 12(x_1 - 9) - 252 = -144$$



(g)

Miembro D – C.



$$0 \leq x_2 \leq 10'$$

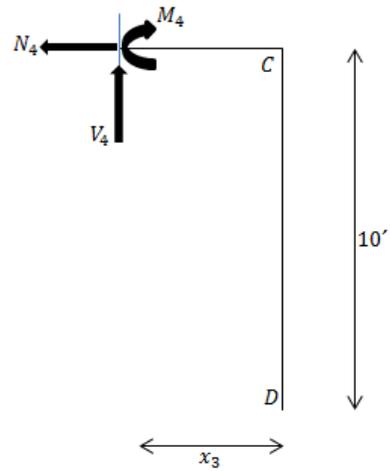
$$+\circlearrowleft \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow M_3 = 0$$

Miembro C – B.

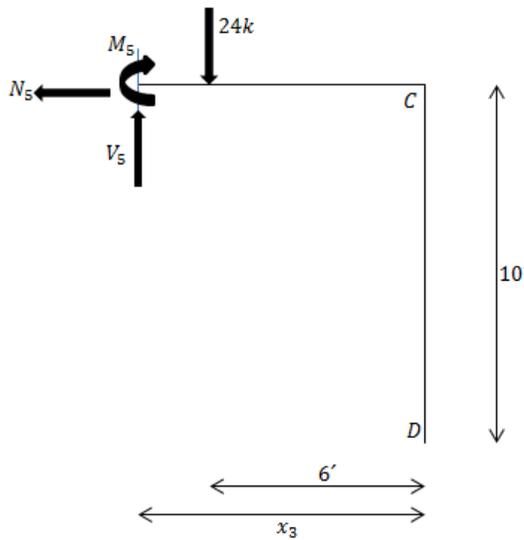
$$0 \leq x_3 \leq 6'$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_4 = 0$$



(i)



$$6' \leq x_3 \leq 12'$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_5 + 24(x_3 - 6) = 0$$

$$M_5 = 144 - 24x_3$$

(j)

Marco  $ECu_1$ , figura 2-4c.

Las reacciones en los soportes son

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 1 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 1 \downarrow$$

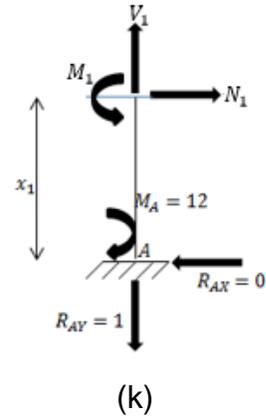
$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow M_A - 1(12) = 0 \Rightarrow \therefore M_A = 12 \curvearrowright$$

A partir de las figuras 2-4k, 2-4l y 2-4m, se determinan los momentos internos  $m_1$ .

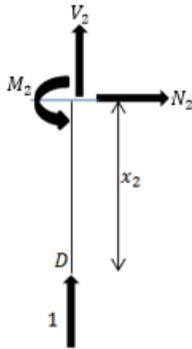
Miembro A – B.

$$0 \leq x_1 \leq 15'$$

$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow M_1 = 12$$



(l)



Miembro D – C.

$$0 \leq x_2 \leq 10'$$

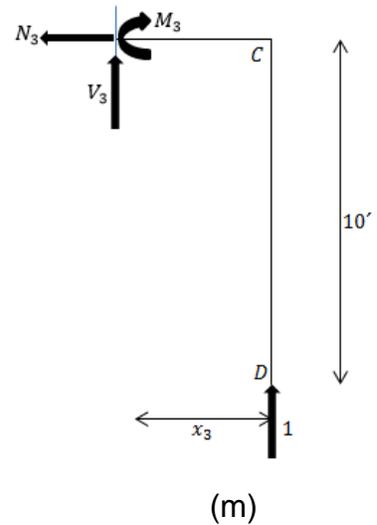
$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow M_2 = 0$$

Miembro C – B.

$$0 \leq x_3 \leq 12'$$

$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 - 1(x_3) = 0 \Rightarrow M_3 = x_3$$



Marco  $ECu_2$ , figura 2-4d.

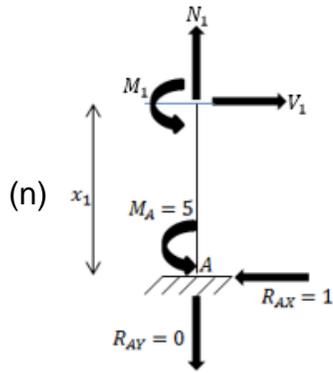
Las reacciones en los soportes son

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -R_{AX} + 1 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 1 \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} = 0$$

$$+\sum MA = 0 \Rightarrow -M_A + 1(5) = 0 \Rightarrow \therefore M_A = 5$$

Con base en las figuras 2-4n, 2-4ñ y 2-4o, se formulan los momentos internos  $m_2$ .



Miembro A – B.

$$0 \leq x_1 \leq 15'$$

$$+\sum M_{corte} = 0$$

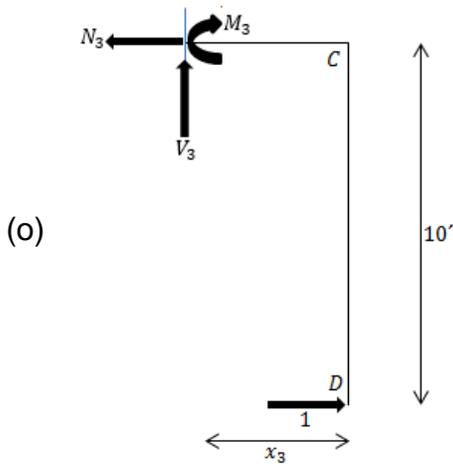
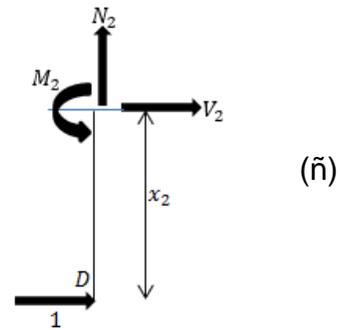
$$-M_1 + 1(x_1) - 5 = 0 \Rightarrow M_1 = x_1 - 5$$

Miembro D – C.

$$0 \leq x_2 \leq 10'$$

$$+\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_2 - 1(x_2) = 0 \Rightarrow M_2 = -x_2$$



Miembro C – B.

$$0 \leq x_3 \leq 12'$$

$$+\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 - 1(10) = 0 \Rightarrow M_3 = 10$$

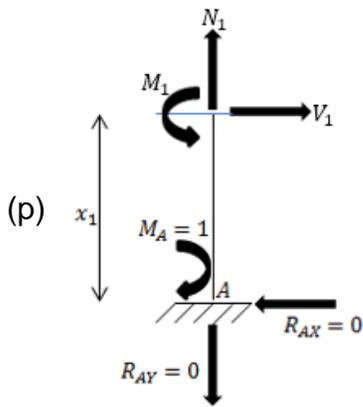
Marco  $ECu_3$ , figura 2-4e.

Las reacciones en los soportes son

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0 \qquad +\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} = 0$$

$$+\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow M_A - 1 = 0 \Rightarrow \therefore M_A = 1 \curvearrowright$$

Se determinan los momentos internos  $m_3$  empleando las figuras 2-4p, 2-4q y 2-4r.



Miembro A - B.

$$0 \leq x_1 \leq 15'$$

$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

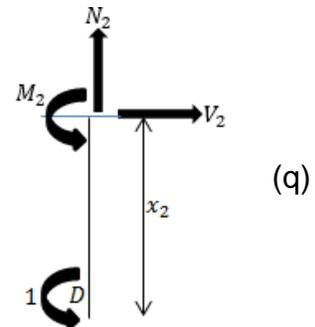
$$-M_1 + 1 = 0 \Rightarrow M_1 = 1$$

Miembro D - C.

$$0 \leq x_2 \leq 10'$$

$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$-M_2 - 1 = 0 \Rightarrow M_2 = -1$$

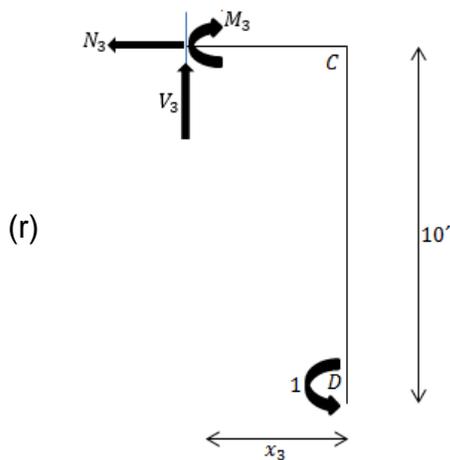


Miembro C - B.

$$0 \leq x_3 \leq 12'$$

$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 - 1 = 0 \Rightarrow M_3 = 1$$



De acuerdo a los datos, para las columnas se tiene que

$$EI_c = EI = (30000k/pulg^2)(200pulg^4) = 6000000k.pulg^2 \left( \frac{(1pie)^2}{(12pulg)^2} \right) \\ = 41666.6667k.pie^2$$

mientras que para la viga tenemos

$$EI_v = E(2I) = 2EI = 2(41666.6667k.pie^2) = 83333.3333k.pie^2$$

Se muestra el cálculo de las incompatibilidades geométricas.

$$d_1 = \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^9 (12x_1 - 252)(12) dx_1 + \int_9^{15} (-144)(12) dx_1 \right) + \\ \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^{10} (0)(0) dx_2 \right) + \\ \frac{1}{83333.3333} \left( \int_0^6 (0)(x_3) dx_3 + \int_6^{12} (144 - 24x_3)(x_3) dx_3 \right) = -0.813888pies$$

$$d_2 = \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^9 (12x_1 - 252)(x_1 - 5) dx_1 + \int_9^{15} (-144)(x_1 - 5) dx_1 \right) + \\ \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^{10} (0)(-x_2) dx_2 \right) + \\ \frac{1}{83333.3333} \left( \int_0^6 (0)(10) dx_3 + \int_6^{12} (144 - 24x_3)(10) dx_3 \right) = -0.158112pies$$

$$d_3 = \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^9 (12x_1 - 252)(1) dx_1 + \int_9^{15} (-144)(1) dx_1 \right) + \\ \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^{10} (0)(-1) dx_2 \right) + \\ \frac{1}{83333.3333} \left( \int_0^6 (0)(1) dx_3 + \int_6^{12} (144 - 24x_3)(1) dx_3 \right) = -0.068688rad$$

Se presenta el cálculo de los coeficientes de flexibilidad.

$$f_{11} = \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^{15} (12)(12) dx_1 \right) + \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^{10} (0)(0) dx_2 \right) +$$

$$\frac{1}{83333.3333} \left( \int_0^{12} (x_3)(x_3) dx_3 \right) = 0.058752pies$$

$$f_{21} = \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^{15} (12)(x_1 - 5) dx_1 \right) + \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^{10} (0)(-x_2) dx_2 \right) +$$

$$\frac{1}{83333.3333} \left( \int_0^{12} (x_3)(10) dx_3 \right) = 0.01944pies$$

$$f_{31} = \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^{15} (12)(1) dx_1 \right) + \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^{10} (0)(-1) dx_2 \right) +$$

$$\frac{1}{83333.3333} \left( \int_0^{12} (x_3)(1) dx_3 \right) = 0.005184rad$$

$$f_{12} = f_{21} = 0.01944pies$$

$$f_{22} = \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^{15} (x_1 - 5)(x_1 - 5) dx_1 \right) + \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^{10} (-x_2)(-x_2) dx_2 \right) +$$

$$\frac{1}{83333.3333} \left( \int_0^{12} (10)(10) dx_3 \right) = 0.0314pies$$

$$f_{32} = \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^{15} (x_1 - 5)(1) dx_1 \right) + \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^{10} (-x_2)(-1) dx_2 \right) +$$

$$\frac{1}{83333.3333} \left( \int_0^{12} (10)(1) dx_3 \right) = 0.00354rad$$

$$f_{13} = f_{31} = 0.005184pies$$

$$f_{23} = f_{32} = 0.00354pies$$

$$f_{33} = \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^{15} (1)(1) dx_1 \right) + \frac{1}{41666.6667} \left( \int_0^{10} (-1)(-1) dx_2 \right) +$$

$$\frac{1}{83333.3333} \left( \int_0^{12} (1)(1) dx_3 \right) = 0.000744rad$$

### Cálculo de las reacciones redundantes

Sustituyendo los resultados en las ecuaciones (1), (2), (3) da

$$-0.813888 + 0.058752R_{DY} + 0.01944R_{DX} + 0.005184M_D = -0.041667 \dots (4)$$

$$-0.158112 + 0.01944R_{DY} + 0.0314R_{DX} + 0.00354M_D = 0 \text{ --- (5)}$$

$$-0.068688 + 0.005184R_{DY} + 0.00354R_{DX} + 0.000744M_D = 0 \text{ --- (6)}$$

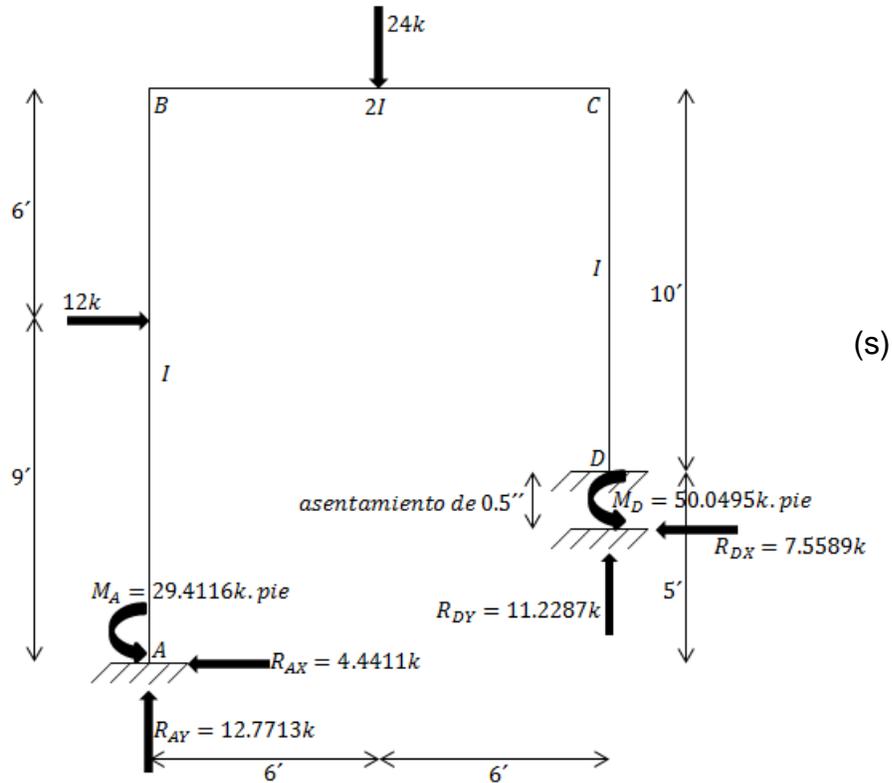
Resolviendo el sistema resulta

$$R_{DY} = 11.2287, R_{DX} = -7.5589, M_D = 50.0495$$

$$\therefore R_{DY} = 11.2287k \uparrow \quad R_{DX} = 7.5589k \leftarrow \quad M_D = 50.0495k \cdot \text{pie} \curvearrowright$$

### Ecuaciones de equilibrio

Con los resultados obtenidos se dibuja un diagrama de cuerpo libre y al aplicar las ecuaciones de equilibrio se obtienen las fuerzas reactivas restantes, figura 2-4s.



$$\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 12 - 7.5589 - R_{AX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 4.4411k \leftarrow$$

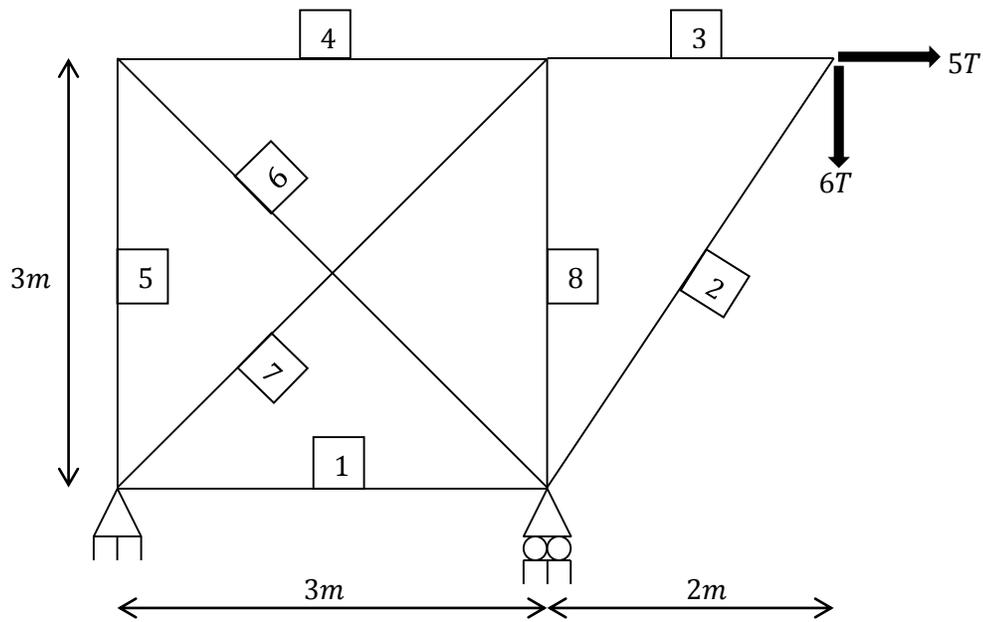
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -24 + 11.2287 + R_{AY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 12.7713k \uparrow$$

$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow 12(9) + 24(6) - 7.5589(5) - 11.2287(12) - 50.0495 - M_A = 0$$

$$M_A = 29.4116k \cdot \text{pie} \curvearrowright$$

**Ejercicio 2.5 Método de la rigidez matricial aplicado a una armadura en 2D.**

**Instrucciones** Empleando el método de la rigidez matricial, calcule las reacciones en los soportes y la fuerza en cada uno de los elementos de la armadura mostrada en la figura 2-5a. La sección transversal de los elementos 1, 2, 3, 4 y 5 es rectangular con un ancho de  $30\text{cm}$  y una altura de  $40\text{cm}$ , mientras que la sección transversal de los elementos 6, 7 y 8 es cuadrada de  $40\text{cm}$  por lado. El módulo de elasticidad para todas las barras es el de las maderas duras, es decir,  $2.1 * 10^6 \frac{T}{m^2}$ .



(a)

**Figura 2-5**

## SOLUCIÓN

### Notación

Cuando una estructura se va a analizar empleando el método matricial de la rigidez, se requiere de la subdivisión de esta en una serie de elementos finitos discretos e identificar sus puntos extremos como nodos. Si se trata de una armadura, las barras o elementos que la componen representan los elementos finitos y los nodos son equivalentes a las juntas.

Cada elemento y cada nodo se identifican arbitrariamente mediante un número encerrado en un cuadrado y un número dentro de un círculo respectivamente, y los extremos lejano  $F$  (del inglés Far) y cercano  $N$  (del inglés Near) de cada elemento se simbolizan en forma arbitraria con una flecha a lo largo del mismo cuya punta o cabeza se dirige hacia el extremo alejado. Se establece un sistema de coordenadas globales con un origen que puede situarse en cualquier punto; generalmente se usan los ejes  $x$  (horizontal) y  $y$  (vertical) cuya dirección positiva tiene un sentido hacia la derecha y hacia arriba de forma respectiva.

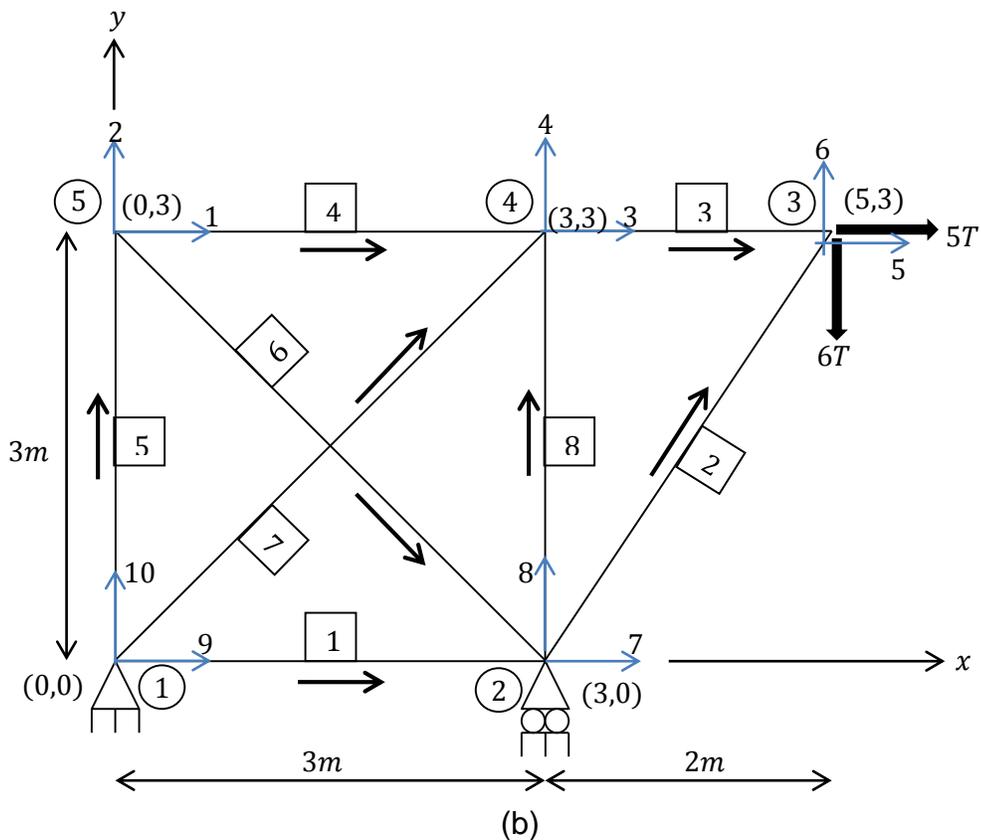
Hay dos grados de libertad o dos posibles desplazamientos por nodo de armadura, los cuales individualmente se especificarán a través de un número de código y serán referenciados mediante una flecha de color azul orientada en su dirección coordenada global positiva.

Los desplazamientos incógnita deben codificarse numéricamente primero, puesto que, como se verá más adelante, cuando se formule la matriz de rigidez de la estructura y se seccione, esto nos proporcionará la manera más directa para hallar sus valores. En general, en un nodo donde no haya algún soporte, los desplazamientos horizontal y vertical son desconocidos. Por su parte, en un apoyo simple o rodillo sólo se genera una reacción que es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto, así que tal tipo de soporte es capaz de no permitir el desplazamiento en la dirección de su reacción, pero incapaz de impedir el desplazamiento perpendicular a la dirección de su fuerza reactiva en su nodo de aplicación. En tanto, un apoyo articulado, pasador o bisagra no permite los desplazamientos horizontal y vertical en su nodo de ubicación debido a las fuerzas reactivas surgidas en tales direcciones. Cabe mencionar que los argumentos para el apoyo en turno son válidos si a este no se le impone un desplazamiento inicial como lo puede ser un asentamiento.

Ahora se aplica el algoritmo anterior a este ejercicio. Nótese en la figura 2-5b que la armadura se compone de ocho elementos y se ha usado la numeración predeterminada en ellos, aunque bien pudo haberse utilizado otro orden al numerarlos. Se han trazado flechas a lo largo de los ocho elementos para nombrar

a los nodos cercano  $N$  y lejano  $F$  del elemento; desde luego, esta asignación se hizo arbitrariamente, por lo que el lector puede elegir un sentido opuesto en alguna, algunas e incluso todas estas flechas.

Dado que hay cinco nodos en la armadura (numerados también en un orden indistinto, el lector puede usar otra numeración), se tienen diez desplazamientos posibles a los que se les han destinado códigos del 1 al 10; los codificados desde el 1 hasta el 7 representan desplazamientos cuyo valor se desconoce puesto que no están restringidos o están permitidos, mientras que del 8 al 10 representan desplazamientos que se sabe con exactitud cuánto valen ya que están restringidos; dadas las restricciones de los soportes, estos últimos tres desplazamientos están impedidos. El origen de los ejes  $x, y$  se asocia en ①, debido a que de ese modo todos los nodos tendrán coordenadas positivas.



A continuación se analiza la secuencia en la que se numeraron los grados de libertad. Nodo a nodo fue observado con detenimiento. En las juntas ③, ④ y ⑤, al haber ausencia de soporte, las dos componentes de desplazamiento son incógnitas. Luego, debido a que en ② se posiciona un apoyo simple y por la forma en la que está orientado dicho apoyo, en ese nodo el desplazamiento horizontal se desconoce y el desplazamiento vertical se sabe que es nulo. Por último, la presencia de un

apoyo articulado en ① hace que tal nodo esté limitado por el desplazamiento. Una vez que se detectaron los desplazamientos desconocidos, se numeraron al azar. En seguida, los desplazamientos conocidos también fueron numerados con un orden indistinto, posterior a su debida identificación.

Finalmente, las coordenadas  $x, y$  de cada nodo se referencian por números entre paréntesis adyacentes a los mismos.

### Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

Como ya se mencionó, para el sistema de coordenadas globales se considera la  $x$  positiva hacia la derecha y la  $y$  positiva hacia arriba. Por otra parte, cada elemento tiene un sistema coordinado propio o local, el cual se usa para especificar el sentido de sus desplazamientos y sus cargas internas. Este sistema es definido a través de los ejes  $x', y'$  con el origen en el nodo cercano  $N$  y el eje  $x'$  coincidiendo con el eje longitudinal del elemento y señalando hacia el extremo alejado  $F$ .

La matriz de rigidez en coordenadas locales  $k'_i$  de un elemento  $i$  puede determinarse con esta ecuación:

$$k'_i = \frac{AE}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 - 1)$$

donde

$A$  = área de la sección transversal del elemento.

$E$  = módulo de elasticidad del elemento.

$L$  = longitud del elemento.

Los cuatro elementos que conforman la matriz anterior se denominan coeficientes de influencia de la rigidez del elemento.

Para hacer compatibles las matrices de rigidez de los elementos, estas deben transformarse del sistema local al global, lo cual significa que la ecuación 2 – 1 no se ocupará a la hora de la resolución del ejercicio.

Los ángulos más pequeños entre los ejes  $x, y$  globales positivos y el eje local  $x'$  positivo se designan como  $\theta_x$  y  $\theta_y$ . Los cosenos de esos ángulos se denominan cosenos directores y se evalúan con las siguientes ecuaciones:

$$\lambda_x = \cos\theta_x = \frac{x_F - x_N}{L} = \frac{x_F - x_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}} \quad (2 - 2)$$

$$\lambda_y = \cos\theta_y = \frac{y_F - y_N}{L} = \frac{y_F - y_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}} \quad (2 - 3)$$

donde

$x_N, y_N$  = coordenadas  $x, y$  del extremo cercano  $N$  del elemento en turno.

$x_F, y_F$  = coordenadas  $x, y$  del extremo lejano  $F$  del elemento en turno.

$L$  = longitud del elemento.

La expresión matemática para calcular la matriz de rigidez en coordenadas globales  $k_i$  de un elemento  $i$ , la cual tiene la propiedad de ser simétrica, es

$$k_i = \frac{AE}{L} \begin{pmatrix} N_x & N_y & F_x & F_y \\ \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y \\ \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y & \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y \\ -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 & \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ F_x \\ F_y \end{pmatrix} \quad (2 - 4)$$

donde

$A$  = área de la sección transversal del elemento.

$E$  = módulo de elasticidad del elemento.

$L$  = longitud del elemento.

$N_x, N_y$  = número de código del grado de libertad global asociado con el extremo cercano  $N$  en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente del elemento en turno.

$F_x, F_y$  = número de código del grado de libertad global asociado con el extremo lejano  $F$  en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente del elemento en turno.

$\lambda_x, \lambda_y$  = cosenos directores.

Como el enfoque de este libro es la solución detallada de ejercicios sobre armaduras, se recomienda al lector remitirse a algún otro texto en caso de desear comprender la deducción matemática del método de rigidez matricial íntegramente. La obra titulada "Análisis Estructural" escrita por R. C. Hibbeler, octava edición, es una gran alternativa.

De acuerdo a la información proporcionada al inicio del problema, para los elementos 1 hasta 5 se tiene

$$A = (0.3m)(0.4m) = 0.12m^2 \quad AE = (0.12m^2) \left( 2.1 * 10^6 T/m^2 \right) = 252000 T$$

y para los elementos 6, 7 y 8 se sabe que

$$A = (0.4m)(0.4m) = 0.16m^2 \quad AE = (0.16m^2) \left( 2.1 * 10^6 T/m^2 \right) = 336000 T$$

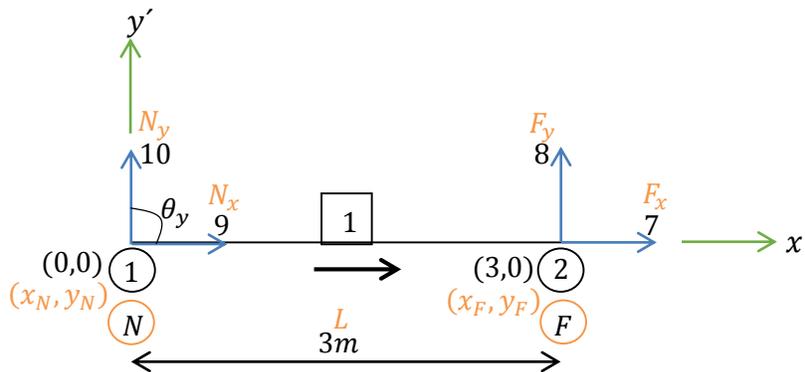
Se aislará cada elemento de la armadura, figuras 2-5c hasta 2-5j, con el objetivo de visualizar con mayor facilidad individualmente su longitud y número, así como sus nodos  $N$  y  $F$  con sus correspondientes coordenadas globales  $x_N, y_N$  y  $x_F, y_F$ , y sus debidos números de código de grado de libertad  $N_x, N_y$  y  $F_x, F_y$ . Además, con el único fin de esclarecer quienes son los cosenos directores de las barras, se coloca el sistema local  $x', y'$ , y se identifican los ángulos  $\theta_x$  y  $\theta_y$ ; si el lector lo cree conveniente, puede ignorar éste último sistema y los ángulos mencionados en las figuras citadas, debido a que los cosenos directores en este texto se infieren empleando coordenadas.

Paralelamente a cada aislamiento, se van aplicando las ecuaciones 2 – 2, 2 – 3 y 2 – 4.

**Elemento 1.** De acuerdo a la figura 2-5c, (1) es el extremo cercano y (2) es el extremo lejano. Por lo tanto,

$$L = 3m \quad \lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1 \quad \lambda_y = \frac{0-0}{3} = 0$$

$$k_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 9 & 10 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 84000 & 0 & -84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -84000 & 0 & 84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

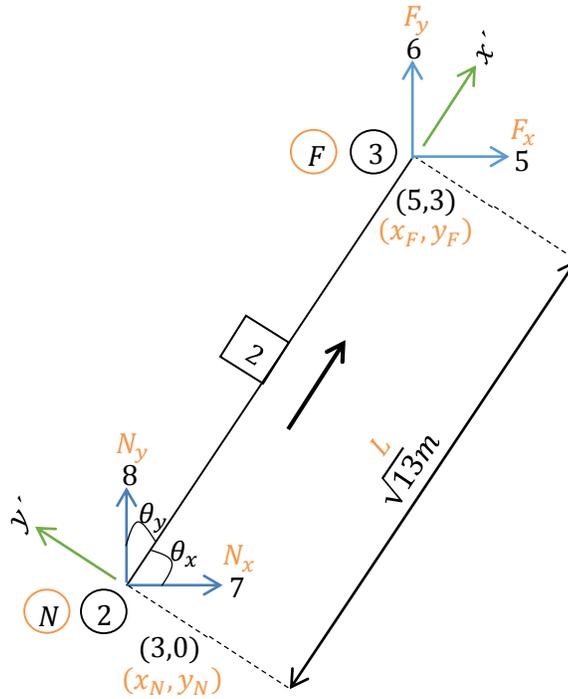


(c)

**Elemento 2.** Debido a que el extremo cercano es ② y el extremo lejano es ③, figura 2-5d, obtenemos

$$L = \sqrt{(2m)^2 + (3m)^2} = \sqrt{13}m \quad \lambda_x = \frac{5-3}{\sqrt{13}} = 0.5547 \quad \lambda_y = \frac{3-0}{\sqrt{13}} = 0.8321$$

$$k_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 21505.8375 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 \\ 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 \\ -21505.8375 & -32262.2509 & 21505.8375 & 32262.2509 \\ -32262.2509 & -48393.3764 & 32262.2509 & 48393.3764 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

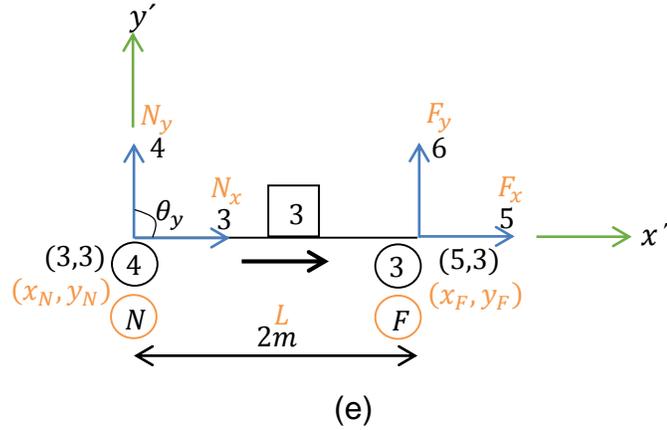


(d)

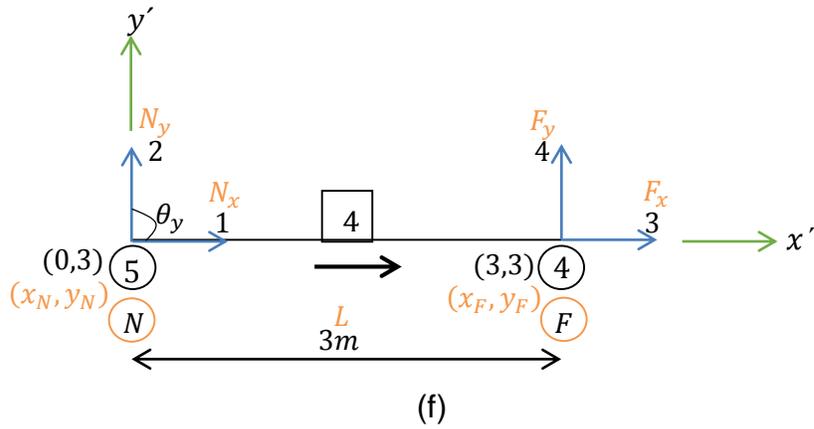
**Elemento 3.** Puesto que el extremo cercano es ④ y el extremo lejano es ③, figura 2-5e, se tiene

$$L = 2m \quad \lambda_x = \frac{5-3}{2} = 1 \quad \lambda_y = \frac{3-3}{2} = 0$$

$$k_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 126000 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -126000 & 0 & 126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$



**Elemento 4.** Dado que el extremo cercano es ⑤ y el extremo lejano es ④, figura 2-5f, se infiere



$$L = 3m \quad \lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1 \quad \lambda_y = \frac{3-3}{3} = 0$$

$$k_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 84000 & 0 & -84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -84000 & 0 & 84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

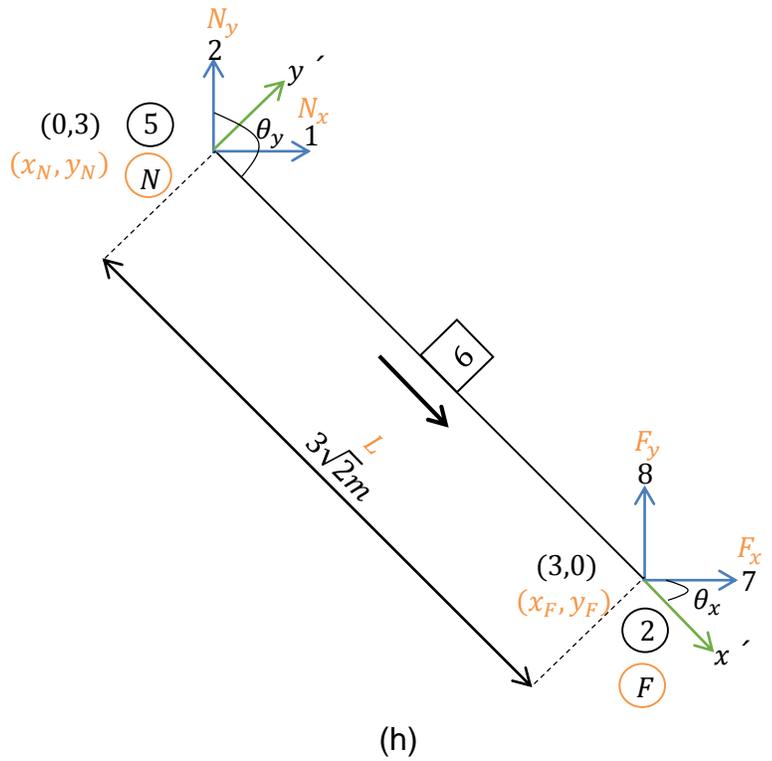
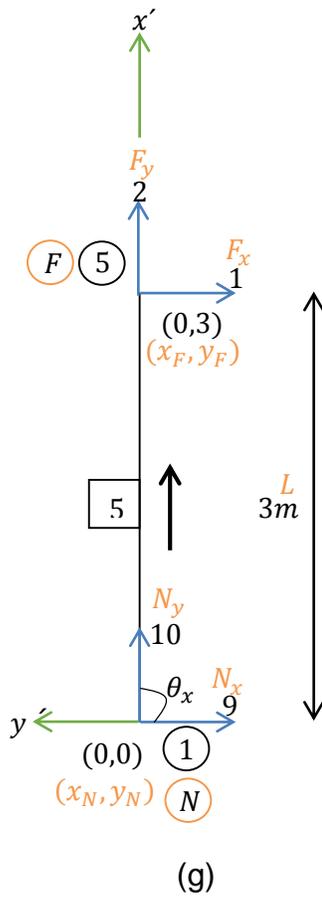
**Elemento 5.** Como ① es el extremo cercano y ⑤ es el extremo lejano, figura 2-5g, se deduce

$$L = 3m \quad \lambda_x = \frac{0 - 0}{3} = 0 \quad \lambda_y = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

$$k_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 84000 & 0 & -84000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -84000 & 0 & 84000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

**Elemento 6.** Como el extremo cercano es ⑤ y el extremo lejano es ②, figura 2-5h, resulta

$$L = \sqrt{(3m)^2 + (3m)^2} = 3\sqrt{2}m \quad \lambda_x = \frac{3 - 0}{3\sqrt{2}} = 0.7071 \quad \lambda_y = \frac{0 - 3}{3\sqrt{2}} = -0.7071$$



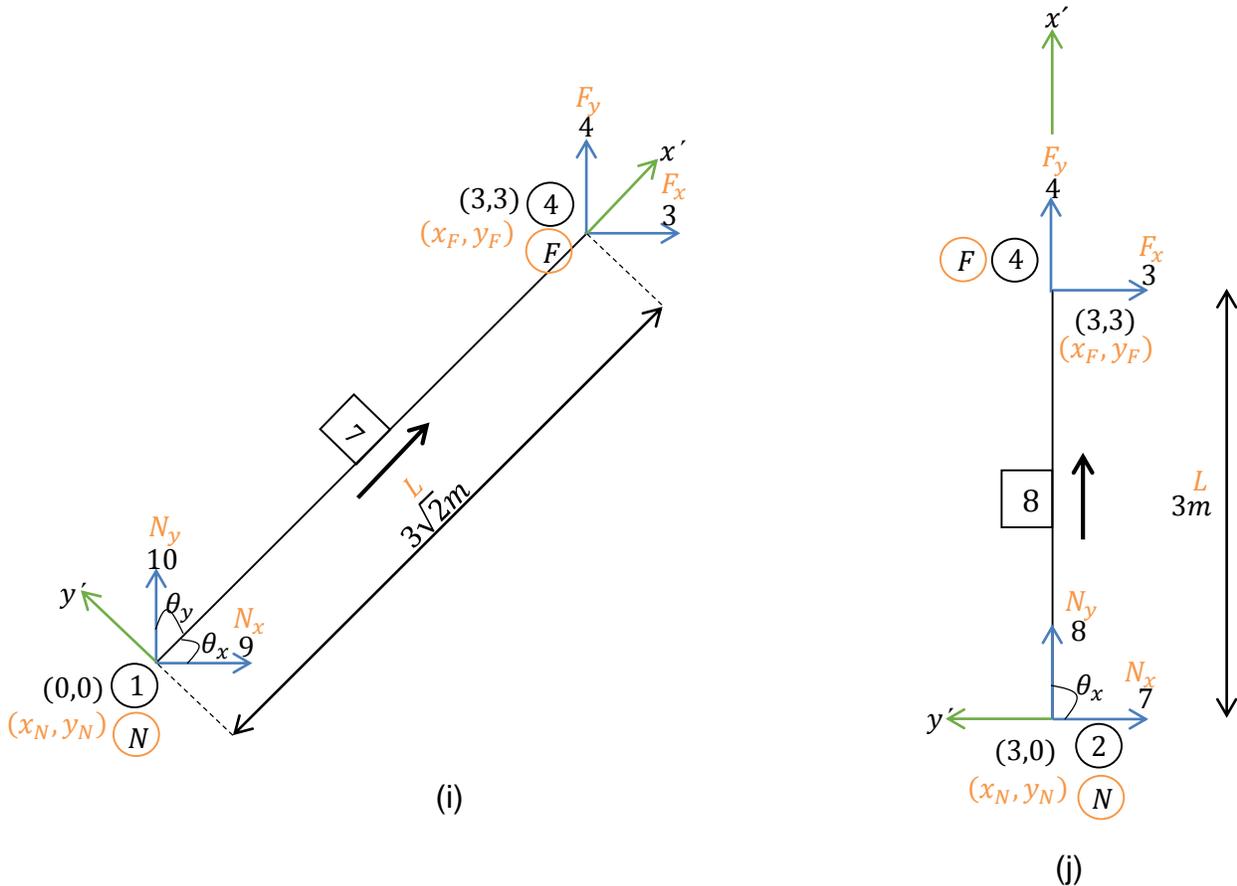
$$k_6 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 39597.9798 & -39597.9798 & -39597.9798 & 39597.9798 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 39597.9798 & -39597.9798 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 39597.9798 & -39597.9798 \\ 39597.9798 & -39597.9798 & -39597.9798 & 39597.9798 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

**Elemento 7.** Debido a que el extremo cercano es ① y el extremo lejano es ④, figura 2-5i, se obtiene

$$L = 3\sqrt{2}m \quad \lambda_x = \frac{3-0}{3\sqrt{2}} = 0.7071 \quad \lambda_y = \frac{3-0}{3\sqrt{2}} = 0.7071$$

$$k_7 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 9 & 10 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 39597.9798 & 39597.9798 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 39597.9798 & 39597.9798 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ -39597.9798 & -39597.9798 & 39597.9798 & 39597.9798 \\ -39597.9798 & -39597.9798 & 39597.9798 & 39597.9798 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

**Elemento 8.** Puesto que el extremo cercano es ② y el extremo lejano es ④, figura 2-5j, tenemos



$$L = 3m \quad \lambda_x = \frac{3-3}{3} = 0 \quad \lambda_y = \frac{3-0}{3} = 1$$

$$k_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 112000 & 0 & -112000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -112000 & 0 & 112000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

**Matriz de rigidez de la estructura**

Como se designaron diez grados de libertad para la armadura, figura 2-5b, la matriz de rigidez tiene un orden de 10 X 10 y se obtiene al sumar algebraicamente los elementos correspondientes a las ocho matrices anteriores. Para visualizar el proceso de ensamble con mayor facilidad, se expanden con ceros las filas y columnas numéricas faltantes en cada  $k_i$ . Los valores calculados previamente cuando se empleó la ecuación 2 – 4 aparecen de color azul con la finalidad de distinguirlos.

$$k_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 84000 & 0 & -84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -84000 & 0 & 84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$k_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21505.8375 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 21505.8375 & 32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -32262.2509 & -48393.3764 & 32262.2509 & 48393.3764 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

CAPÍTULO 2 ANÁLISIS ESTRUCTURAL

$$k_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$k_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 84000 & 0 & -84000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$k_5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$k_6 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

CAPÍTULO 2 ANÁLISIS ESTRUCTURAL

$$k_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & 39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & 39597.9798 \\ 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & 39597.9798 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

$$k_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 112000 & 0 & 0 & 0 & -112000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -112000 & 0 & 0 & 0 & 112000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Una vez efectuado el procedimiento de expansión en todas las  $k_i$ , estas se suman. Por consiguiente,

$$K = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 + k_8$$

$$K = \begin{pmatrix} 123597.9798 & -39597.9798 & -84000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & 123597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -84000 \\ -84000 & 0 & 249597.9798 & 39597.9798 & -126000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & 39597.9798 & 151597.9798 & 0 & 0 & 0 & -112000 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 147505.8357 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 145103.8173 & -7335.7289 & -84000 & 0 \\ 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -112000 & -32262.2509 & -48393.3764 & -7335.7289 & 199991.3562 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & -84000 & 0 & 123597.9798 & 39597.9798 \\ 0 & -84000 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & 123597.9798 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Para no realizar el proceso de ensamble anterior, obsérvese como puede calcularse cada entrada de la matriz de rigidez de la estructura. Por ejemplo, para obtener  $K_{1,1}$ , es decir, la entrada de  $K$  correspondiente a la fila 1 y columna 1, se detectan todas las entradas 1,1 que son visibles en las matrices  $k_i$  sin expandir, en este caso, de

los elementos 4,5 y 6 se tiene  $(k_{1,1})_4 = 84000$ ,  $(k_{1,1})_5 = 0$  y  $(k_{1,1})_6 = 39597.9798$ . Luego, es obvio que las  $k_i$  sin expandir restantes almacenan valores nulos en sus respectivas entradas 1,1 al no ser visibles, así que,  $(k_{1,1})_1 = (k_{1,1})_2 = (k_{1,1})_3 = (k_{1,1})_7, (k_{1,1})_8 = 0$ , por lo que podemos ignorarlos. En consecuencia,  $K_{1,1} = 84000 + 0 + 39597.9798 = 123597.9798$ . Se debe efectuar un procedimiento análogo para las demás entradas hasta obtener  $K$  en su totalidad.

Ya que siete desplazamientos fueron identificados como desconocidos en la armadura, la matriz de rigidez de la estructura se seccionó de tal forma que en la parte izquierda quedaran siete columnas y en la porción superior se tuvieran siete filas; esta partición se efectuó con el fin de que sea compatible con las particiones de los vectores de desplazamientos y de cargas que en el próximo apartado se formularán. Entonces,  $K$  quedó dividida en cuatro submatrices que tienen la siguiente nomenclatura:

$$K = \left( \begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array} \right) \quad (2 - 5)$$

### Vectores de desplazamientos y de cargas

Se plantea el vector total de desplazamientos externos  $D$  y se divide en dos vectores: el de desplazamientos desconocidos  $D_D$  y el de desplazamientos conocidos  $D_C$ . Como ya se había comentado en el apartado de notación, los desplazamientos codificados del 1 al 7 son desconocidos, por lo que  $D_D$  comprende desde  $D_1$  hasta  $D_7$ , en tanto, los desplazamientos codificados del 8 al 10 corresponden a los conocidos, así que evidentemente  $D_C$  abarca  $D_8, D_9$  y  $D_{10}$ .

Para denotar un desplazamiento en la dirección horizontal se usa  $\Delta_H$ , mientras que para significar un desplazamiento vertical se emplea  $\delta_V$ ; en ambos símbolos aparece también como subíndice un número que indica el nodo donde ocurre el desplazamiento.

Siendo así y con base en la figura 2-5b, obsérvese como, por ejemplo, el desplazamiento codificado con 1 es el desplazamiento horizontal en el nodo (5), es decir,  $D_1 = \Delta_{H5}$ , o bien, el desplazamiento 2 es el vertical del nodo (5), o sea,  $D_2 = \delta_{V5}$ . A su vez, recordemos que los desplazamientos codificados con 8,9 y 10 son nulos debido a que los soportes (2) y (1) los impiden de manera respectiva, dado que a esos apoyos no se les ha impuesto un desplazamiento, en consecuencia,  $D_8 = D_9 = D_{10} = 0$ .

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ D_C \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ \hline D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \Delta_{H2} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Se procede a plantear el vector total de cargas externas  $C$ , el cual se secciona dando origen al vector de cargas conocidas  $C_C$  y al vector de cargas desconocidas  $C_D$ . De la figura 2-5b, nótese que las cargas externas en las direcciones 5 y 6 son de  $5T$  y  $6T$  actuando en las direcciones  $x$  positiva y  $y$  negativa respectivamente, por consiguiente,  $C_5 = 5T$  y  $C_6 = -6T$ . También vease como no hay cargas externas aplicadas en las direcciones 1, 2, 3, 4 y 7, de ahí que  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_7 = 0$ . Así mismo, por inspección, se puede apreciar que en las direcciones 8, 9 y 10 se presentan las reacciones en  $y$  del soporte (2), y en  $x$  y  $y$  del soporte (1); como se desconoce la magnitud y el sentido de ellas, estas fuerzas deben proponerse en el vector como positivas, es por eso que  $C_8 = R_{2y}$ ,  $C_9 = R_{1x}$  y  $C_{10} = R_{1y}$ .

$$C = \begin{pmatrix} C_C \\ C_D \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ \hline C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -6 \\ 0 \\ \hline R_{2y} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

### Cálculo de los desplazamientos incógnita y las reacciones en los soportes

Luego de haber construido la matriz de rigidez de la estructura, las componentes de la carga global  $C$  que actúan sobre la armadura se vinculan con sus desplazamientos globales  $D$  por medio de la ecuación de rigidez de la estructura que es

$$C = KD \quad (2 - 8)$$

Combinando las ecuaciones 2 – 5, 2 – 6 y 2 – 7 con la ecuación 2 – 8 da

$$\begin{pmatrix} C_C \\ C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_D \\ D_C \end{pmatrix} \quad (2 - 9)$$

Ahora se infiere como este sistema de ecuaciones tiene la propiedad de que puede descomponerse en dos subsistemas de ecuaciones: el primero de estos sistemas relaciona únicamente los desplazamientos incógnita con las fuerzas conocidas y los desplazamientos conocidos, y constituye un sistema compatible determinado, mientras que el segundo subsistema contiene las reacciones incógnita y una vez resuelto el primer subsistema es de resolución trivial.

Expandiendo la ecuación 2 – 9 se tiene

$$C_C = K_{11}D_D + K_{12}D_C \quad (2 - 10)$$

$$C_D = K_{21}D_D + K_{22}D_C \quad (2 - 11)$$

Atendemos al subsistema 1. Puesto que para esta armadura el vector de desplazamientos conocidos es un vector nulo dado que los soportes no se desplazan,  $D_C = 0$ . De ese modo, la ecuación 1 – 10 se reduce notablemente a

$$C_C = K_{11}D_D \quad (2 - 12)$$

Despejando  $D_D$  de la ecuación 2 – 12, se obtienen evidentemente los desplazamientos incógnita directamente.

$$D_D = (K_{11})^{-1}C_C \quad (2 - 13)$$

De inmediato nos ocupamos del subsistema 2. La ecuación 2 – 11 también se simplifica notoriamente por el hecho de que  $D_C$  es nulo. Por lo tanto, las reacciones en los soportes se infieren con la siguiente expresión:

$$C_D = K_{21}D_D \quad (2 - 14)$$

Al plantear la ecuación 2 – 8 (o la ecuación 2 – 9) para esta armadura resulta

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ -0 \\ R_{2y} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123597.9798 & -39597.9798 & -84000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & 123597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -84000 \\ -84000 & 0 & 249597.9798 & 39597.9798 & -126000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & 39597.9798 & 151597.9798 & 0 & 0 & 0 & -112000 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 147505.8375 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 145103.8173 & -7335.7289 & -84000 & 0 \\ 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -112000 & -32262.2509 & -48393.3764 & -7335.7289 & 199991.3562 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & -84000 & 0 & 123597.9798 & 39597.9798 \\ 0 & -84000 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & 123597.9798 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \Delta_{H2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se extrae el primer subsistema y se resuelve. Puede verse que la ecuación resultante es como la ecuación 2 – 12 y el despeje de la misma tiene la forma de la ecuación 2 – 13.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123597.9798 & -39597.9798 & -84000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 \\ -39597.9798 & 123597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 \\ -84000 & 0 & 249597.9798 & 39597.9798 & -126000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 39597.9798 & 151597.9798 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 147505.8357 & 32262.2509 & -21505.8375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 145103.8173 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \Delta_{H2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \Delta_{H2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123597.9798 & -39597.9798 & -84000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 \\ -39597.9798 & 123597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 \\ -84000 & 0 & 249597.9798 & 39597.9798 & -126000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 39597.9798 & 151597.9798 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 147505.8357 & 32262.2509 & -21505.8375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 145103.8173 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al llevar a cabo el producto matricial señalado, dan los siguientes resultados para los desplazamientos horizontales y verticales en los nodos considerados:

$$\begin{pmatrix} \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \Delta_{H2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000135574 \text{ m} \\ 4.4452 * 10^{-5} \text{ m} \\ 0.000180026 \text{ m} \\ -4.7024 * 10^{-5} \text{ m} \\ 0.000251459 \text{ m} \\ -0.000293739 \text{ m} \\ -3.1742 * 10^{-6} \text{ m} \end{pmatrix}$$

Note como el nodo ⑤ se desplaza horizontalmente hacia la derecha 0.000135574 m y verticalmente hacia arriba 4.4452 \* 10<sup>-5</sup> m, o percátase de la ocurrencia de un movimiento hacia la derecha y hacia abajo del nodo ④ de 0.000180026 m y 4.7024 \* 10<sup>-5</sup> m. También, vea como el nodo ③ tiene componentes horizontal y vertical de desplazamiento de 0.000251459 m hacia la derecha y de 0.000293739 m hacia abajo. Por su parte, el nodo ② se desplaza 3.1742 \* 10<sup>-6</sup> m hacia la izquierda.

Se escribe el segundo subsistema y se le da solución. Visualice como la ecuación originada que posee el aspecto de la ecuación 2 – 14 se simplifica sencillamente al realizar la multiplicación de matrices correspondiente y con ello se llega a los valores de las fuerzas reactivas en los soportes ① y ②.

$$\begin{pmatrix} R_{2y} \\ R_{1x} \\ R_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -112000 & -32262.2509 & -48393.3764 & -7335.7289 \\ 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & -84000 \\ 0 & -84000 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.000135574 \\ 4.4452 * 10^{-5} \\ 0.000180026 \\ -4.7024 * 10^{-5} \\ 0.000251459 \\ -0.000293739 \\ -3.1742 * 10^{-6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15T \\ -5T \\ -9T \end{pmatrix}$$

Los signos negativos de  $R_{1x}$  y  $R_{1y}$  indican que estas reacciones actúan en las direcciones  $x$  negativa y  $y$  negativa respectivamente. Por consiguiente,

$$R_{2y} = 15T \uparrow \quad R_{1x} = 5T \leftarrow \quad R_{1y} = 9T \downarrow$$

### Cálculo de las fuerzas en los elementos

Para determinar la fuerza de tensión  $q$  de un elemento  $i$ , se utiliza la ecuación que se muestra a continuación:

$$q_i = \frac{AE}{L} \begin{pmatrix} -\lambda_x & -\lambda_y & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} \quad (2 - 15)$$

donde

$A$  = área de la sección transversal del elemento.

$E$  = módulo de elasticidad del elemento.

$L$  = longitud del elemento.

$\lambda_x, \lambda_y$  = cosenos directores.

$D_{Nx}, D_{Ny}$  = desplazamientos horizontal y vertical del nodo  $N$  del elemento en turno.

$D_{Fx}, D_{Fy}$  = desplazamientos horizontal y vertical del nodo  $F$  del elemento en turno.

Finalmente se aplica la expresión 2 – 15 en cada elemento. Si se obtiene un resultado negativo, entonces el elemento está en compresión.

#### Elemento 1:

$$AE = 252000 T, L = 3m, \lambda_x = 1, \lambda_y = 0, \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_9 \\ D_{10} \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_{H2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = 84000 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.1742 * 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix} = -0.266633T \text{ (Compresión)}$$

**Elemento 2:**

$$AE = 252000 T, L = \sqrt{13}m, \lambda_x = 0.5547, \lambda_y = 0.8321, \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_7 \\ D_8 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H2} \\ 0 \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \end{pmatrix}$$

$$q_2 = 69892.2247 \begin{pmatrix} -0.5547 & -0.8321 & 0.5547 & 0.8321 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3.1742 * 10^{-6} \\ 0 \\ 0.000251459 \\ -0.000293739 \end{pmatrix} \\ = -7.21114T \text{ (Compresión)}$$

**Elemento 3:**

$$AE = 252000 T, L = 2m, \lambda_x = 1, \lambda_y = 0, \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \end{pmatrix}$$

$$q_3 = 126000 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.000180026 \\ -4.7024 * 10^{-5} \\ 0.000251459 \\ -0.000293739 \end{pmatrix} = 9.00056T \text{ (Tensión)}$$

**Elemento 4:**

$$AE = 252000 T, L = 3m, \lambda_x = 1, \lambda_y = 0, \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \end{pmatrix}$$

$$q_4 = 84000 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.000135574 \\ 4.4452 * 10^{-5} \\ 0.000180026 \\ -4.7024 * 10^{-5} \end{pmatrix} = 3.73397T \text{ (Tensión)}$$

**Elemento 5:**

$$AE = 252000 T, L = 3m, \lambda_x = 0, \lambda_y = 1, \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_9 \\ D_{10} \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \end{pmatrix}$$

$$q_5 = 84000 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.000135574 \\ 4.4452 * 10^{-5} \end{pmatrix} = 3.73397T \text{ (Tensión)}$$

**Elemento 6:**

$$AE = 336000 T, L = 3\sqrt{2}m, \lambda_x = 0.7071, \lambda_y = -0.7071, \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_6 = 79195.9595 \begin{pmatrix} -0.7071 & 0.7071 & 0.7071 & -0.7071 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.000135574 \\ 4.4452 * 10^{-5} \\ -3.1742 * 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -5.28054T \text{ (Compresión)}$$

**Elemento 7:**

$$AE = 336000 T, L = 3\sqrt{2}m, \lambda_x = 0.7071, \lambda_y = 0.7071, \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_9 \\ D_{10} \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \end{pmatrix}$$

$$q_7 = 79195.9595 \begin{pmatrix} -0.7071 & -0.7071 & 0.7071 & 0.7071 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.000180026 \\ -4.7024 * 10^{-5} \end{pmatrix}$$

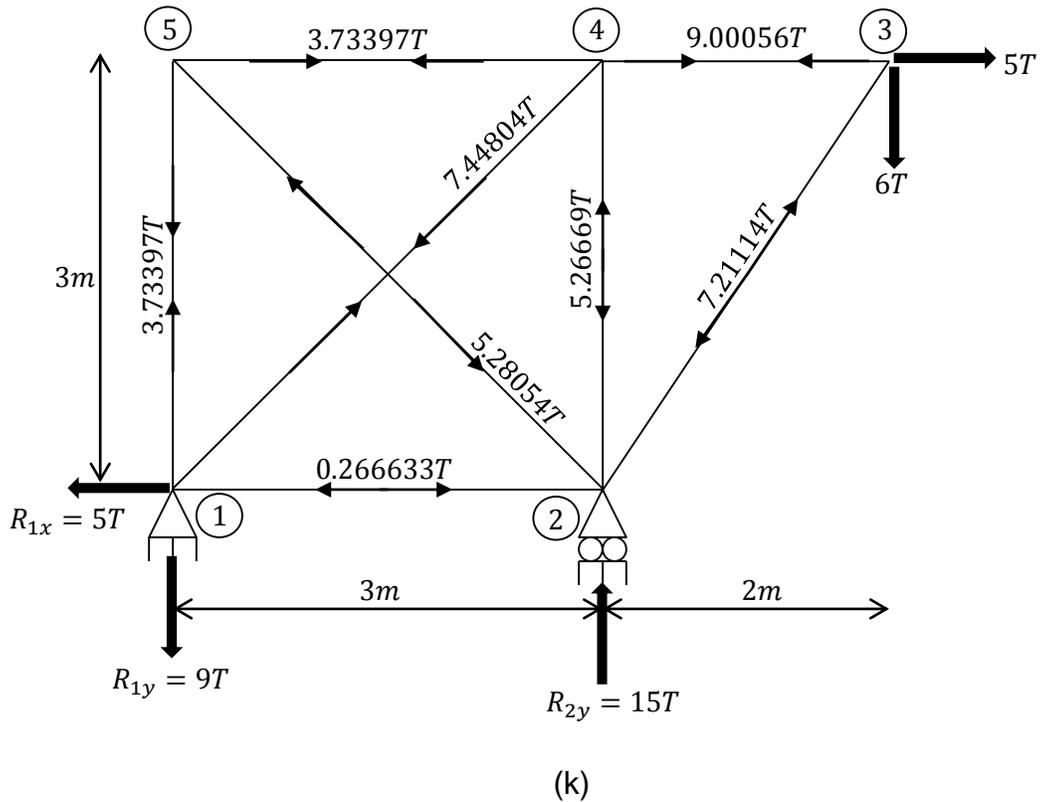
$$= 7.44804T \text{ (Tensión)}$$

**Elemento 8:**

$$AE = 336000 T, L = 3m, \lambda_x = 0, \lambda_y = 1, \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_7 \\ D_8 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H2} \\ 0 \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \end{pmatrix}$$

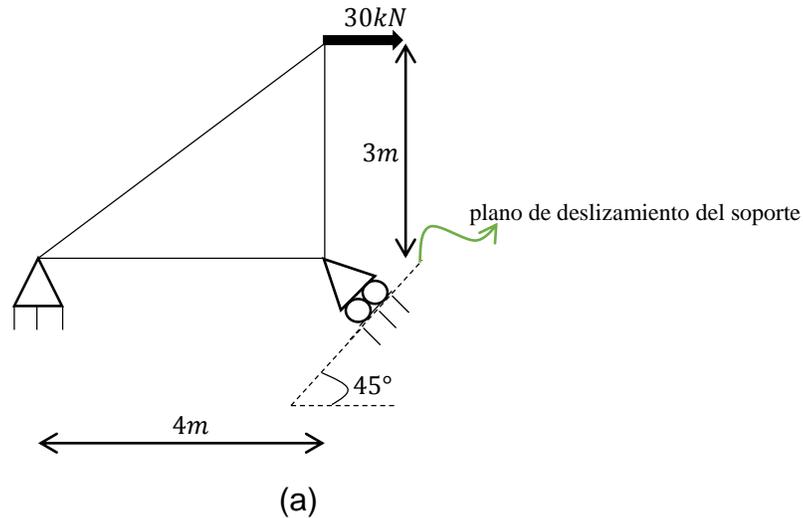
$$q_8 = 112000(0 \quad -1 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} -3.1742 * 10^{-6} \\ 0 \\ 0.000180026 \\ -4.7024 * 10^{-5} \end{pmatrix} = -5.26669T \text{ (Compresión)}$$

En la figura 2-5k se aprecian los resultados obtenidos para las reacciones en los soportes y las fuerzas internas de la armadura. Recuerde que un elemento en compresión “empuja” a la junta y un elemento en tensión “jala” a la junta.



**Ejercicio 2.6 Análisis de una armadura con un rodillo en un plano inclinado empleando el método de la rigidez matricial.**

**Instrucciones** Use el análisis matricial de la rigidez para determinar las reacciones en los soportes y las fuerzas internas de la armadura que se muestra en la figura 2-6a cuyo apoyo simple tiene un plano de deslizamiento inclinado a  $45^\circ$  respecto a la horizontal. Considere  $AE$  como constante.



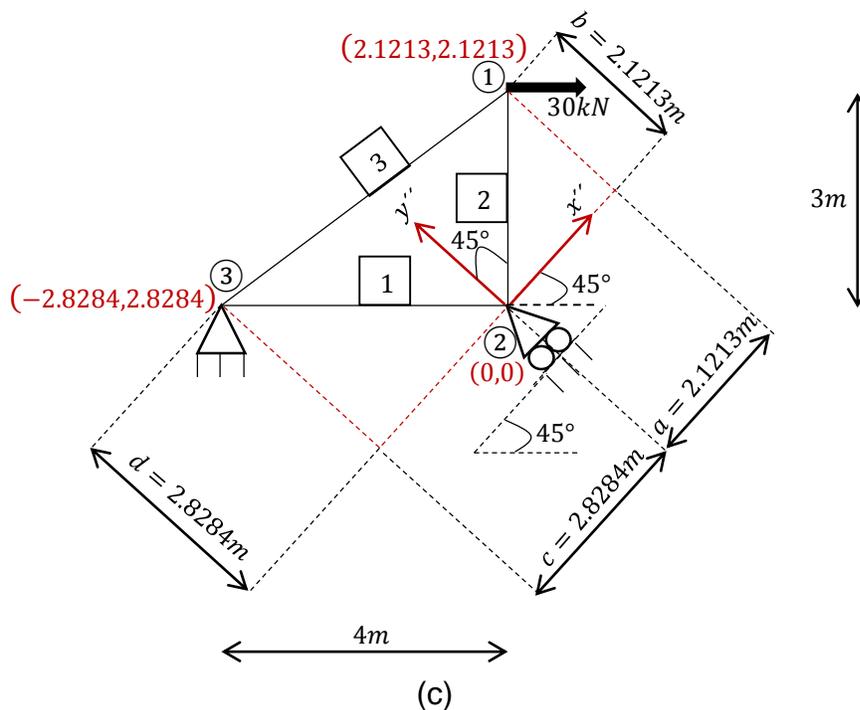
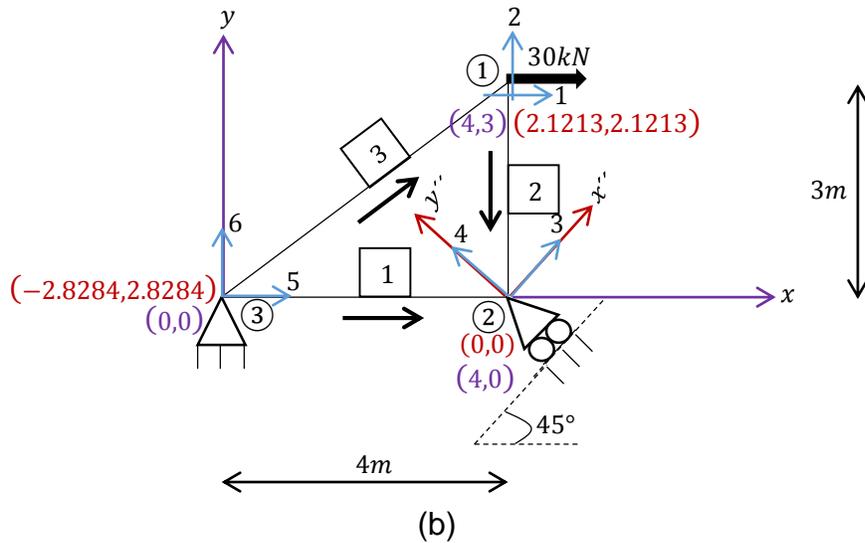
**Figura 2-6**

**SOLUCIÓN**

**Notación**

Se numeran los nodos y los elementos con un orden indistinto. Recuerde que la punta de la flecha en cada elemento está dirigida hacia el extremo alejado  $F$ , por lo que el extremo contrario es el cercano  $N$ , del mismo. En los elementos 1 y 2, el extremo lejano tiene que ser forzosamente el nodo ②, ya que es ahí donde está el soporte girado, figura 2-6b. Por conveniencia, se establece el origen de las coordenadas globales  $x, y$  en el nodo ③. Como el soporte en rodillos ② se

encuentra sobre un plano inclinado, en este nodo se emplean ejes nodales  $x'', y''$ . Evidentemente la dirección  $x''$  debe coincidir con el plano de deslizamiento del soporte inclinado y  $y''$  es perpendicular a  $x''$ . Se codifican los desplazamientos de tal modo que primero estén los desconocidos o no restringidos y después los conocidos o restringidos; puesto que la línea de acción de la fuerza reactiva del soporte ② se dirige hacia  $y''$ , el desplazamiento codificado como 4 está restringido y es nulo. Los números entre paréntesis de color morado son alusivos a las coordenadas  $x, y$  del nodo, mientras que los de color rojo indican las coordenadas  $x'', y''$ .



Las coordenadas en los ejes  $x'', y''$  para los nodos ① y ③ pueden obtenerse por trigonometría con base en la figura 2-6c.

$$\begin{aligned} a &= 3m(\cos 45^\circ) = 2.1213m & b &= 3m(\sin 45^\circ) = 2.1213m \\ c &= 4m(\cos 45^\circ) = 2.8284m & d &= 4m(\sin 45^\circ) = 2.8284m \end{aligned}$$

**Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento**

Figúrese que un elemento de armadura está conectado a un rodillo inclinado en su extremo  $F$ . Al tener un sistema de coordenadas globales  $x, y$  en el nodo cercano  $N$ , y un sistema de coordenadas nodales  $x'', y''$  en el nodo lejano  $F$ , deben calcularse cosenos directores para ambos sistemas de coordenadas. Evidentemente, los cosenos directores  $\lambda_x$  y  $\lambda_y$  del primer sistema se siguen evaluando con las ecuaciones 2 – 2 y 2 – 3. En tanto, los correspondientes al segundo sistema se determinan como sigue:

$$\lambda_{x''} = \cos \theta_{x''} = \frac{x''_F - x''_N}{L} = \frac{x''_F - x''_N}{\sqrt{(x''_F - x''_N)^2 + (y''_F - y''_N)^2}} \quad (2 - 16)$$

$$\lambda_{y''} = \cos \theta_{y''} = \frac{y''_F - y''_N}{L} = \frac{y''_F - y''_N}{\sqrt{(x''_F - x''_N)^2 + (y''_F - y''_N)^2}} \quad (2 - 17)$$

donde

$\theta_{x''}, \theta_{y''}$  = ángulos más pequeños entre los ejes  $x'', y''$  globales positivos y el eje local  $x'$  positivo.

$x''_N, y''_N$  = coordenadas  $x'', y''$  del extremo cercano  $N$  del elemento en turno.

$x''_F, y''_F$  = coordenadas  $x'', y''$  del extremo lejano  $F$  del elemento en turno.

$L$  = longitud del elemento.

Luego, la matriz de rigidez en coordenadas globales de un elemento  $i$  bajo estas condiciones es

$$k_i = \frac{AE}{L} \begin{pmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x \lambda_y & -\lambda_x \lambda_{x''} & -\lambda_x \lambda_{y''} \\ \lambda_x \lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_y \lambda_{x''} & -\lambda_y \lambda_{y''} \\ -\lambda_x \lambda_{x''} & -\lambda_y \lambda_{x''} & \lambda_{x''}^2 & \lambda_{x''} \lambda_{y''} \\ -\lambda_x \lambda_{y''} & -\lambda_y \lambda_{y''} & \lambda_{x''} \lambda_{y''} & \lambda_{y''}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ F_{x''} \\ F_{y''} \end{pmatrix} \quad (2 - 18)$$

donde

$A$  = área de la sección transversal del elemento.

$E$  = módulo de elasticidad del elemento.

$L$  = longitud del elemento.

$N_x, N_y$  = número de código del grado de libertad global asociado con el extremo cercano  $N$  en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente del elemento en turno.

$F_{x''}, F_{y''}$  = número de código del grado de libertad nodal asociado con el extremo lejano  $F$  en las direcciones  $x''$  y  $y''$  respectivamente del elemento en turno.

$\lambda_x, \lambda_y$  = cosenos de  $\theta_x$  y  $\theta_y$  respectivamente.

$\lambda_{x''}, \lambda_{y''}$  = cosenos de  $\theta_{x''}$  y  $\theta_{y''}$  respectivamente.

Debido a que los elementos 1 y 2 están conectados a un soporte inclinado, tienen números de código en la dirección de los ejes globales y nodales, en consecuencia, se aplican las expresiones 2 – 2, 2 – 3, 2 – 16 y 2 – 17 para obtener sus cosenos directores en ambos sistemas coordenados, y la matriz de rigidez de cada uno de ellos se calcula empleando la ecuación 2 – 18. Por otra parte, el elemento 3 sólo tiene cosenos directores  $\lambda_x$  y  $\lambda_y$ , así que su matriz de rigidez global se desarrolla de la forma habitual, es decir, mediante la ecuación 2 – 4.

A partir de la figura 2-6b y de la información proporcionada al inicio del problema se tienen los datos de las tablas 2-1, 2-2 y 2-3.

Elemento	Nodo		$A$	$E$	$L (m)$
	$N$	$F$			
1	3	2	$A$	$E$	4
2	1	2	$A$	$E$	3
3	3	1	$A$	$E$	5

**Tabla 2-1**

Elemento	Numeración de los grados de libertad					
	$N_x$	$N_y$	$F_{x''}$	$F_{y''}$	$F_x$	$F_y$
1	5	6	3	4		
2	1	2	3	4		
3	5	6			1	2

**Tabla 2-2**

Elemento	Coordenadas de los extremos cercano <i>N</i> y lejano <i>F</i>							
	$x_N$	$y_N$	$x_F$	$y_F$	$x''_N$	$y''_N$	$x''_F$	$y''_F$
1	0	0	4	0	-2.8284	2.8284	0	0
2	4	3	4	0	2.1213	2.1213	0	0
3	0	0	4	3				

**Tabla 2-3**

Por consiguiente,

**Elemento 1:**

$$\lambda_x = \frac{4 - 0}{4} = 1 \quad \lambda_y = \frac{0 - 0}{4} = 0$$

$$\lambda_{x''} = \frac{0 - (-2.8284)}{4} = 0.7071 \quad \lambda_{y''} = \frac{0 - 2.8284}{4} = -0.7071$$

$$k_1 = AE \begin{pmatrix} 0.2500 & 0 & -0.1768 & 0.1768 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1768 & 0 & 0.1250 & -0.1250 \\ 0.1768 & 0 & -0.1250 & 0.1250 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

**Elemento 2:**

$$\lambda_x = \frac{4 - 4}{3} = 0 \quad \lambda_y = \frac{0 - 3}{3} = -1$$

$$\lambda_{x''} = \frac{0 - 2.1213}{3} = -0.7071 \quad \lambda_{y''} = \frac{0 - 2.1213}{3} = -0.7071$$

$$k_2 = AE \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & -0.2357 & -0.2357 \\ 0 & -0.2357 & 0.1667 & 0.1667 \\ 0 & -0.2357 & 0.1667 & 0.1667 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

**Elemento 3:**

$$\lambda_x = \frac{4 - 0}{5} = 0.8 \quad \lambda_y = \frac{3 - 0}{5} = 0.6$$

$$k_3 = AE \begin{pmatrix} 0.1280 & 0.0960 & -0.1280 & -0.0960 \\ 0.0960 & 0.0720 & -0.0960 & -0.0720 \\ -0.1280 & -0.0960 & 0.1280 & 0.0960 \\ -0.0960 & -0.0720 & 0.0960 & 0.0720 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

**Matriz de rigidez de la estructura**

Para obtener la matriz de rigidez de la estructura, se ensamblan las tres matrices anteriores siguiendo el procedimiento acostumbrado. Puede verse que  $K$  tiene un orden de  $6 \times 6$  debido a que seis grados de libertad fueron identificados en la armadura, además, la partición en ella se efectúa como siempre.

$$K = AE \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.1280 & 0.0960 & 0 & 0 & -0.1280 & -0.0960 \\ 0.0960 & 0.4053 & -0.2357 & -0.2357 & -0.0960 & -0.0720 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 & 0.0417 & -0.1768 & 0 \\ 0 & -0.2357 & 0.0417 & 0.2917 & 0.1768 & 0 \\ -0.1280 & -0.0960 & -0.1768 & 0.1768 & 0.3780 & 0.0960 \\ -0.0960 & -0.0720 & 0 & 0 & 0.0960 & 0.0720 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

**Vectores de desplazamientos y de cargas**

De la figura 2-6b, se observa que los desplazamientos codificados con 1 y 2 corresponden a las componentes horizontal y vertical del desplazamiento en el nodo ①, así que  $D_1 = \Delta_{H1}$  y  $D_2 = \delta_{V1}$ ; también puede verse que el desplazamiento 3 viene siendo el desplazamiento resultante del nodo ②, por lo que  $D_3 = \Delta_2$ . Dadas las restricciones de los soportes ② y ③, los desplazamientos con códigos 4, 5 y 6 son inexistentes, entonces,  $D_4 = D_5 = D_6 = 0$ .

Por otro lado, en la dirección 1 se encuentra aplicada una carga de  $30kN$  en el sentido positivo de  $x$ , de modo que  $C_1 = 30kN$ , mientras que en las direcciones 2 y 3 no hay cargas externas, de ahí que  $C_2 = C_3 = 0$ . Además, en la dirección 4 se presenta la fuerza reactiva resultante del soporte ②, es por eso que  $C_4 = R_2$ , y en las direcciones 5 y 6 ocurren las reacciones en  $x$  y  $y$  del soporte ③, en consecuencia,  $C_5 = R_{3x}$  y  $C_6 = R_{3y}$ .

Siendo así, las matrices  $D$  y  $C$  son, respectivamente

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \Delta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \qquad C = \begin{pmatrix} C_C \\ C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ R_2 \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

**Cálculo de los desplazamientos incógnita y las reacciones en los soportes**

Aquí,  $C = KD$  (ecuación 2 – 8) resulta en

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ R_2 \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{pmatrix} = AE \begin{pmatrix} 0.1280 & 0.0960 & 0 & 0 & -0.1280 & -0.0960 \\ 0.0960 & 0.4053 & -0.2357 & -0.2357 & -0.0960 & -0.0720 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 & 0.0417 & -0.1768 & 0 \\ 0 & -0.2357 & 0.0417 & 0.2917 & 0.1768 & 0 \\ -0.1280 & -0.0960 & -0.1768 & 0.1768 & 0.3780 & 0.0960 \\ -0.0960 & -0.0720 & 0 & 0 & 0.0960 & 0.0720 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \Delta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al desarrollar la solución para los desplazamientos como en la ecuación 1 – 12, se tiene

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = AE \begin{pmatrix} 0.1280 & 0.0960 & 0 \\ 0.0960 & 0.4053 & -0.2357 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \Delta_2 \end{pmatrix}$$

Si se resuelve el sistema, despejando las incógnitas de manera afín a la ecuación 2 – 13 y expandiendo, se obtiene

$$\begin{pmatrix} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{AE} \begin{pmatrix} 0.1280 & 0.0960 & 0 \\ 0.0960 & 0.4053 & -0.2357 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{AE} \begin{pmatrix} 352.5000 \\ -157.5000 \\ -127.2804 \end{pmatrix}$$

Las reacciones en los soportes se hallan efectuando el producto matricial correspondiente a la partición inferior, es decir, con la ecuación 2 – 14. Al emplear los desplazamientos calculados previamente da

$$\begin{pmatrix} R_2 \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{pmatrix} = AE \begin{pmatrix} 0 & -0.2357 & 0.0417 \\ -0.1280 & -0.0960 & -0.1768 \\ -0.0960 & -0.0720 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 352.5000 \\ -157.5000 \\ -127.2804 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31.8195kN \\ -7.5000kN \\ -22.5000kN \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$R_2 = 31.8195kN \swarrow \quad R_{3x} = 7.5kN \leftarrow \quad R_{3y} = 22.5kN \downarrow$$

**Cálculo de las fuerzas en los elementos**

Para determinar la fuerza de tensión  $q$  de un elemento  $i$  conectado a un soporte inclinado en el nodo lejano  $F$ , se emplea la siguiente ecuación:

$$q_i = \frac{AE}{L} \begin{pmatrix} -\lambda_x & -\lambda_y & \lambda_{x''} & \lambda_{y''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx''} \\ D_{Fy''} \end{pmatrix} \quad (2 - 19)$$

donde

$A$  = área de la sección transversal del elemento.

$E$  = módulo de elasticidad del elemento.

$L$  = longitud del elemento.

$\lambda_x, \lambda_y$  = cosenos de  $\theta_x$  y  $\theta_y$  respectivamente.

$\lambda_{x''}, \lambda_{y''}$  = cosenos de  $\theta_{x''}$  y  $\theta_{y''}$  respectivamente.

$D_{Nx}, D_{Ny}$  = desplazamientos horizontal y vertical del nodo  $N$  del elemento en turno.

$D_{Fx''}, D_{Fy''}$  = desplazamientos en las direcciones  $x'', y''$  del nodo  $F$  del elemento en turno.

Por consiguiente, para conocer el valor de las fuerzas en los elementos 1 y 2 aplicamos la ecuación 2 – 19, mientras que la fuerza del elemento 3 se encuentra con base en la ecuación 2 – 15.

**Elemento 1:**

$$q_1 = \left(\frac{AE}{4}\right) \begin{pmatrix} -1 & -0 & 0.7071 & -0.7071 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -127.2804 \\ 0 \end{pmatrix} = -22.5KN \text{ (Compresión)}$$

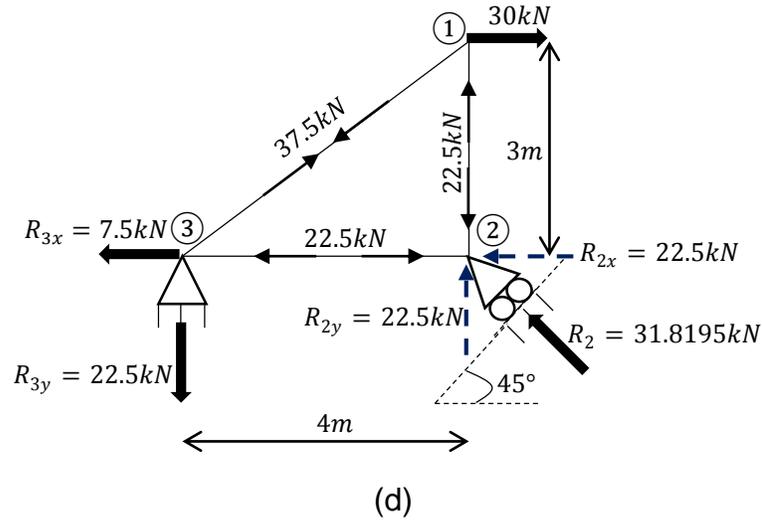
**Elemento 2:**

$$q_2 = \left(\frac{AE}{3}\right) \begin{pmatrix} -0 & -(-1) & -0.7071 & -0.7071 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 352.5 \\ -157.5 \\ -127.2804 \\ 0 \end{pmatrix} = -22.5KN \text{ (Compresión)}$$

**Elemento 3:**

$$q_3 = \left(\frac{AE}{5}\right) \begin{pmatrix} -0.8 & -0.6 & 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 352.5 \\ -157.5 \end{pmatrix} = 37.5KN \text{ (Tensión)}$$

Se muestran los resultados obtenidos en el diagrama de la figura 2-6d.



Con base en la figura 2-6e, se calculan las componentes horizontal y vertical del desplazamiento resultante en el nodo (2), el cual ocurre en la dirección  $x''$  negativa por haber resultado de magnitud negativa.

(e)

$$\Delta_{H2} = \Delta_2 (\cos 45^\circ) = \left( \frac{127.2804}{AE} \right) (\cos 45^\circ) = \frac{90.0008}{AE}$$

$$\delta_{v2} = \Delta_2 (\sin 45^\circ) = \left( \frac{127.2804}{AE} \right) (\sin 45^\circ) = \frac{90.0008}{AE}$$

Como  $\Delta_{H2}$  y  $\delta_{v2}$  actúan en las direcciones  $x$  positiva y  $y$  negativa, las magnitudes definitivas serían  $90.0008/AE$  y  $-90.0008/AE$  de forma respectiva.

Finalmente, se comprueba el equilibrio externo de la estructura; para ello, la fuerza resultante  $R_2$  se descompone en sus componentes horizontal y vertical.

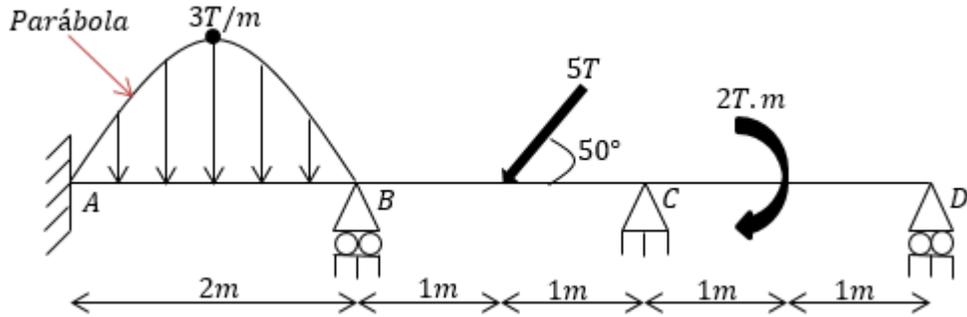
$$+\uparrow \sum Fy = -22.5 + 22.5 = 0 \quad ok$$

$$+\rightarrow \sum Fx = -7.5 - 22.5 + 30 = 0 \quad ok$$

$$+\curvearrowright \sum MA = 30(3) - 22.5(4) = 0 \quad ok$$

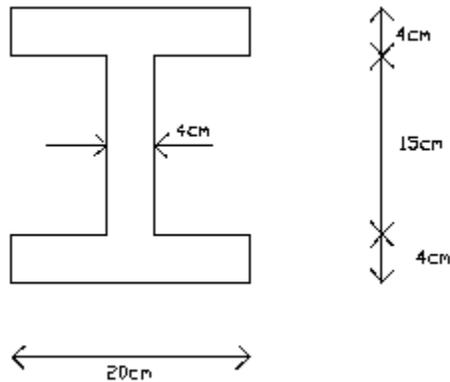
**Ejercicio 2.7 Resolución de una viga con el uso del método de la rigidez directa.**

**Instrucciones** Use el análisis matricial de la rigidez para calcular las reacciones en los apoyos de la viga de tres claros que se muestra en la figura 2-7a. Después, emplee los resultados obtenidos para verificar el equilibrio externo de la estructura.



(a)  
**Figura 2-7**

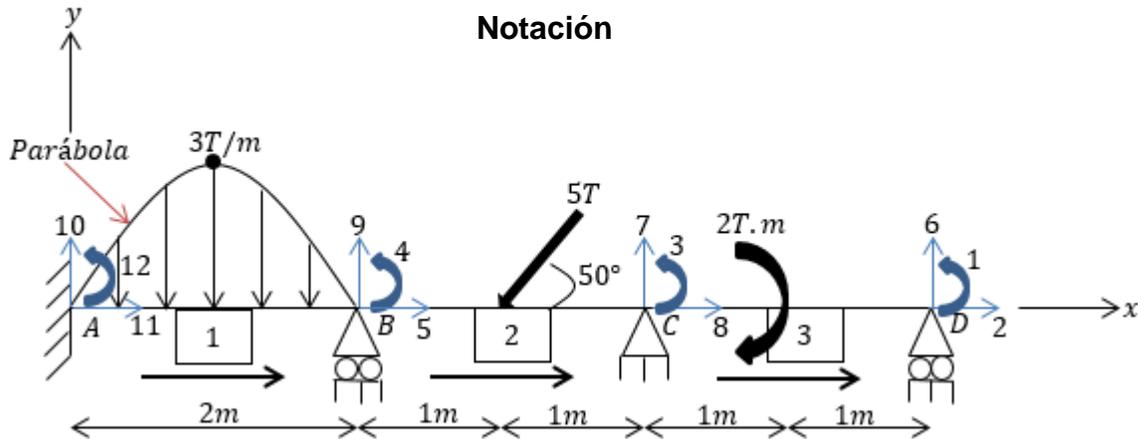
Considere el módulo de elasticidad del acero y una sección transversal tipo I con las siguientes dimensiones observadas en la figura 2-7b.



(b)

**SOLUCIÓN.**

**Notación**



(c)

Se divide la viga en elementos finitos. Por conveniencia, se opta porque cada elemento se extienda entre apoyos. Los elementos se identifican arbitrariamente usando un número inscrito en un cuadrado. Sin importar que los nodos estén o no predeterminados en el problema, de manera opcional se puede identificar cada uno de ellos usando un número dentro de un círculo. Para esta viga continua en particular, se tienen tres elementos y cuatro nodos que desde el inicio han sido definidos por  $A, B, C$  y  $D$ , figura 2-7c.

Los extremos cercano  $N$  y lejano  $F$  de cada elemento se especifican simbólicamente con una flecha a lo largo del elemento cuya punta se dirige hacia el extremo alejado. El sistema de coordenadas globales  $x, y, z$  tiene su origen en  $A$  con la finalidad de que los nodos restantes tengan coordenadas positivas. Tales ejes tienen su dirección positiva hacia la derecha, hacia arriba y en el sentido antihorario.

Dado que la viga está sometida a al menos una carga horizontal (es obvio que la carga puntual de  $5T$  tiene componentes horizontal y vertical), tienen que tomarse en cuenta los efectos de la flexión, la fuerza cortante y la fuerza axial. En consecuencia, en cada nodo hay tres grados de libertad, los cuales corresponden a un desplazamiento horizontal ( $\Delta_H$ ), un desplazamiento vertical ( $\delta_V$ ), y una rotación ( $\theta$ ), y que deben ser codificados numéricamente de tal forma que los números más bajos de código representen los desplazamientos desconocidos (grados de libertad no restringidos), mientras que los números más altos indiquen desplazamientos conocidos (grados de libertad restringidos).

Como recordatorio, un empotramiento restringe los tres grados de libertad mencionados, un soporte articulado sólo permite la rotación y un apoyo simple únicamente impide el desplazamiento vertical, en sus correspondientes puntos de ubicación. Si en algún nodo hay ausencia de soporte, entonces los tres grados de libertad son incógnitas.

De los doce grados de libertad en la viga, los codificados del 1 al 5 representan desplazamientos cuyo su valor se desconoce, en tanto, los números de código del 8 al 10 referencian desplazamientos conocidos, que en este caso son todos iguales a cero.

Las coordenadas de los nodos ya no se identifican por una razón que más adelante se explicará.

### **Vector de desplazamientos**

Al igual que en las armaduras, para las vigas se formula un vector de desplazamientos  $D$  que se secciona dando origen a dos vectores: el de

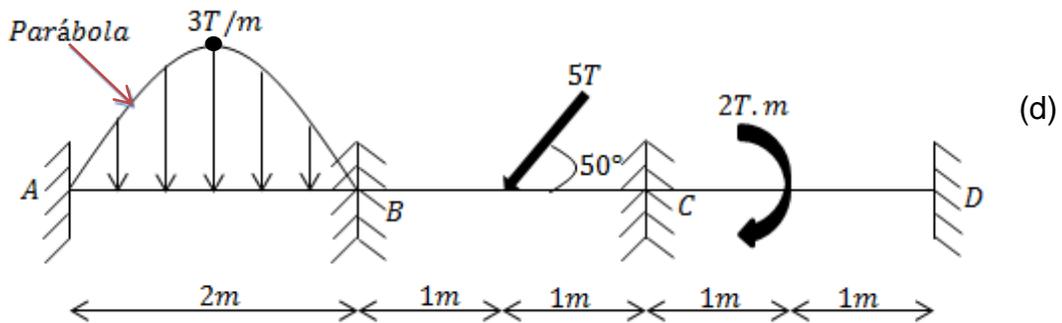
desplazamientos desconocidos  $D_D$  y el de desplazamientos conocidos  $D_C$ . Por las condiciones de apoyo en el problema se tiene

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_D \\ \Delta_{HD} \\ \theta_C \\ \theta_B \\ \Delta_{HB} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

**Vector de cargas**

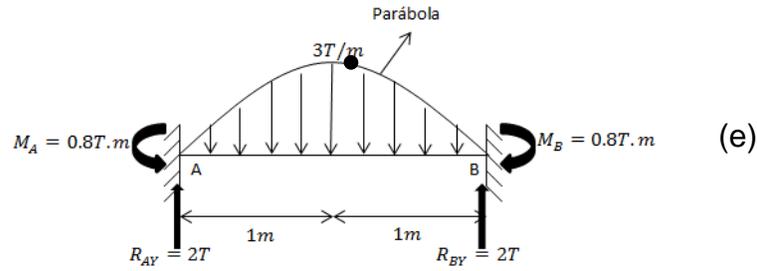
Obsérvese que sobre la longitud del elemento 1 se extiende una carga distribuida tipo parabólica, y que los elementos 2 y 3 soportan a la mitad de su claro y de forma respectiva, una carga puntual inclinada y un momento de par. El análisis matricial de la rigidez requiere que la carga externa se aplique en los nodos debido a que la matriz de rigidez del elemento que más adelante se presentará ha sido deducida para cargas aplicadas en sus extremos.

Para atender esta situación, se usa el principio de superposición. Suponemos que cada nodo está restringido de movimiento, motivo por el cual se les impone un empotramiento, figura 2-7d.



A continuación se calculan las fuerzas de fijación y momentos de empotramiento perfectos asociadas a cada elemento, figuras 2-7e, 2-7f y 2-7g. Para ello remítase al formulario realizado por este mismo autor, o bien, dedúzcalas empleando algún método válido como lo puede ser el de flexibilidades.

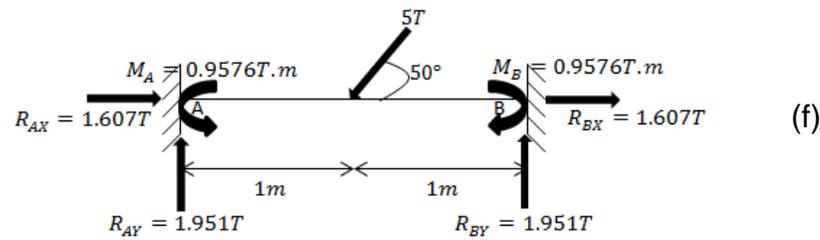
**Elemento 1.**



$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{3} = \frac{(3T/m)(2m)}{3} = 2T \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{15} = \frac{(3T/m)(2m)^2}{15} = 0.8T.m \curvearrowright$$

**Elemento 2.**

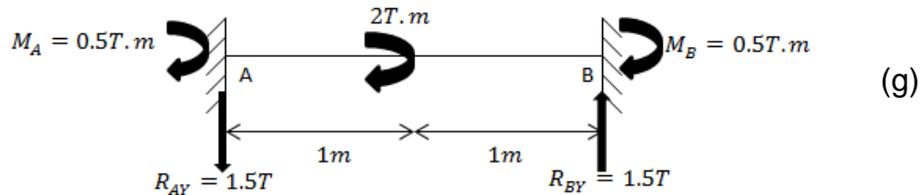


$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{P \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{(5T)(\sin(50^\circ))}{2} = 1.9151T \uparrow$$

$$R_{AX} = R_{BX} = \frac{P \cdot \cos \alpha}{2} = \frac{(5T)(\cos(50^\circ))}{2} = 1.6070T \rightarrow$$

$$M_A = M_B = \frac{P \cdot L \cdot \sin \alpha}{8} = \frac{(5T)(2m)(\sin(50^\circ))}{8} = 0.9576T.m \curvearrowright$$

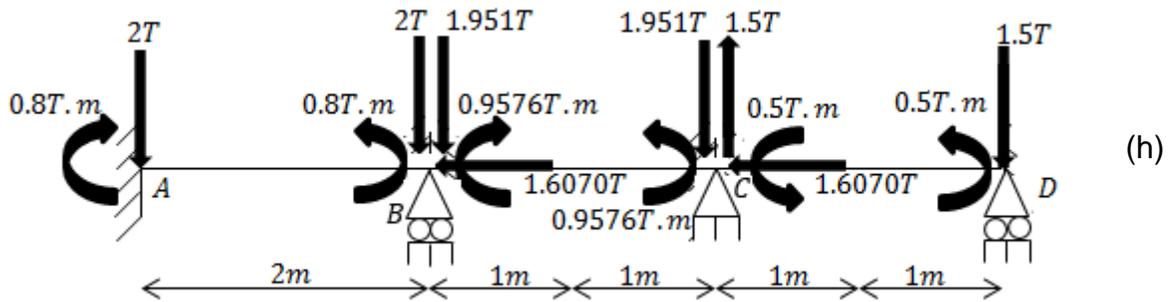
**Elemento 3.**



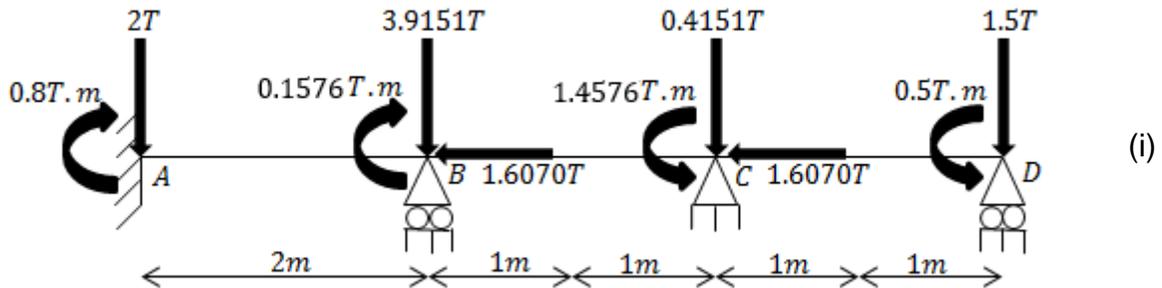
$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{3M}{2L} = \frac{(3)(2T/m)}{(2)(2m)} = 1.5T \updownarrow$$

$$M_A = M_B = \frac{M}{4} = \frac{2T.m}{4} = 0.5 T.m \curvearrowright$$

Las fuerzas de fijación y momentos de empotramiento calculados existirían si restringiéramos de movimiento a todos los nodos, algo que en no ocurre. En consecuencia, las fuerzas y momentos elásticos o efectivos actúan sobre los nodos en sentido contrario al que definimos, figura 2-7h, por lo que para fines de análisis estas son las fuerzas que aparecen



Al hacer la suma algebraica de las fuerzas y momentos en cada nodo se obtiene la viga cargada que se analizará con el método de la rigidez, figura 2-7i.



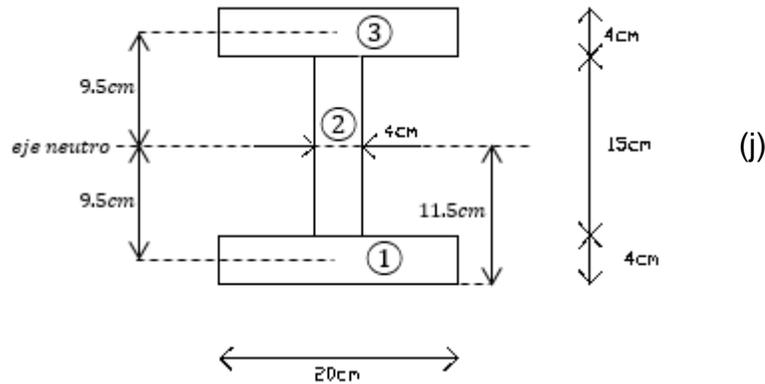
Se hace un cotejo entre las figuras 2-7i y 2-7c para plantear el vector de cargas  $C$ , el cual debe dividirse en un vector de cargas conocidas  $C_C$  y un vector de cargas desconocidas  $C_D$ .

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_C \\ C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.4576 \\ -0.1576 \\ -1.6070 \\ R_{Dy} - 1.5 \\ R_{Cy} - 0.4151 \\ R_{Cx} - 1.6070 \\ R_{By} - 3.9151 \\ R_{Ay} - 2 \\ R_{Ax} \\ M_A - 0.8 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Por la superposición, los resultados del análisis matricial para las cargas de la última figura se modificarán posteriormente con la viga sujeta a la carga real y a las reacciones fijamente apoyadas.

**Matriz de rigidez global para cada elemento**

El sistema de coordenadas globales ya ha sido identificado con los ejes  $x, y, z$ . Luego hacemos que las coordenadas locales  $x', y', z'$  tengan su origen en el extremo cercano de cada elemento, y que el eje positivo  $x'$  se dirija hacia el extremo lejano. Bajo esas circunstancias, para cada componente de la viga los ejes  $x$  y  $x'$  serán colineales dado que las coordenadas globales y del elemento serán todas paralelas. Por esta razón, a diferencia del caso de las armaduras, no es necesario desarrollar matrices de transformación entre estos dos sistemas de coordenadas. En resumen, aquí las matrices de rigidez global y local para un elemento de viga serán las mismas; ello explica que las coordenadas de los nodos no fueran identificadas al inicio del problema, puesto que lógicamente, el cálculo de los cosenos directores ya no es necesario. Para determinar el momento de inercia con respecto al eje neutro (pasando a través del centroide de la sección transversal), usamos la tabla 2-4. Por la simetría del perfil  $I$ , el centroide está a  $11.5\text{cm}$  de la parte inferior, figura 2-7j.



**Tabla 2-4**

Bloque	$I_o \text{ (cm}^4\text{)}$	$A \text{ (cm}^2\text{)}$	$d \text{ (cm)}$	$Ad^2 \text{ (cm}^4\text{)}$
1	$\left(\frac{1}{12}\right)(20)(4^3)$ $= 106.6667$	$(20)(4) = 80$	9.5	7220
2	$\left(\frac{1}{12}\right)(4)(15^3)$ $= 1125$	$(4)(15) = 60$	0	0
3	$\left(\frac{1}{12}\right)(20)(4^3)$ $= 106.6667$	$(20)(4) = 80$	9.5	7220
$\sum_t$	1338.3334	220		14440

Aplicando el teorema de los ejes paralelos se tiene

$$I = \sum I_o + \sum Ad^2 = 1338.3334 + 14440 = 15778.3334 \text{ cm}^4 = 0.000157783 \text{ m}^4$$

El área de la sección transversal y el módulo de elasticidad del acero son

$$A = 220 \text{ cm}^2 = 0.022 \text{ m}^2 \qquad E = 2.1 * 10^7 \text{ T/m}^2$$

Se calcula la matriz de rigidez global para cada elemento con la ecuación 2 – 20. Los números de código para cada columna y fila de estas matrices, que tienen la peculiaridad de ser siempre simétricas, deben establecerse apropiadamente.

$$k_i = \begin{matrix} & \begin{matrix} N_x & N_y & N_z & F_x & F_y & F_z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} & \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{matrix} \end{matrix} \quad 2 - 20$$

**Elemento 1:**

$$k_1 = 10^5 \begin{matrix} & \begin{matrix} 11 & 10 & 12 & 5 & 9 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0497 & 0.0497 & 0 & -0.0497 & 0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0663 & 0 & -0.0497 & 0.0331 \\ -2.31 & 0 & 0 & 2.31 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0497 & -0.0497 & 0 & 0.0497 & -0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0331 & 0 & -0.0497 & 0.0663 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 11 \\ 10 \\ 12 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

**Elemento 2:**

$$k_2 = 10^5 \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 9 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0497 & 0.0497 & 0 & -0.0497 & 0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0663 & 0 & -0.0497 & 0.0331 \\ -2.31 & 0 & 0 & 2.31 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0497 & -0.0497 & 0 & 0.0497 & -0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0331 & 0 & -0.0497 & 0.0663 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 9 \\ 4 \\ 8 \\ 7 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

**Elemento 3:**

$$k_3 = 10^5 \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0497 & 0.0497 & 0 & -0.0497 & 0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0663 & 0 & -0.0497 & 0.0331 \\ -2.31 & 0 & 0 & 2.31 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0497 & -0.0497 & 0 & 0.0497 & -0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0331 & 0 & -0.0497 & 0.0663 \end{pmatrix} \begin{matrix} 8 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{matrix}$$

**Matriz de rigidez de la estructura**

Ya que las matrices de rigidez de todos los elementos fueron determinadas, se ensamblan para calcular  $K$ , la cual también debe ser simétrica y tiene un orden de  $12 \times 12$  debido a que doce grados de libertad fueron designados para la viga.

$$K = 10^5 * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0.0663 & 0 & 0.0331 & 0 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0331 & 0 & 0.1325 & 0.0331 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0331 & 0.1325 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0.0331 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.62 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 \\ -0.0497 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0.0497 & -0.0497 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0497 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & 4.62 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 & 0.0994 & -0.0497 & 0 & -0.0497 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & 0.0497 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0331 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & 0.0663 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Dado que hay cinco incógnitas de desplazamiento, la matriz de rigidez de la estructura se secciona de tal forma que en la parte izquierda haya 5 columnas y en la porción superior haya 5 filas. Se sigue usando la misma nomenclatura que en las armaduras para cada una de las submatrices, ecuación 2 – 5.

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \quad (2 - 5)$$

**Cálculo de las incógnitas**

Al hacer  $C = KD$ , ecuación 2 – 8, se tiene

$$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.4576 \\ -0.1576 \\ -1.6070 \\ R_{Dy} - 1.5 \\ R_{Cy} - 0.4151 \\ R_{Cx} - 1.6070 \\ R_{By} - 3.9151 \\ R_{Ay} - 2 \\ R_{Ax} \\ M_A - 0.8 \end{pmatrix} = 10^5 * \begin{pmatrix} 0.0663 & 0 & 0.0331 & 0 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0331 & 0 & 0.1325 & 0.0331 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0331 & 0.1325 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0.0331 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.62 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 \\ -0.0497 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0.0497 & -0.0497 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0497 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & 4.62 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 & 0.0994 & -0.0497 & 0 & -0.0497 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & 0.0497 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0331 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & 0.0663 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_D \\ \Delta_{HD} \\ \theta_C \\ \theta_B \\ \Delta_{HB} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema matricial anterior es equivalente a la ecuación 2 – 9.

$$\begin{pmatrix} C_C \\ C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_D \\ D_C \end{pmatrix} \quad (2 - 9)$$

Se calculan los desplazamientos desconocidos al extraer y resolver un primer subsistema que en seguida se reescribe.

$$C_C = K_{11}D_D + K_{12}D_C \quad (2 - 10)$$

Igual que en las armaduras, como  $D_C$  vale cero, la ecuación anterior pasa a ser

$$C_C = K_{11}D_D \quad (2 - 12)$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.4576 \\ -0.1576 \\ -1.6070 \end{pmatrix} = 10^5 * \begin{pmatrix} 0.0663 & 0 & 0.0331 & 0 & 0 \\ 0 & 2.31 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0331 & 0 & 0.1325 & 0.0331 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0331 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_D \\ \Delta_{HD} \\ \theta_C \\ \theta_B \\ \Delta_{HB} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_D \\ \Delta_{HD} \\ \theta_C \\ \theta_B \\ \Delta_{HB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000176 \text{ rad} \\ 0 \\ 0.0001158 \text{ rad} \\ -0.0000408 \text{ rad} \\ -0.0000035 \text{ m} \end{pmatrix}$$

Se puede hacer un análisis de los resultados; por ejemplo, note como el nodo  $D$  experimenta una rotación antihoraria de  $0.0000176 \text{ rad}$  y en realidad no se desplaza horizontalmente.

Las reacciones se obtienen de resolver un segundo subsistema que fue citado en las armaduras.

$$C_D = K_{21}D_D + K_{22}D_C \quad (2 - 11)$$

Como ya se mencionó,  $D_C = 0$ , así que nuevamente de la ecuación 2 – 14,  $C_D = K_{21}D_D$ , y al usar los desplazamientos calculados se tiene

$$\begin{pmatrix} R_{Dy} - 1.5 \\ R_{Cy} - 0.4151 \\ R_{Cx} - 1.6070 \\ R_{By} - 3.9151 \\ R_{Ay} - 2 \\ R_{Ax} \\ M_A - 0.8 \end{pmatrix} = 10^5 * \begin{pmatrix} -0.0497 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 \\ 0.0497 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 \\ 0 & -2.31 & 0 & 0 & -2.31 \\ 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.31 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0331 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0000176 \\ 0 \\ 0.0001158 \\ -0.0000408 \\ -0.0000035 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6628 \\ 0.2902 \\ 0.8035 \\ 0.5755 \\ -0.2030 \\ 0.8035 \\ -0.1353 \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$R_{Dy} - 1.5 = -0.6628 \Rightarrow R_{Dy} = -0.6628 + 1.5 = 0.8372T \Rightarrow \therefore R_{Dy} = 0.8372T \uparrow$$

$$R_{Cy} - 0.4151 = 0.2902 \Rightarrow R_{Cy} = 0.2902 + 0.4151 = 0.7053T \Rightarrow \therefore R_{Cy} = 0.7053T \uparrow$$

$$R_{Cx} - 1.6070 = 0.8035 \Rightarrow R_{Cx} = 0.8035 + 1.6070 = 2.4105T \Rightarrow \therefore R_{Cx} = 2.4105T \rightarrow$$

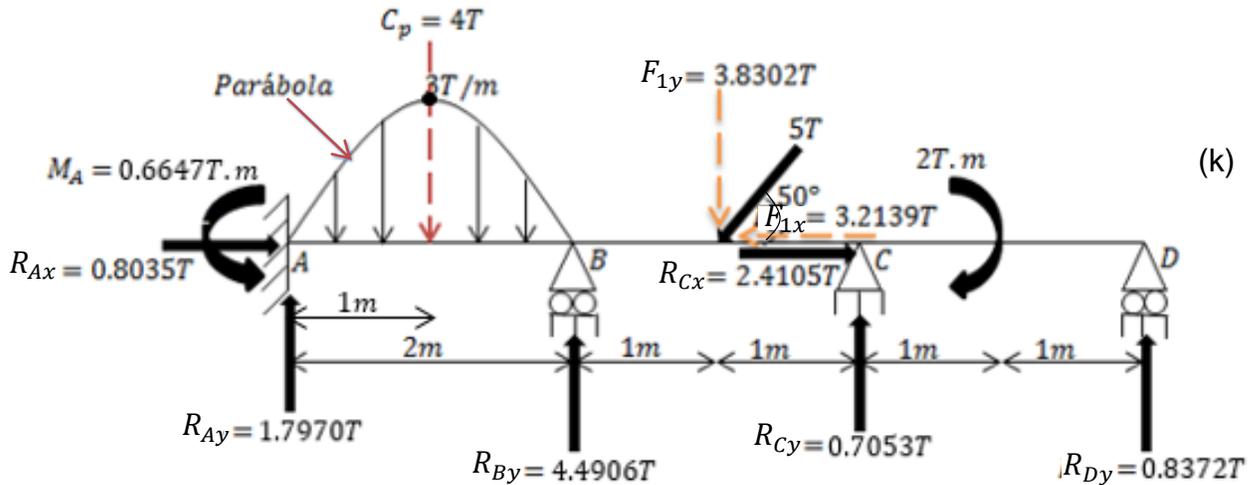
$$R_{By} - 3.9151 = 0.5755 \Rightarrow R_{By} = 0.5755 + 3.9151 = 4.4906T \Rightarrow \therefore R_{By} = 4.4906T \uparrow$$

$$R_{Ay} - 2 = -0.2030 \Rightarrow R_{Ay} = -0.2030 + 2 = 1.7970T \Rightarrow \therefore R_{Ay} = 1.7970T \uparrow$$

$$R_{Ax} = 0.8035 \Rightarrow \therefore R_{Ax} = 0.8035T \rightarrow$$

$$M_A - 0.8 = -0.1353 \rightarrow M_A = -0.1353 + 0.8 = 0.6647 T.m \Rightarrow \therefore M_A = 0.6647T.m \curvearrowright$$

Se muestran los resultados obtenidos en el diagrama de la figura 2-7k.



Se comprueba el equilibrio externo de la viga. Se resuelve la fuerza de  $5T$  en sus componentes  $x$  y  $y$ , y se determina la fuerza resultante de la carga distribuida y su punto de aplicación de la carga parabólica.

$$F_{1x} = 5 * \sin 50^\circ = 3.8302T \quad F_{1y} = 5 * \cos 50^\circ = 3.2139T$$

$$C_p = \left(\frac{2}{3}\right) (3 T/m)(2m) = 4T \quad \bar{x} = 1m$$

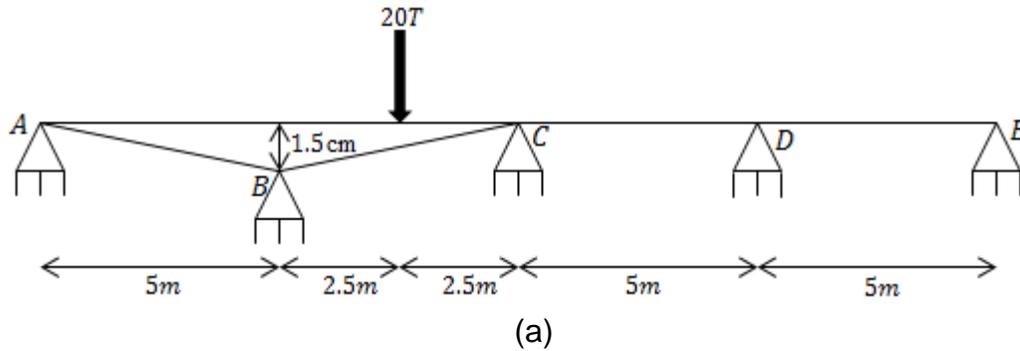
$$+\uparrow \sum Fy = 1.7970 - 4 + 4.4906 - 3.8302 + 0.7053 + 0.8372 = 0 \quad ok$$

$$+\rightarrow \sum Fx = 0.8035 - 3.2139 + 2.4105 \cong 0 \quad ok$$

$$\curvearrowright \sum MA = -0.6647 + 4(1) - 4.4906(2) + 3.8302(3) - 0.7053(4) + 2 - 0.8372(6) \cong 0 \quad ok$$

**Ejercicio 2.8 Solución de una viga con asentamiento en un apoyo por medio del método de la rigidez matricial.**

**Instrucciones** Determine las reacciones en los soportes de la viga mostrada en la figura 2-8a que está sometida a una carga puntual de  $20T$  aplicada a la mitad del claro  $B - C$ , si el soporte  $B$  se asienta  $1.5\text{cm}$ . Considere que  $E = 2 * 10^7 T/m^2$  y que  $I = 0.00171m^4$ , es decir,  $EI = 3.42 * 10^4 T - m^2$ .

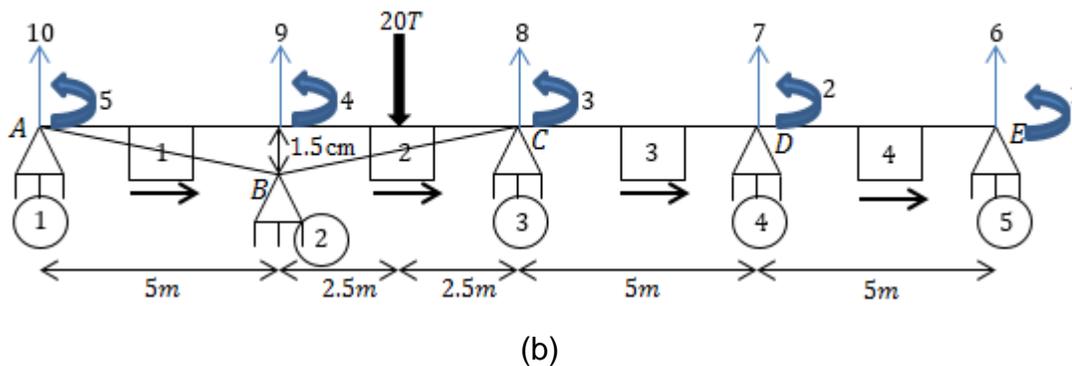


**Figura 2-8**

**SOLUCIÓN**

**Notación**

La viga tiene cuatro elementos y cinco nodos, los cuales son identificados de forma respectiva por números dentro de un cuadrado y dentro de un círculo. De los diez grados de libertad, cinco son desconocidos y como siempre se codifican numéricamente en primer lugar, figura 2-8b.



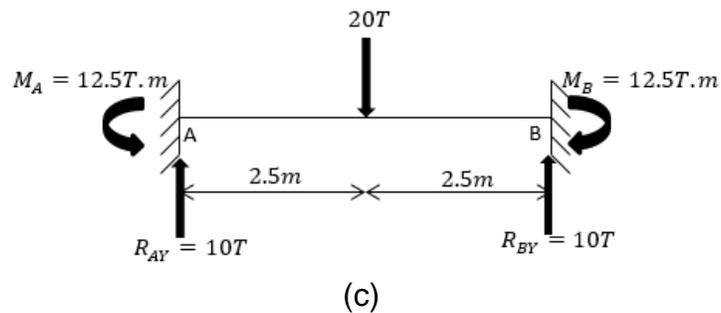
### Vector de desplazamientos

Aunque el soporte articulado  $B$  impide la deflexión en ese punto, hay un desplazamiento impuesto de  $1.5\text{cm}$ , el cual aparece en el vector  $D$  con magnitud negativa porque se presenta en la dirección  $x$  negativa, es decir, hacia abajo, y debe convertirse en metros para manejar una congruencia de unidades. Como en los soportes  $A$  hasta  $E$ , la pendiente o rotación ( $\theta$ ) es desconocida, entonces,

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \\ \theta_E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.015 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

### Vector de cargas

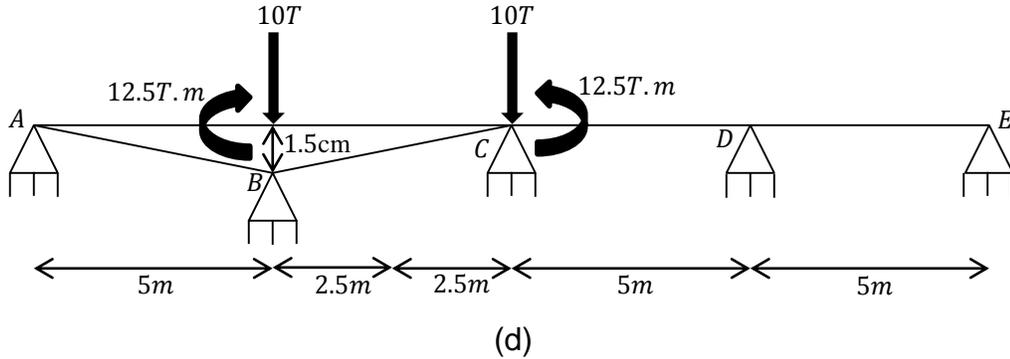
Se hace la suposición de que cada nodo impide todo tipo de grado de libertad. El elemento 2 es el único que está cargado, así que solamente se tienen las fuerzas de fijación y momentos de empotramiento perfecto siguientes, figura 2-8c.



$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{P}{2} = \frac{20T}{2} = 10T \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{PL}{8} = \frac{20T(5m)}{8} = 12.5 T.m \curvearrowright$$

Las acciones anteriores actúan realmente en sentido opuesto. Se representa la viga con cargas nodales, figura 2-8d.



Por lo tanto, la matriz de cargas es

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_C \\ C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.5 \\ -12.5 \\ 0 \\ R_{EY} \\ R_{DY} \\ R_{CY} - 10 \\ R_{BY} - 10 \\ R_{AY} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

### Matriz de rigidez global para cada elemento

La matriz de rigidez global para un elemento de viga con eje longitudinal en  $x$  puede reducirse a la forma de la ecuación 2 – 21, en caso de que no se presente carga axial en ella y se desprecie la deformación axial.

$$k_i = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{matrix} N_y \\ N_z \\ F_y \\ F_z \end{matrix} \quad (2 - 21)$$

Entonces, la matriz de rigidez de cada elemento se determina mediante la ecuación 2 – 21. De acuerdo con los números de código y las direcciones de los elementos se tiene

**Elemento 1:**

$$k_1 = 3.42 * 10^4 \begin{pmatrix} 10 & 5 & 9 & 4 \\ 0.0960 & 0.2400 & -0.0960 & 0.2400 \\ 0.2400 & 0.8000 & -0.2400 & 0.4000 \\ -0.0960 & -0.2400 & 0.0960 & -0.2400 \\ 0.2400 & 0.4000 & -0.2400 & 0.8000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 10 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{matrix}$$

**Elemento 2:**

$$k_2 = 3.42 * 10^4 \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 & 3 \\ 0.0960 & 0.2400 & -0.0960 & 0.2400 \\ 0.2400 & 0.8000 & -0.2400 & 0.4000 \\ -0.0960 & -0.2400 & 0.0960 & -0.2400 \\ 0.2400 & 0.4000 & -0.2400 & 0.8000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 4 \\ 8 \\ 3 \end{matrix}$$

**Elemento 3:**

$$k_3 = 3.42 * 10^4 \begin{pmatrix} 8 & 3 & 7 & 2 \\ 0.0960 & 0.2400 & -0.0960 & 0.2400 \\ 0.2400 & 0.8000 & -0.2400 & 0.4000 \\ -0.0960 & -0.2400 & 0.0960 & -0.2400 \\ 0.2400 & 0.4000 & -0.2400 & 0.8000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 8 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{matrix}$$

**Elemento 4:**

$$k_4 = 3.42 * 10^4 \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 & 1 \\ 0.0960 & 0.2400 & -0.0960 & 0.2400 \\ 0.2400 & 0.8000 & -0.2400 & 0.4000 \\ -0.0960 & -0.2400 & 0.0960 & -0.2400 \\ 0.2400 & 0.4000 & -0.2400 & 0.8000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{matrix}$$

**Matriz de rigidez de la estructura**

Se forma la matriz de rigidez de la estructura al ensamblar los elementos de las matrices de rigidez anteriores y se le efectúa la partición adecuada. Entonces,

## CAPÍTULO 2 ANÁLISIS ESTRUCTURAL

$$K = 3.42 * 10^4 \begin{pmatrix} 0.8000 & 0.4000 & 0 & 0 & 0 & -0.2400 & 0.2400 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 & 0 & 0 & -0.2400 & 0 & 0.2400 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 & 0 & 0 & -0.2400 & 0 & 0.2400 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 & 0 & 0 & -0.2400 & 0 & 0.2400 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4000 & 0.8000 & 0 & 0 & 0 & -0.2400 & -0.2400 \\ -0.2400 & -0.2400 & 0 & 0 & 0 & 0.0960 & -0.0960 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2400 & 0 & -0.2400 & 0 & 0 & -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2400 & 0 & -0.2400 & 0 & 0 & -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2400 & 0 & -0.2400 & 0 & 0 & -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2400 & 0.2400 & 0 & 0 & 0 & -0.0960 & 0.0960 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

La nomenclatura asociada a las submatrices, como de costumbre, es

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & | & K_{12} \\ \hline K_{21} & | & K_{22} \end{pmatrix}$$

### Cálculo de las incógnitas

Al escribir  $C = KD$ , se extraen y se resuelven dos subsistemas con la finalidad de determinar primero las incógnitas y luego los desplazamientos.

El primer subsistema es como la ecuación 2 – 10.

$$C_C = K_{11}D_D + K_{12}D_C$$

Como esta vez el vector  $D_C$  es diferente de cero, el despeje de los desplazamientos desconocidos es

$$D_D = K_{11}^{-1}(C_C - K_{12}D_C) \quad (2 - 22)$$

En consecuencia,

$$\begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \\ \theta_E \end{pmatrix} = \frac{1}{3.42 * 10^4} * \begin{pmatrix} 0.8000 & 0.4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4000 & 0.8000 \end{pmatrix}^{-1} * \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.5 \\ -12.5 \\ 0 \end{pmatrix} - (3.42 * 10^4) * \begin{pmatrix} -0.2400 & 0.2400 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2400 & 0 & 0.2400 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2400 & 0 & 0.2400 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2400 & 0 & 0.2400 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2400 & 0.2400 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.015 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \\ \theta_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00037rad \\ -0.000741rad \\ 0.002593rad \\ 0.000284rad \\ -0.004642rad \end{pmatrix}$$

El segundo subsistema es el denotado por la ecuación 2 – 11.

$$C_D = K_{21}D_D + K_{22}D_C$$

Al usar los resultados recién obtenidos y simplificar se tiene

$$\begin{pmatrix} R_{EY} \\ R_{DY} \\ R_{CY} - 10 \\ R_{BY} - 10 \\ R_{AY} \end{pmatrix} = (3.42 * 10^4) \begin{pmatrix} -0.2400 & -0.2400 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2400 & 0 & -0.2400 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2400 & 0 & -0.2400 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2400 & 0 & -0.2400 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2400 & 0.2400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.00037 \\ -0.000741 \\ 0.002593 \\ 0.000284 \\ -0.004642 \end{pmatrix}$$

$$+ (3.42 * 10^4) \begin{pmatrix} 0.0960 & 0.0960 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0960 & 0.0960 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.015 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{EY} \\ R_{DY} \\ R_{CY} - 10 \\ R_{BY} - 10 \\ R_{AY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.04007 \\ -18.2404 \\ 40.8377 \\ -39.1144 \\ 13.4771 \end{pmatrix}$$

$$R_{EY} = 3.04007 \Rightarrow \therefore R_{EY} = 3.04007T \uparrow$$

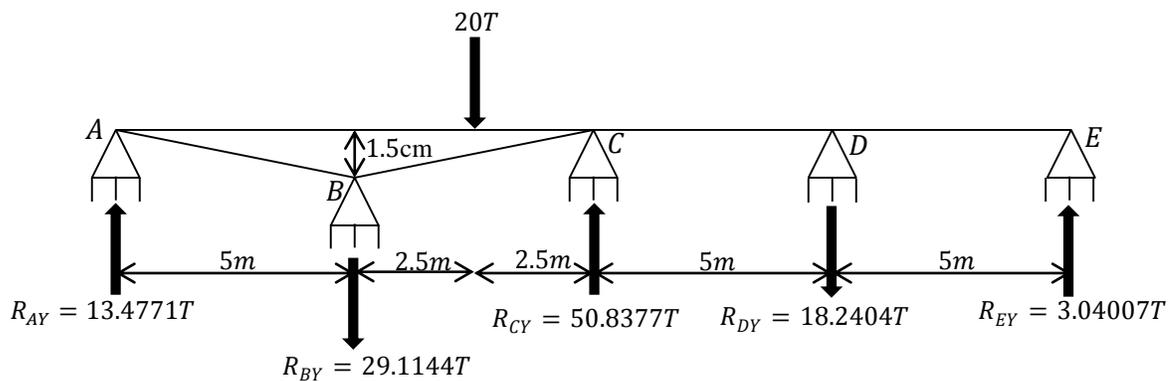
$$R_{DY} = -18.2404 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 18.2404T \downarrow$$

$$R_{CY} - 10 = 40.8377 \Rightarrow R_{CY} = 40.8377 + 10 = 50.8377 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 50.8377T \uparrow$$

$$R_{BY} - 10 = -39.1144 \Rightarrow R_{BY} = -39.1144 + 10 = -29.1144 \therefore R_{BY} = 29.1144T \downarrow$$

$$R_{AY} = 13.4771 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 13.4771T \uparrow$$

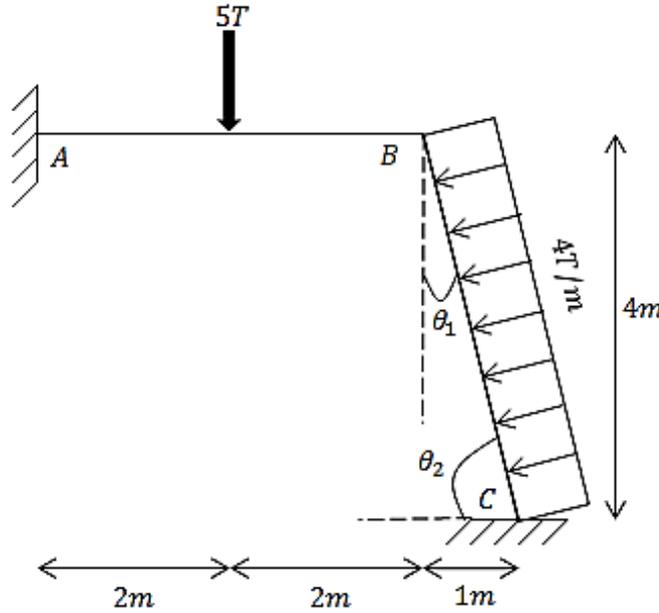
En el diagrama de la figura 2-8e pueden ser visualizados los valores de las reacciones en los soportes de la viga hiperestática cuyo apoyo B se asienta 1.5cm.



(e)

**Ejercicio 2.9 Resolución de un pórtico plano con el método de la rigidez directa.**

**Instrucciones** Para el marco que se muestra en la figura 2-9a, calcule las reacciones en los empotramientos  $A$  y  $C$ . Obsérvese que la columna inclinada recibe una carga distribuida uniforme de  $4T/m$  ortogonal a su eje. Considere para ambos miembros el módulo de elasticidad del concreto con  $f'c = 250kg/cm^2$  y una sección transversal rectangular de base  $b = 20cm$  y altura  $h = 30cm$ .



(a)  
**Figura 2-9**

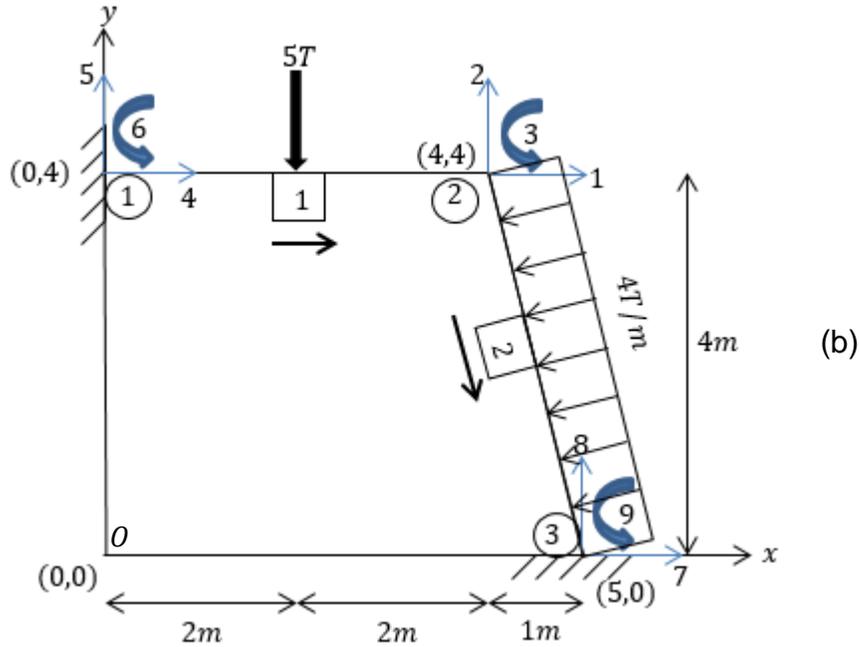
**SOLUCIÓN**

**Notación**

Se divide la estructura en elementos finitos. El marco tiene dos elementos y tres nodos que han sido identificados arbitrariamente por medio de números encerrados en un cuadrado y en un círculo, de manera respectiva, figura 2-9b. Se coloca una flecha adyacente en cada elemento para simbolizar de forma arbitraria sus extremos lejano  $F$  y cercano  $N$ , con el criterio de que la punta de la flecha se dirige hacia el extremo alejado. El origen de las coordenadas globales  $x, y, z$  que tienen su dirección positiva hacia la derecha, hacia arriba y en el sentido antihorario, es establecido en el punto  $O$  con la finalidad de que todos los nodos tengan coordenadas positivas.

En un marco, los efectos de la flexión, la fuerza cortante y la fuerza axial deben ser considerados, en consecuencia, en cada nodo hay tres grados de libertad, los cuales corresponden a un desplazamiento horizontal, un desplazamiento vertical y

una rotación. La estructura es cinemáticamente indeterminada de tercer grado, ya que de los nueve grados de libertad, tres no están restringidos. Los grados de libertad se codifican numéricamente de tal modo que los números más bajos de código representen los desplazamientos desconocidos, mientras que los números más altos indiquen desplazamientos conocidos.



**Vector de desplazamientos**

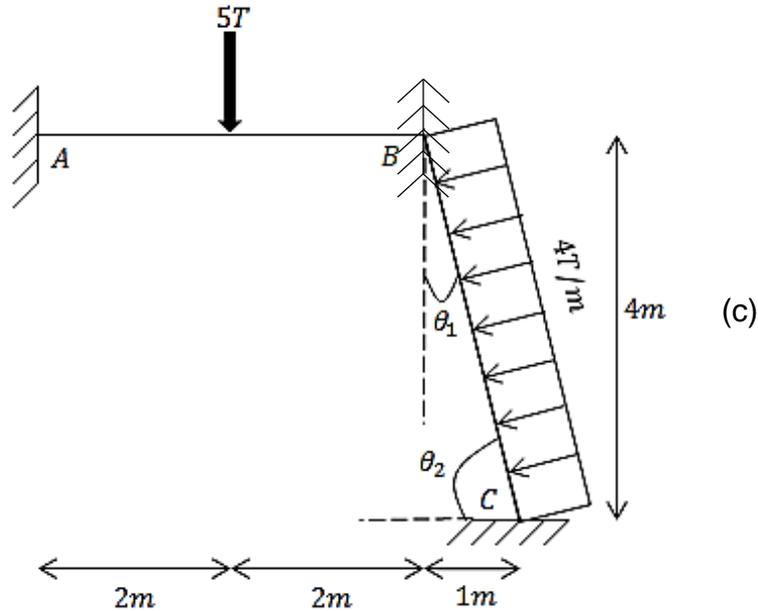
Como los empotramientos 1 y 2 restringen de movimiento a esos nodos, se tiene el siguiente vector de desplazamientos  $D$ , el cual se divide en dos vectores: el de desplazamientos desconocidos  $D_D$  y el de desplazamientos conocidos  $D_C$ .

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \hline D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{HB} \\ \delta_{VB} \\ \theta_B \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \hline 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

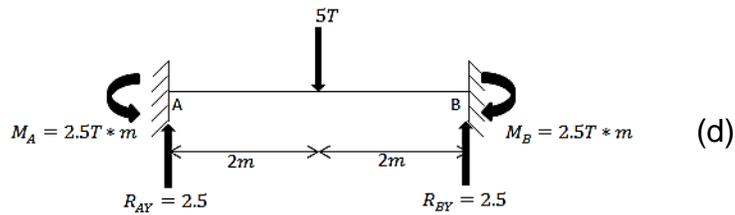
**Vector de cargas**

Si se impone una restricción total de movimiento en cada nodo, entonces todos los nodos estarán empotrados imaginariamente, figura 2-9c. Bajo esa condición, se calculan las fuerzas de fijación y momentos de empotramiento perfecto asociadas

a cada elemento, figuras 2-9d y 2-9e. Remítase a un formulario o dedúzcalas de preferencia.



**Elemento 1.**

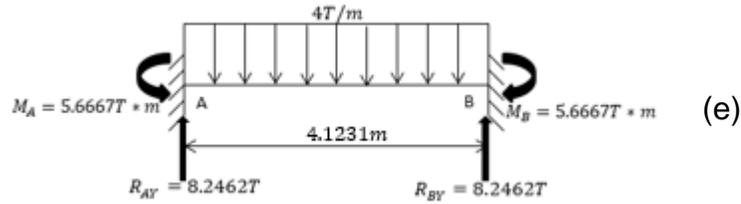


$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{P}{2} = \frac{5T}{2} = 2.5 T \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{PL}{8} = \frac{5T(4m)}{8} = 2.5 T \cdot m \quad \curvearrowright$$

**Elemento 2.**

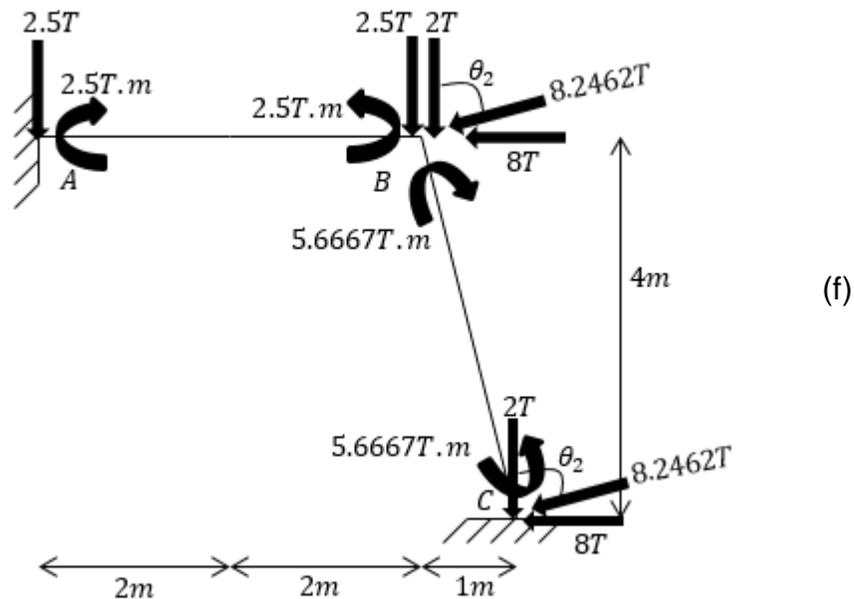
Al rotar el elemento 2 de tal modo que su eje sea horizontal y si se sabe que su longitud es  $L = \sqrt{(4m)^2 + (1m)^2} = 4.1231m$ , se tiene



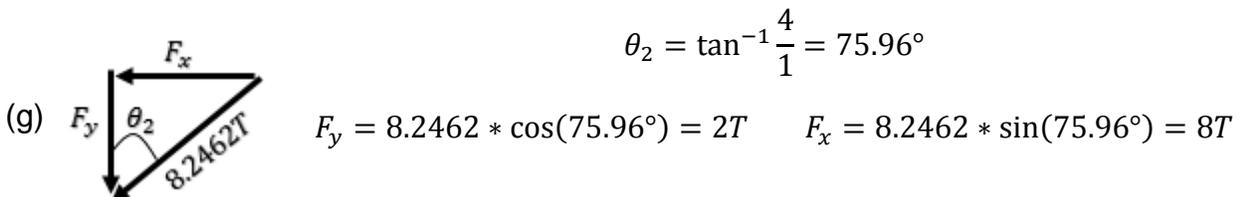
$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{2} = \frac{(4T/m)(4.1231m)}{2} = 8.2462 \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{12} = \frac{(4T/m)(4.1231m)^2}{12} = 5.6667 T.m \curvearrowright$$

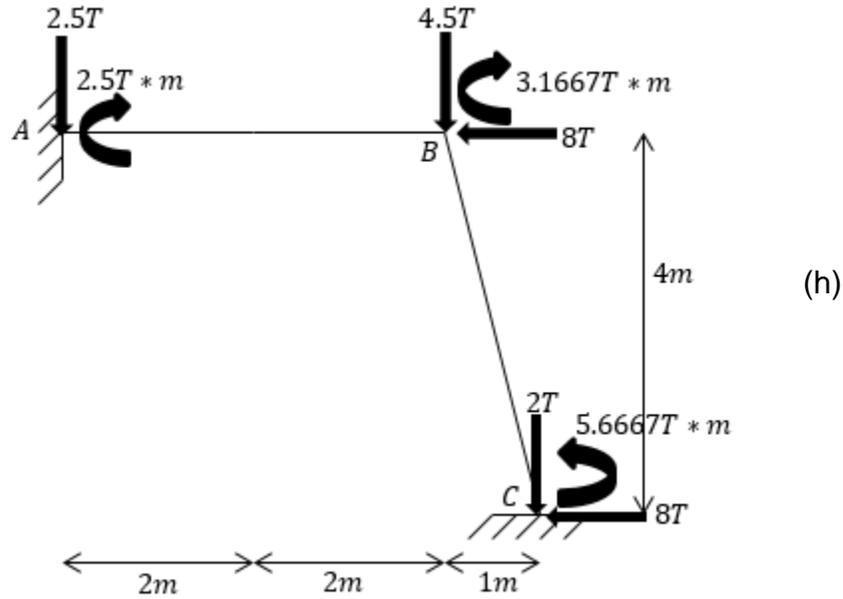
Las fuerzas de fijación y momentos de empotramiento calculados existirían si restringiéramos de movimiento a todos los nodos, algo que no ocurre realmente, pues el nodo B está libre. Por lo tanto, las fuerzas y momentos elásticos o efectivos sobre los nodos actúan verdaderamente en sentido opuesto al definido, así que para fines de análisis estas son las fuerzas que aparecen, figura 2-9f.



Evidentemente, las fuerzas de 8.2462T son ortogonales al miembro B – C; puesto que en los nodos B y C hay números de código en la dirección de los ejes globales, estas fuerzas deben ser resueltas en sus componentes rectangulares horizontal y vertical, figura 2-9g.



Al hacer la suma algebraica de las fuerzas y momentos en cada nodo se obtienen las acciones totales en ellos. Finalmente, el marco cargado que se analizará con el método de la rigidez es el que se observa en la figura 2-9h.



Al efectuar un cotejo entre esta figura y la 2-9b elaborado en la parte de notación, se concluye que el vector de cargas  $C$ , el cual se parte en un vector de cargas conocidas  $C_C$  y un vector de cargas desconocidas  $C_D$ , es

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \hline C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4.5 \\ -3.1667 \\ \hline R_{Ax} \\ R_{Ay} - 2.5 \\ M_A - 2.5 \\ R_{Cx} - 8 \\ R_{Cy} - 2 \\ M_C + 5.6667 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \hline 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

### Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

De acuerdo a la información proporcionada al inicio, para los dos elementos se tiene

$$A = (0.2m)(0.3m) = 0.06m^2$$

$$E = 14000\sqrt{250} = 221359.4362 \text{ kg/cm}^2 = 2213594.362 \text{ T/m}^2$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0.2m)(0.3m)^3}{12} = 0.00045m^4$$

La matriz de rigidez global de un miembro de marco se obtiene de

$$k_i = \begin{pmatrix} N_x & N_y & N_z & F_x & F_y & F_z \\ \left( \frac{AE}{L} \lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_y^2 \right) & \left( \frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \lambda_x \lambda_y & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_y & -\left( \frac{AE}{L} \lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_y^2 \right) & -\left( \frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \lambda_x \lambda_y & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_y \\ \left( \frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \lambda_x \lambda_y & \left( \frac{AE}{L} \lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_x^2 \right) & \frac{6EI}{L^2} \lambda_x & -\left( \frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \lambda_x \lambda_y & -\left( \frac{AE}{L} \lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_x^2 \right) & \frac{6EI}{L^2} \lambda_x \\ -\frac{6EI}{L^2} \lambda_y & \frac{6EI}{L^2} \lambda_x & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \lambda_y & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_x & \frac{2EI}{L} \\ -\left( \frac{AE}{L} \lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_y^2 \right) & -\left( \frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \lambda_x \lambda_y & \frac{6EI}{L^2} \lambda_y & \left( \frac{AE}{L} \lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_y^2 \right) & \left( \frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \lambda_x \lambda_y & \frac{6EI}{L^2} \lambda_y \\ -\left( \frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \lambda_x \lambda_y & -\left( \frac{AE}{L} \lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_x^2 \right) & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_x & -\left( \frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \lambda_x \lambda_y & -\left( \frac{AE}{L} \lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_x^2 \right) & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_x \\ -\frac{6EI}{L^2} \lambda_y & \frac{6EI}{L^2} \lambda_x & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \lambda_y & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_x & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{matrix} \quad (2-23)$$

Se aplican las ecuaciones 2 – 2, 2 – 3 y 2 – 23 a cada elemento. Por consiguiente,

**Elemento 1.** Debido a que el extremo cercano es ① y el extremo lejano es ②, tenemos

$$L = 4m \quad \lambda_x = \frac{4-0}{4} = 1 \quad \lambda_y = \frac{4-4}{4} = 0$$

$$k_1 = 10^4 \begin{pmatrix} 3.3204 & 0 & 0 & -3.3204 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0187 & 0.0374 & 0 & -0.0187 & 0.0374 \\ 0 & 0.0374 & 0.0996 & 0 & -0.0374 & 0.0498 \\ -3.3204 & 0 & 0 & 3.3204 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0187 & -0.0374 & 0 & 0.0187 & -0.0374 \\ 0 & 0.0374 & 0.0498 & 0 & -0.0374 & 0.0996 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

**Elemento 2.** Puesto que el extremo cercano es ② y el extremo lejano es ③, se tiene

$$L = 4.1231 m \quad \lambda_x = \frac{5-4}{4.1231} = 0.2425 \quad \lambda_y = \frac{0-4}{4.1231} = -0.9701$$

$$k_2 = 10^4 \begin{pmatrix} 0.2055 & -0.7538 & 0.0341 & -0.2055 & 0.7538 & 0.0341 \\ -0.7538 & 3.0325 & 0.0085 & 0.7538 & -3.0325 & 0.0085 \\ 0.0341 & 0.0085 & 0.0966 & -0.0341 & -0.0085 & 0.0483 \\ -0.2055 & 0.7538 & -0.0341 & 0.2055 & -0.7538 & -0.0341 \\ 0.7538 & -3.0325 & -0.0085 & -0.7538 & 3.0325 & -0.0085 \\ 0.0341 & 0.0085 & 0.0483 & -0.0341 & -0.0085 & 0.0966 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Considere que las matrices de rigidez de los elementos deben ser simétricas.

**Matriz de rigidez de la estructura y cálculo de las incógnitas**

Para calcular la matriz de rigidez de la estructura  $K$ , la cual también es simétrica y tiene un orden de  $9 \times 9$  dado que nueve grados de libertad fueron designados para el marco, se ensamblan las matrices anteriores.

$$K = 10^4 \begin{pmatrix} 3.5259 & -0.7538 & 0.0341 & -3.3204 & 0 & 0 & -0.2055 & 0.7538 & 0.0341 \\ -0.7538 & 3.0512 & -0.0288 & 0 & -0.0187 & -0.0374 & 0.7538 & -3.0325 & 0.0085 \\ 0.0341 & -0.0288 & 0.1962 & 0 & 0.0374 & 0.0498 & -0.0341 & -0.0085 & 0.0483 \\ -3.3204 & 0 & 0 & 3.3204 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0187 & 0.0374 & 0 & 0.0187 & 0.0374 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0374 & 0.0498 & 0 & 0.0374 & 0.0996 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2055 & 0.7538 & -0.0341 & 0 & 0 & 0 & 0.2055 & -0.7538 & -0.0341 \\ 0.7538 & -3.0325 & -0.0085 & 0 & 0 & 0 & -0.7538 & 3.0325 & -0.0085 \\ 0.0341 & 0.0085 & 0.0483 & 0 & 0 & 0 & 0.0341 & -0.0085 & 0.0966 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Como se tienen tres incógnitas de desplazamiento, la matriz anterior se secciona de tal modo que en la parte izquierda haya 3 columnas y en la porción superior haya 3 filas. Cada submatriz se identifica así

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & | & K_{12} \\ \hline K_{21} & | & K_{22} \end{pmatrix}$$

Se requiere de  $C = KD$ . Particularmente, para este marco tenemos

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -4.5 \\ -3.1667 \\ \hline R_{AX} \\ R_{AY} - 2.5 \\ M_A - 2.5 \\ R_{CX} - 8 \\ R_{CY} - 2 \\ M_C + 5.6667 \end{pmatrix} = 10^4 \begin{pmatrix} 3.5259 & -0.7538 & 0.0341 & -3.3204 & 0 & 0 & -0.2055 & 0.7538 & 0.0341 \\ -0.7538 & 3.0512 & -0.0288 & 0 & -0.0187 & -0.0374 & 0.7538 & -3.0325 & 0.0085 \\ 0.0341 & -0.0288 & 0.1962 & 0 & 0.0374 & 0.0498 & -0.0341 & -0.0085 & 0.0483 \\ -3.3204 & 0 & 0 & 3.3204 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0187 & 0.0374 & 0 & 0.0187 & 0.0374 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0374 & 0.0498 & 0 & 0.0374 & 0.0996 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2055 & 0.7538 & -0.0341 & 0 & 0 & 0 & 0.2055 & -0.7538 & -0.0341 \\ 0.7538 & -3.0325 & -0.0085 & 0 & 0 & 0 & -0.7538 & 3.0325 & -0.0085 \\ 0.0341 & 0.0085 & 0.0483 & 0 & 0 & 0 & 0.0341 & -0.0085 & 0.0966 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{HB} \\ \delta_{VB} \\ \theta_B \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De forma general, el sistema matricial es

$$\begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & | & K_{12} \\ \hline K_{21} & | & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix}$$

Los desplazamientos desconocidos se determinan extrayendo y resolviendo un primer subsistema correspondiente a

$$C_C = K_{11}D_D + K_{12}D_C$$

Debido a que  $D_C$  es un vector nulo, la ecuación anterior se simplifica a

$$C_C = K_{11}D_D$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -4.5 \\ 3.1667 \end{pmatrix} = 10^4 \begin{pmatrix} 3.5259 & -0.7538 & 0.0341 \\ -0.7538 & 3.0512 & -0.0288 \\ 0.0341 & -0.0288 & 0.1962 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{HB} \\ \delta_{VB} \\ \theta_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta_{HB} \\ \delta_{VB} \\ \theta_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00025989 \text{ m} \\ -0.00022682 \text{ m} \\ -0.00160176 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Al realizar un análisis de estos resultados, notamos que el nodo  $B$  experimenta una rotación horaria de  $0.0016 \text{ rad}$  y se desplaza horizontalmente hacia la izquierda  $0.00026 \text{ m}$  y verticalmente hacia abajo  $0.0016 \text{ m}$ .

Las reacciones se obtienen a partir de resolver un segundo subsistema que es

$$C_D = K_{21}D_D + K_{22}D_C$$

Como ya se mencionó,  $D_C$  es un vector cero, así que

$$C_D = K_{21}D_D$$

Al usar los desplazamientos calculados se tiene

$$\begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} - 2.5 \\ M_A - 2.5 \\ R_{Cx} - 8 \\ R_{Cy} - 2 \\ M_C + 5.6667 \end{pmatrix} = 10^4 * \begin{pmatrix} -3.3204 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0187 & 0.0374 \\ 0 & -0.0374 & 0.0498 \\ -0.2055 & 0.7538 & -0.0341 \\ 0.7538 & -3.0325 & -0.0085 \\ 0.0341 & 0.0085 & 0.0483 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.00025989 \\ -0.00022682 \\ -0.00160176 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.6294 \\ -0.5560 \\ -0.7130 \\ -0.6294 \\ 5.0560 \\ -0.8819 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$R_{Ax} = 8.6294 \Rightarrow \therefore R_{Ax} = 8.6294T \rightarrow$$

$$R_{Ay} - 2.5 = -0.5560 \Rightarrow R_{Ay} = -0.5560 + 2.5 = 1.944 \Rightarrow \therefore R_{Ay} = 1.944T \uparrow$$

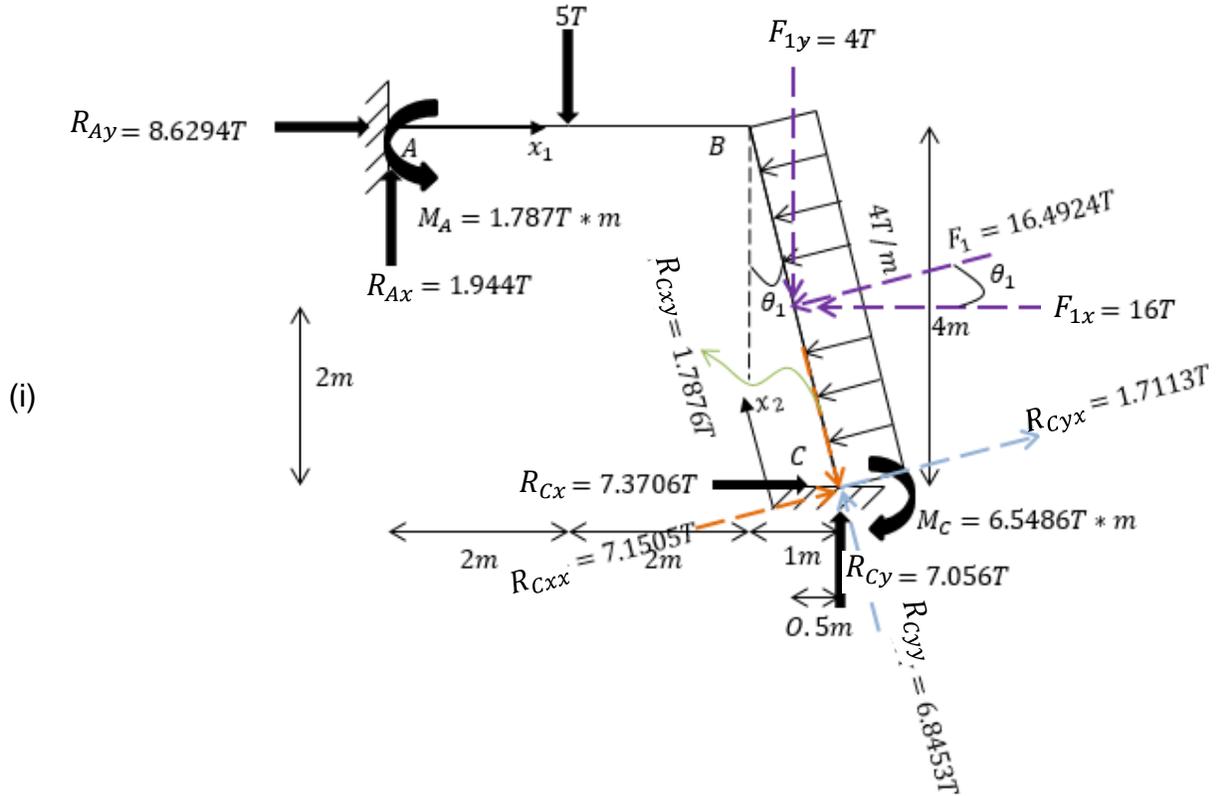
$$M_A - 2.5 = -0.7130 \Rightarrow M_A = -0.7130 + 2.5 = 1.787 \Rightarrow \therefore M_A = 1.787T \cdot m \curvearrowright$$

$$R_{Cx} - 8 = -0.6294 \Rightarrow R_{Cx} = -0.6294 + 8 = 7.3706 \Rightarrow \therefore R_{Cx} = 7.3706T \rightarrow$$

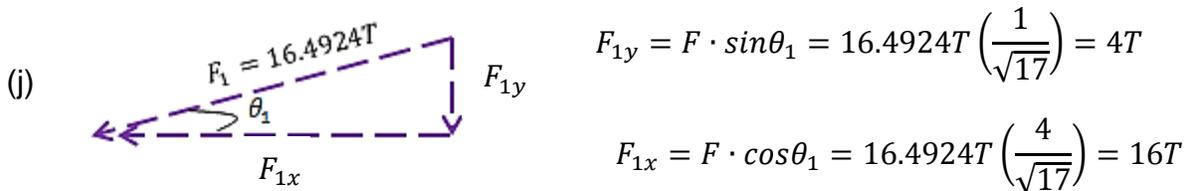
$$R_{Cy} - 2 = 5.0560 \Rightarrow R_{Cy} = 5.0560 + 2 = 7.0560 \Rightarrow \therefore R_{Cy} = 7.0560T \uparrow$$

$$M_C + 5.6667 = -0.8819 \Rightarrow M_C = -0.8819 - 5.6667 = -6.5486 \Rightarrow \therefore M_C = 6.5486T \cdot m \curvearrowright$$

En la figura 2-9i se muestran las reacciones en los empotres del marco.



Se demuestra el equilibrio externo del marco. La fuerza resultante de la carga distribuida de  $4T/m$ , que obviamente tiene su punto de aplicación a la mitad del miembro  $B - C$ , es  $F_1 = (4T/m)(4.1231m) = 16.4924T$ , y al resolverla en sus componentes  $x, y$ , figura 2-9j, resulta



$$+\rightarrow \sum Fx = 8.6294 - 16 + 7.3706 = 0 \quad ok$$

$$+\uparrow \sum Fy = 1.944 - 5 - 4 + 7.056 = 0 \quad ok$$

$$\curvearrowright \sum MA = 0$$

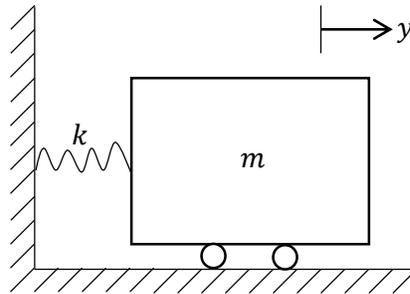
$$-1.787 + 5(2) - 7.3706(4) - 7.056(5) + 6.5486 + 16(2) + 4(4.5) \cong 0 \quad ok$$

# CAPÍTULO 3

## INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA ESTRUCTURAL

**Ejercicio 3.1** Análisis de un sistema de un grado de libertad, sin amortiguación.

**Instrucciones** Resuelva la ecuación la ecuación diferencial del movimiento para un sistema de un grado de libertad, sin amortiguación, figura 3-1a.

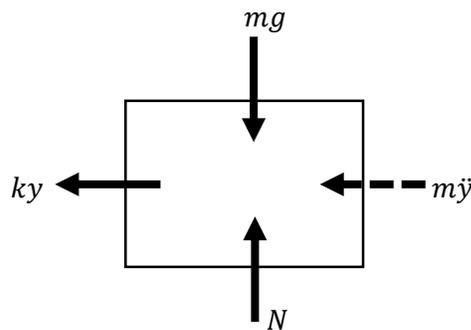


(a)

**Figura 3-1**

### SOLUCIÓN

En primer lugar se efectúa un diagrama de cuerpo libre, figura 3-1b.



(b)

En este caso, para obtener la ecuación del movimiento, se emplea el principio D'Alembert, el cual indica que todo sistema estructural puede ser llevado a un estado de equilibrio dinámico si se añade a las fuerzas externas una fuerza ficticia denominada fuerza de inercia, que actúa en dirección contraria al desplazamiento y que es equivalente al producto de la masa por la aceleración ( $m\ddot{y}$ ). Aquí el oscilador es desplazado en la dirección de la coordenada  $y$  positiva (hacia la derecha). Asimismo, en la figura 3-1b aparecen la fuerza del resorte lineal  $F_r = ky$ , el peso del cuerpo  $mg$  y la reacción normal  $N$  de la superficie soportante. En consecuencia, de la sumatoria de fuerzas en  $y$  se obtiene

$$m\ddot{y} + ky = 0 \text{ --- (1)}$$

Si  $y = e^{\lambda t}$ , entonces  $\dot{y} = \lambda e^{\lambda t}$  y  $\ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ , de tal modo que la ecuación 1 pasa a ser

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = 0 \text{ --- (2)}$$

Factorizando en (2) se tiene

$$(m\lambda^2 + k)e^{\lambda t} = 0 \text{ --- (3)}$$

Con  $e^{\lambda t} \neq 0$ , tenemos

$$m\lambda^2 + k = 0 \text{ --- (4)}$$

Se despeja  $\lambda^2$  de la expresión (4).

$$\lambda^2 = -k/m$$

Si  $\omega^2 = k/m$ , donde  $w$  es la frecuencia natural del sistema, se obtiene

$$\lambda^2 = -\omega^2 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega$$

Por consiguiente, la solución general para la ecuación diferencial de segundo orden es

$$y = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \text{ --- (5)}$$

Si se diferencia con respecto al tiempo la ecuación (5), se infiere la ecuación de la velocidad  $\dot{y}$ .

$$\dot{y} = C_1 i\omega e^{i\omega t} - C_2 i\omega e^{-i\omega t} \text{ --- (6)}$$

Ahora se determinarán las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$ . Para ello, se consideran las siguientes condiciones iniciales referentes a la inicialización del movimiento para el desplazamiento y la velocidad iniciales: 1)  $y = y_0$ , en  $t = 0$  y 2)  $\dot{y} = v_0$ , en  $t = 0$ .

Reemplazando la condición 1) en la ecuación (5) da

$$y_0 = C_1 + C_2 \text{ --- (7)}$$

Aplicando la condición 2) a la ecuación (6) da

$$v_0 = C_1 i\omega - C_2 i\omega \text{ --- (8)}$$

Se resuelve el sistema simultáneo de ecuaciones (7) y (8).

Se despeja  $C_1$  de la ecuación (7).

$$C_1 = y_0 - C_2 \text{ --- (9)}$$

Se combina la ecuación (9) con la ecuación (8).

$$v_0 = (y_0 - C_2)i\omega - C_2 i\omega \Rightarrow v_0 = i\omega y_0 - 2i\omega C_2 \text{ --- (10)}$$

Con base en la ecuación (10), se obtiene  $C_2$ .

$$C_2 = \frac{i\omega y_0 - v_0}{2i\omega} \Rightarrow C_2 = \left( \frac{i\omega y_0 - v_0}{2i\omega} \right) \left( \frac{i}{i} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega y_0 + i v_0}{\omega} \right) = \frac{1}{2} \left( y_0 + i \frac{v_0}{\omega} \right)$$

En consecuencia,

$$C_1 = y_0 - \frac{1}{2} \left( y_0 + i \frac{v_0}{\omega} \right) = \frac{1}{2} \left( y_0 - i \frac{v_0}{\omega} \right)$$

Por lo tanto, al usar lo resultados recién calculados para  $C_1$  y  $C_2$  en la expresión algebraica (5), se llega a

$$y = \frac{1}{2} \left( y_0 - i \frac{v_0}{\omega} \right) e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \left( y_0 + i \frac{v_0}{\omega} \right) e^{-i\omega t} \text{ --- (11)}$$

No obstante, dadas las siguientes relaciones de Euler:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$$

Lo cual conlleva a que la ecuación (11) se convierta en

$$y = \frac{1}{2} \left( y_0 - i \frac{v_0}{\omega} \right) (\cos \omega t + i \sin \omega t) + \frac{1}{2} \left( y_0 + i \frac{v_0}{\omega} \right) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \text{ --- (12)}$$

Finalmente, agrupando términos en la ecuación precedente, resulta

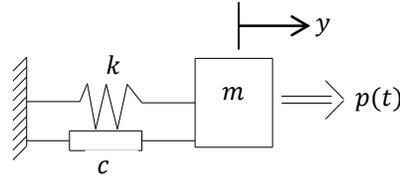
$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \text{ --- (14)}$$

Donde  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

La ecuación (14) es la respuesta de un sistema de un grado de libertad en vibración libre sin amortiguamiento.

**Ejercicio 3.2 Análisis de un sistema de un grado de libertad, con amortiguación.**

**Instrucciones** Resuelva la ecuación la ecuación diferencial del movimiento para un sistema de un grado de libertad, con amortiguación, figura 3-2a.



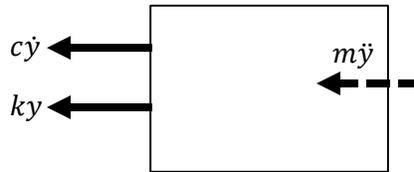
(a)

**Figura 3-2**

**SOLUCIÓN**

Para el oscilador simple con amortiguación viscosa, figura 3-2a, aparece un nuevo término,  $c$ , que es el coeficiente de amortiguación viscosa. Por su parte,  $k$  y  $m$  siguen siendo la constante del resorte y la masa, de forma correspondiente.

Con base en el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 3-2b, en el que se ha incorporado la fuerza de inercia  $m\ddot{y}$  con el objeto de aplicar el principio D'Alembert, considerando que el desplazamiento es positivo en la dirección de la aplicación de la carga y si además se supone que  $p(t) = 0$ , de la suma de fuerzas en la dirección  $y$  se obtiene la siguiente ecuación diferencial del movimiento:



(b)

$$+\rightarrow \sum F_y = 0$$

$$-ky - c\dot{y} - m\ddot{y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \text{ --- (I)}$$

- Caso I → amortiguamiento crítico,  $\xi = 1$ .

$$\lambda = -\xi\omega \text{ --- (1)}$$

Sustituyendo  $\xi = 1$  en la ecuación (1) da

$$\lambda = -\omega$$

y la solución es

$$y_1 = e^{-\omega t} \text{ --- (2)}$$

Como la ecuación diferencial es de segundo orden, debe haber dos soluciones linealmente independientes que formen la solución general.

Para obtener una segunda solución se propone que  $y_2 = y_1 f(t)$ , donde  $f(t)$  es una función a determinar.

$$y_2 = e^{-\omega t} f(t) \text{ --- (3)}$$

Derivando dos veces la ecuación (3) respecto del tiempo se obtiene

$$\dot{y}_2 = e^{-\omega t} \dot{f}(t) + (-\omega)e^{-\omega t} f(t) = [f'(t) - \omega f(t)]e^{-\omega t} \text{ --- (4)}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 &= [f'(t) - \omega f(t)](-\omega e^{-\omega t}) + [f''(t) - \omega f'(t)](e^{-\omega t}) \\ &= [-\omega f'(t) + \omega^2 f(t) + f''(t) - \omega f'(t)](e^{-\omega t}) = [f''(t) - 2\omega f'(t) + \omega^2 f(t)](e^{-\omega t}) \text{ --- (5)} \end{aligned}$$

Combinando las ecuaciones (4) y (5) con la ecuación diferencial (I) tenemos

$$\begin{aligned} m[f''(t) - 2\omega f'(t) + \omega^2 f(t)](e^{-\omega t}) + c[f'(t) - \omega f(t)]e^{-\omega t} + ke^{-\omega t} f(t) &= 0 \\ [mf''(t) + (-2\omega m + c)f'(t) + (m\omega^2 - c\omega + k)f(t)]e^{-\omega t} &= 0 \end{aligned}$$

Para obtener la solución no trivial se requiere que

$$e^{-\omega t} \neq 0$$

$$mf''(t) + (c - 2\omega m)f'(t) + (m\omega^2 - c\omega + k)f(t) = 0 \text{ --- (6)}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \xi = 1$$

$$c = \xi c_r = 2m\omega\xi = 2m\omega(1) = 2m\omega$$

Reemplazando los valores precedentes en la expresión matemática (6), resulta

$$mf''(t) + [2m\omega - 2m\omega]f'(t) + \left[ m\left(\frac{k}{m}\right) - (2m\omega)\omega + k \right] f(t) = 0$$

$$mf''(t) + (k - 2m\omega^2 + k)f(t) = 0$$

$$mf''(t) + \left( 2k - 2m\left(\frac{k}{m}\right) \right) f(t) = 0$$

$$mf''(t) + (2k - 2k)f(t) = 0$$

$$mf''(t) = 0$$

$$m \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = 0 \Rightarrow m \frac{d}{dt} \left( \frac{df(t)}{dt} \right) = 0$$

$$\int d \left( \frac{df(t)}{dt} \right) = \int \frac{0}{m} dt$$

$$\left( \frac{df(t)}{dt} \right) = k_1$$

$$\int df(t) = \int k_1 dt$$

$$f(t) = k_1 t + k_2$$

$$\therefore y_2 = e^{-\omega t} (k_1 t + k_2) \text{ --- (7)}$$

La solución general tiene la siguiente forma:

$$y = a_1 y_1 + a_2 y_2 \text{ --- (8)}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2) y (7) en la ecuación (8) da

$$\begin{aligned} y &= a_1 e^{-\omega t} + a_2 e^{-\omega t} (k_1 t + k_2) = a_1 e^{-\omega t} + a_2 k_1 t e^{-\omega t} + a_2 k_2 e^{-\omega t} \\ &= (a_1 + a_2 k_2) e^{-\omega t} + a_2 k_1 t e^{-\omega t} \end{aligned}$$

Si

$$c_1 = a_1 + a_2 k_2$$

$$c_2 = a_2 k_1$$

Entonces

$$y = c_1 e^{-\omega t} + c_2 t e^{-\omega t} \text{ --- (9)}$$

Se comprueba que las soluciones son linealmente independientes a través del Wronskiano.

$$y_1 = e^{-\omega t} \quad y_2 = t e^{-\omega t}$$

$$\dot{y}_1 = -\omega e^{-\omega t} \quad \dot{y}_2 = t(-\omega e^{-\omega t}) + e^{-\omega t} = (-\omega t + 1)e^{-\omega t}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{-\omega t} & t e^{-\omega t} \\ -\omega e^{-\omega t} & (1 - \omega t)e^{-\omega t} \end{vmatrix} = e^{-\omega t}(e^{-\omega t}) \begin{vmatrix} 1 & t \\ -\omega & 1 - \omega t \end{vmatrix}$$

$$e^{-2\omega t}[1(1 - \omega t) - (-\omega)t] = e^{-2\omega t}(1 - \omega t + \omega t) = e^{-2\omega t}$$

Obsérvese que

$$e^{-\omega t} \neq 0$$

$\therefore y_1$  y  $y_2$  son linealmente independientes. En consecuencia, efectivamente la solución general es la representada en la ecuación (9).

Las condiciones iniciales son

$$a) y(0) = y_0 \quad b) \dot{y}(0) = v_0$$

Al derivar la expresión (9) respecto del tiempo, se tiene

$$\dot{y} = -\omega c_1 e^{-\omega t} + c_2 [(1 - \omega t)e^{-\omega t}] \text{ --- (10)}$$

Aplicando la condición a) en la ecuación (9) resulta

$$y_0 = c_1 e^0 + c_2(0)e^0 = c_1 \text{ --- (11)}$$

Aplicando la condición b) en la ecuación (10) se llega a

$$v_0 = -\omega c_1 e^0 + c_2 [(1 - \omega(0))e^0]$$

$$v_0 = -\omega c_1 + c_2 v_0 = -\omega y_0 + c_2 \text{ --- (12)}$$

Al despejar  $c_2$  de (12) se tiene

$$c_2 = v_0 + \omega y_0 \text{ --- (13)}$$

El reemplazamiento de las ecuaciones (11) y (13) en la ecuación (9) conlleva a

$$y = y_0 e^{-\omega t} + (v_0 + \omega y_0) t e^{-\omega t}$$

$$y = e^{-\omega t} [y_0 + (v_0 + \omega y_0) t]$$

- Caso II → estructuras sobre-amortiguadas,  $\xi > 1$ .

$$\lambda = -\xi\omega \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$$

La solución general es

$$y = c_1 e^{(-\xi\omega + \omega\sqrt{\xi^2 - 1})t} + c_2 e^{(-\xi\omega - \omega\sqrt{\xi^2 - 1})t} \dots (1)$$

Llamando  $\omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$  y factorizando a  $e^{-\xi\omega t}$  se tiene

$$y = e^{-\xi\omega t} (c_1 e^{(\omega_D t)} + c_2 e^{(-\omega_D t)}) \dots (2)$$

Derivando la ecuación (1) resulta

$$\dot{y} = c_1 (-\xi\omega + \omega_D) e^{(-\xi\omega + \omega_D)t} + c_2 (-\xi\omega - \omega_D) e^{(-\xi\omega - \omega_D)t}$$

Las condiciones iniciales son

$$a) y(0) = y_0 \quad b) \dot{y}(0) = v_0$$

Sustituyendo a) se obtiene

$$y_0 = C_1 e^0 + C_2 e^0$$

$$y_0 = C_1 + C_2 \dots (3)$$

Sustituyendo b) da

$$v_0 = c_1 (-\xi\omega + \omega_D) e^{(0)} + c_2 (-\xi\omega - \omega_D) e^{(0)}$$

$$v_0 = c_1 (-\xi\omega + \omega_D) + c_2 (-\xi\omega - \omega_D) \dots (4)$$

De la ecuación (3) se llega a

$$C_1 = y_0 - C_2 \dots (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) y despejando  $C_2$  obtenemos

$$v_0 = (y_0 - C_2)(-\xi\omega + \omega_D) + c_2(-\xi\omega - \omega_D)$$

$$v_0 = (y_0)(-\xi\omega + \omega_D) - (C_2)(-\xi\omega + \omega_D) - c_2(\xi\omega + \omega_D)$$

$$v_0 = (y_0)(-\xi\omega + \omega_D) - (C_2)(2\omega_D) \Rightarrow v_0 + 2\omega_D C_2 = (y_0)(-\xi\omega + \omega_D)$$

$$2\omega_D C_2 = (y_0)(-\xi\omega + \omega_D) - v_0 \Rightarrow C_2 = \frac{(y_0)(-\xi\omega + \omega_D) - v_0}{2\omega_D}$$

Si

$$\frac{\omega}{\omega_D} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

Entonces

$$C_2 = \frac{1}{2} \left[ y_0 \left( 1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) - \frac{v_0}{\omega_D} \right] \dots (6)$$

Sustituyendo la ecuación (6) en la ecuación (5) da

$$C_1 = y_0 - \frac{1}{2} \left[ y_0 \left( 1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) - \frac{v_0}{\omega_D} \right]$$

$$C_1 = y_0 - \frac{1}{2} y_0 (1) - \frac{1}{2} \left[ -y_0 \left( \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) - \frac{v_0}{\omega_D} \right] = \frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{2} \left[ y_0 \left( \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) + \frac{v_0}{\omega_D} \right]$$

$$C_1 = \frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{2} \left[ y_0 \left( \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) + \frac{v_0}{\omega_D} \right] = \frac{1}{2} \left[ y_0 \left( 1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) + \frac{v_0}{\omega_D} \right] \dots (7)$$

En consecuencia, si se reemplazan las ecuaciones (6) y (7) en la expresión matemática (2), la solución particular es

$$y = e^{-\xi\omega t} \left\{ \frac{1}{2} \left[ y_0 \left( 1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) + \frac{v_0}{\omega_D} \right] e^{(\omega_D t)} + \frac{1}{2} \left[ y_0 \left( 1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) - \frac{v_0}{\omega_D} \right] e^{(-\omega_D t)} \right\}$$

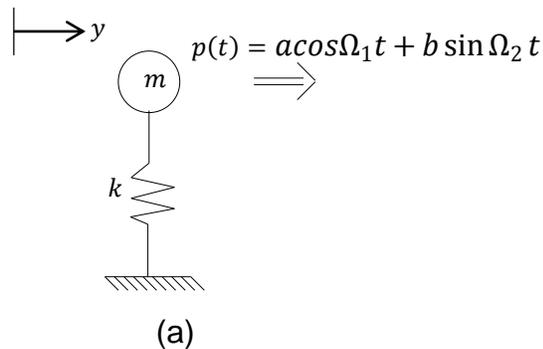
Donde

$$\omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Se deja como tarea al lector, resolver el Caso III → amortiguamiento subamortiguado,  $\xi < 1$ .

**Ejercicio 3.3 Respuesta de un sistema de un grado de libertad sin amortiguación, a excitación armónica.**

**Instrucciones** Obtenga la solución para la ecuación diferencial de la respuesta de un sistema de un grado de libertad, sin amortiguamiento, con periodo  $T$ , rigidez  $k$ , sometido a una excitación  $p(t) = a \cos \Omega_1 t + b \sin \Omega_2 t$ ,  $\Omega_1 \neq \Omega_2$ , figura 3-3a.



**Figura 3-3**

**SOLUCIÓN**

La ecuación de movimiento es

$$m\ddot{y} + ky = p(t) \text{ --- (1)}$$

Haciendo  $p(t) = a \cos \Omega_1 t + b \sin \Omega_2 t$  en la ecuación (1) se tiene

$$m\ddot{y} + ky = a \cos \Omega_1 t + b \sin \Omega_2 t \text{ --- (2)}$$

Dividiendo la ecuación (2) entre  $m$  resulta

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}(a \cos \Omega_1 t + b \sin \Omega_2 t) \text{ --- (3)}$$

Si

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{\omega^2}{k}$$

Entonces, la ecuación (3) pasa a ser

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{\omega^2}{k}(a \cos \Omega_1 t + b \sin \Omega_2 t) \text{ --- (4)}$$

La solución de (4) es

$$y = y_c + y_p \quad (5)$$

Donde

$$y_c = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (6)$$

$$y_p = A \cos \Omega_1 t + B \sin \Omega_1 t + C \cos \Omega_2 t + D \sin \Omega_2 t \quad (7)$$

Derivando dos veces la ecuación (7) respecto del tiempo se obtiene

$$\dot{y}_p = -\Omega_1 A \sin \Omega_1 t + \Omega_1 B \cos \Omega_1 t - \Omega_2 C \sin \Omega_2 t + \Omega_2 D \cos \Omega_2 t$$

$$\ddot{y}_p = -\Omega_1^2 A \cos \Omega_1 t - \Omega_1^2 B \sin \Omega_1 t - \Omega_2^2 C \cos \Omega_2 t - \Omega_2^2 D \sin \Omega_2 t \quad (8)$$

Sustituyendo las ecuaciones (7) y (8) en (4) se llega a

$$-\Omega_1^2 A \cos \Omega_1 t - \Omega_1^2 B \sin \Omega_1 t - \Omega_2^2 C \cos \Omega_2 t - \Omega_2^2 D \sin \Omega_2 t + \omega^2 (A \cos \Omega_1 t + B \sin \Omega_1 t + C \cos \Omega_2 t + D \sin \Omega_2 t) = \frac{\omega^2}{k} (a \cos \Omega_1 t + b \sin \Omega_2 t) \quad (9)$$

Agrupando términos en la expresión (9) da

$$(\omega^2 - \Omega_1^2) A \cos \Omega_1 t + (\omega^2 - \Omega_1^2) B \sin \Omega_1 t + (\omega^2 - \Omega_2^2) C \cos \Omega_2 t + (\omega^2 - \Omega_2^2) D \sin \Omega_2 t = \frac{\omega^2}{k} (a \cos \Omega_1 t + b \sin \Omega_2 t) \quad (10)$$

Igualando coeficientes obtenemos

$$(\omega^2 - \Omega_1^2) A = \frac{\omega^2 a}{k} \rightarrow A = \frac{\omega^2 a}{k(\omega^2 - \Omega_1^2)}$$

$$(\omega^2 - \Omega_1^2) B = 0 \rightarrow B = 0$$

$$(\omega^2 - \Omega_2^2) C = 0 \rightarrow C = 0$$

$$(\omega^2 - \Omega_2^2) D = \frac{\omega^2 b}{k} \rightarrow D = \frac{\omega^2 b}{k(\omega^2 - \Omega_2^2)}$$

Sustituyendo los valores obtenidos para  $A, B, C$  y  $D$  en la ecuación (7), se tiene que la solución particular es

$$y_p = \frac{\omega^2 a}{k(\omega^2 - \Omega_1^2)} \cos \Omega_1 t + \frac{\omega^2 b}{k(\omega^2 - \Omega_2^2)} \sin \Omega_2 t \quad (11)$$

Combinando las ecuaciones (11) y (6) con la ecuación (5) resulta

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{\omega^2 a}{k(\omega^2 - \Omega_1^2)} \cos \Omega_1 t + \frac{\omega^2 b}{k(\omega^2 - \Omega_2^2)} \sin \Omega_2 t$$

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{\omega^2}{k} \left[ \frac{a}{(\omega^2 - \Omega_1^2)} \cos \Omega_1 t + \frac{b}{(\omega^2 - \Omega_2^2)} \sin \Omega_2 t \right] \quad \text{--- (12)}$$

Las condiciones iniciales son

$$a) y(0) = y_0$$

$$b) \dot{y}(0) = v_0$$

Derivando la ecuación (12) respecto del tiempo da

$$\dot{y} = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t + \frac{\omega^2}{k} \left[ -\frac{a \Omega_1}{(\omega^2 - \Omega_1^2)} \sin \Omega_1 t + \frac{b \Omega_2}{(\omega^2 - \Omega_2^2)} \cos \Omega_2 t \right] \quad (13)$$

Aplicando la condición a) en la ecuación (12) se obtiene

$$y_0 = C_1 + \frac{\omega^2}{k} \left[ \frac{a}{(\omega^2 - \Omega_1^2)} \right] \rightarrow C_1 = y_0 - \frac{\omega^2}{k} \left[ \frac{a}{(\omega^2 - \Omega_1^2)} \right] \quad (14)$$

Aplicando la condición b) en la expresión algebraica (13) da

$$v_0 = \omega C_2 + \frac{\omega^2}{k} \left[ \frac{b \Omega_2}{(\omega^2 - \Omega_2^2)} \right] \rightarrow \omega C_2 = v_0 - \frac{\omega^2}{k} \left[ \frac{b \Omega_2}{(\omega^2 - \Omega_2^2)} \right]$$

$$C_2 = \frac{v_0}{\omega} - \frac{\omega}{k} \left[ \frac{b \Omega_2}{(\omega^2 - \Omega_2^2)} \right] \quad (15)$$

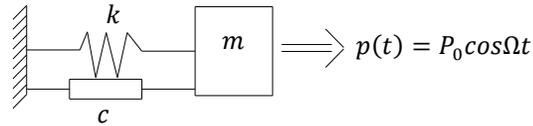
La sustitución de las ecuaciones (14) y (15) en la ecuación (12) conlleva a

$$y = \left\{ y_0 - \frac{\omega^2}{k} \left[ \frac{a}{(\omega^2 - \Omega_1^2)} \right] \right\} \cos \omega t + \left\{ \frac{v_0}{\omega} - \frac{\omega}{k} \left[ \frac{b \Omega_2}{(\omega^2 - \Omega_2^2)} \right] \right\} \sin \omega t$$

$$+ \frac{\omega^2}{k} \left[ \frac{a}{(\omega^2 - \Omega_1^2)} \cos \Omega_1 t + \frac{b}{(\omega^2 - \Omega_2^2)} \sin \Omega_2 t \right]$$

**Ejercicio 3.4 Respuesta de un sistema de un grado de libertad amortiguado, a excitación armónica.**

**Instrucciones** Obtenga la solución particular para la ecuación diferencial de la respuesta de un sistema de un grado de libertad, con amortiguamiento, sometido a una excitación  $p(t) = P_0 \cos \Omega t$ , figura 3-4a.



(a)

**Figura 3-4**

**SOLUCIÓN**

La ecuación general para sistemas amortiguados es

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = p(t) \text{ --- (1)}$$

Si,  $p(t) = P_0 \cos \Omega t$ , entonces la ecuación (1) pasa a ser

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P_0 \cos \Omega t \text{ --- (2)}$$

Dividiendo la ecuación (2) entre m y empleando los siguientes valores, se tiene

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\mu_0 \omega^2 = \frac{P_0}{m}$$

$$c = 2m\omega\xi \Rightarrow \frac{c}{m} = 2\omega\xi$$

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{P_0}{m} \cos \Omega t$$

$$\ddot{y} + 2\omega\xi\dot{y} + \omega^2 y = \mu_0 \omega^2 \cos \Omega t \text{ --- (3)}$$

La solución particular es

$$y_p = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t \text{ --- (4)}$$

Derivando la ecuación (4) dos veces con respecto al tiempo obtenemos

$$\dot{y}_p = -\Omega A \sin \Omega t + \Omega B \cos \Omega t \text{ --- (5)}$$

$$y_p'' = -\Omega^2 A \cos \Omega t - \Omega^2 B \sin \Omega t \quad (6)$$

Combinando las ecuaciones (5) y (6) con la ecuación (3) se llega a

$$-\Omega^2 A \cos \Omega t - \Omega^2 B \sin \Omega t + 2\omega\xi(-\Omega A \sin \Omega t + \Omega B \cos \Omega t) + \omega^2(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) = \mu_0 \omega^2 \cos \Omega t$$

Factorizando la expresión previa da

$$(-\Omega^2 A + 2\omega\xi\Omega B + \omega^2 A) \cos \Omega t + (-\Omega^2 B - 2\omega\xi\Omega A + \omega^2 B) \sin \Omega t = \mu_0 \omega^2 \cos \Omega t \quad (7)$$

Igualando coeficientes ahora, tenemos

$$\begin{aligned} -\Omega^2 A + 2\omega\xi\Omega B + \omega^2 A &= \mu_0 \omega^2 \\ -\Omega^2 B - 2\omega\xi\Omega A + \omega^2 B &= 0 \quad (8) \end{aligned}$$

Factorizando en la ecuación (8) se tiene

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \Omega^2)A + 2\omega\xi\Omega B &= \mu_0 \omega^2 \\ -2\omega\xi\Omega A + (\omega^2 - \Omega^2)B &= 0 \quad (9) \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\Omega = r\omega$  en las ecuaciones (8) y (9) se obtiene

$$(\omega^2 - r^2\omega^2)A + 2\omega\xi r\omega B = \mu_0 \omega^2 \quad (10)$$

$$-2\omega\xi r\omega A + (\omega^2 - r^2\omega^2)B = 0 \quad (11)$$

Simplificando las expresiones algebraicas (10) y (11) resulta

$$\omega^2(1 - r^2)A + 2\omega^2\xi rB = \mu_0 \omega^2 \quad (12)$$

$$-2\omega^2\xi rA + \omega^2(1 - r^2)B = 0 \quad (13)$$

Se multiplican las ecuaciones (12) y (13) por  $\frac{1}{\omega^2}$ , lo cual conduce a

$$(1 - r^2)A + 2\xi rB = \mu_0 \quad (14)$$

$$-2\xi rA + (1 - r^2)B = 0 \quad (15)$$

Se despeja A de la ecuación (15).

$$A = \frac{1 - r^2}{2\xi r} B \quad (16)$$

Se reemplaza la ecuación (16) en la ecuación (14) y se despeja B.

$$(1 - r^2) \left( \frac{1 - r^2}{2\xi r} \right) B + 2\xi rB = \mu_0$$

$$\frac{(1-r^2)^2}{2\xi r} B + 2\xi r B = \mu_0 \Rightarrow \left[ \frac{(1-r^2)^2}{2\xi r} + 2\xi r \right] B = \mu_0$$

$$\frac{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}{2\xi r} B = \mu_0 \Rightarrow B = \mu_0 \frac{2\xi r}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \dots (17)$$

Sustituyendo la ecuación (17) en la ecuación (16) resulta

$$A = \frac{1-r^2}{2\xi r} \mu_0 \frac{2\xi r}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} = \mu_0 \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}$$

Por consiguiente, la solución particular, que se infiere de reemplazar las expresiones matemáticas (16) y (17) en la expresión (4), es

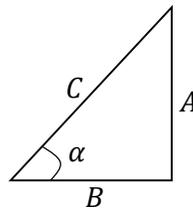
$$y_p = \mu_0 \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \cos \Omega t + \mu_0 \frac{2\xi r}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \sin \Omega t$$

$$= \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} [(1-r^2) \cos \Omega t + 2\xi r \sin \Omega t]$$

$$= A \cos \Omega t + B \sin \Omega t = \frac{C}{C} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$$

$$y_p = C \left( \frac{A}{C} \cos \Omega t + \frac{B}{C} \sin \Omega t \right) \dots (18)$$

Los términos  $A, B$  y  $C$  se pueden acomodar en un triángulo rectángulo, figura 3-4b.



(b)

Por trigonometría se tiene

$$\sin \alpha = \frac{A}{C}$$

$$\cos \alpha = \frac{B}{C}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{A}{B}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{A}{B}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Se reemplazan los factores precedentes en la ecuación (18).

$$y_p = C(\sin \alpha \cos \Omega t + \cos \alpha \sin \Omega t) \text{ --- (19)}$$

Si se emplea la siguiente identidad trigonométrica:

$$\sin(\alpha + \Omega t) = \sin \alpha \cos \Omega t + \cos \alpha \sin \Omega t$$

Entonces, la ecuación (19) se convierte en

$$y_p = C \sin(\alpha + \Omega t) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\alpha + \Omega t) \text{ --- (20)}$$

Donde

$$C = \sqrt{\mu_0^2 \frac{(1-r^2)^2}{[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2]^2} + \mu_0^2 \frac{(2\xi r)^2}{[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2]^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0^2}{[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2]^2} [(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{\sqrt{\mu_0^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

Sea el factor de amortiguamiento

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

Entonces

$$C = D\mu_0$$

En consecuencia,

$$y_p = C \sin(\alpha + \Omega t) \Rightarrow y_p = D\mu_0 \sin(\alpha + \Omega t)$$

Donde

$$\mu_0 = \frac{P_0}{k} \quad \alpha = \tan^{-1} \frac{1-r^2}{2\xi r}$$

## BIBLIOGRAFÍA

- González, O. (2011). *Análisis Estructural*. México: LIMUSA.
- Hibbeler, R. (2012). *Análisis Estructural*. México: PEARSON.
- Villarreal, G. (2009). *Análisis Estructural*. Perú: Independiente.
- Magdaleno, C. (1978). *Análisis Matricial de Estructuras Reticulares*. México: INDEPENDIENTE.
- Tena, A. (2007). *Análisis de Estructuras con Métodos Matriciales*. México: LIMUSA.
- Colindres, R. (1978). *Dinámica de Suelos y Estructuras Aplicadas a la Ingeniería Sísmica*. México: LIMUSA.
- Paz, M. (1992). *Dinámica Estructural: Teoría y Cálculo*. México: REVERTÉ,S.A.
- Beer, F., Johnston, E. & Elliot, R.(2007). *Mecánica Vectorial para Ingenieros: Estática*. México: MCGRAWHILL.
- Villarreal, G. (2011). *Estática: Problemas Resueltos*. Perú: Independiente.
- Fitzgerald, R. (2011). *Resistencia de Materiales*. México: Alfaomega.
- Ortiz, D. (2013). Tesis: *Problemario de Análisis de Estructuras Isostáticas e Hiperestáticas para Vigas, Marcos y Armaduras*. México: UNAM.





# ANÁLISIS ESTRUCTURAL

## Problemas resueltos

El libro se ha escrito con la finalidad de contribuir en el apoyo a profesores, estudiantes y todos los interesados en general en la enseñanza y el aprendizaje del análisis estructural, el cual representa un apartado trascendental en el área de la Ingeniería Estructural. Esta a su vez, constituye uno de los pilares más importantes de la carrera de Ingeniería Civil y de otras carreras como Ingeniería Mecánica, Ingeniería Aeronáutica y Arquitectura.

Una estructura es el conjunto de elementos resistentes, convenientemente vinculados entre sí, que accionan y reaccionan bajo los efectos de las cargas; su finalidad es resistir y transmitir cargas a otros elementos y a los apoyos, y de ese modo garantizar su correcto funcionamiento. Los requisitos o exigencias básicas que una estructura debe cumplir son: equilibrio y estabilidad.

El énfasis de este libro es resolver de manera minuciosa y clara una gran variedad de ejercicios sobre estructuras isostáticas e hiperestáticas, y sistemas de un grado de libertad con amortiguación y sin amortiguación.

A continuación se proporciona el enfoque seguido en el presente trabajo. La obra se divide en tres capítulos. En el capítulo 1 se analizan estructuras isostáticas únicamente, específicamente, vigas, pórticos, armaduras y arcos. Esta parte vendría siendo una introducción al análisis estructural; se explica la forma de calcular el grado de indeterminación, las reacciones en los soportes, de determinar las funciones de las fuerzas cortante y normal, y de momento flexionante empleando el método de las secciones, de dibujar los diagramas de los elementos mecánicos, de inferir las fuerzas en las barras con el método de los nodos, etc.

En el capítulo 2 se estudian las estructuras estáticamente indeterminadas; los métodos que se emplean para ello son el de flexibilidades y el matricial de la rigidez, y se aplican solo a armaduras, vigas y marcos. Finalmente, el capítulo 3 se enfoca a la resolución de sistemas de un grado de libertad con y sin amortiguamiento, tanto para casos en los que la carga es nula como para los casos en los que hay excitación armónica.

Para más información, visita la página de Facebook de la Biblioteca denominada  
Problemario de Análisis de Estructuras en 2D y 3D